Математика и механика. Физика

УДК 621.01

МОДИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОГО СОУДАРЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

И.А. Жуков, Л.Т. Дворников

Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк
E-mail: zhival@yandex.ru

Показана модификация одномерной волновой теории Сен-Венана при продольном соударении стержней сложных геометрических форм с учетом деформации в радиальном направлении.

Ключевые слова:
Удар, колебания, деформация, импульс, боек, волновод.

Специфической особенностью работы ударных систем технологического назначения является процесс передачи энергии от бойка к штанге-волноводу, продвижения ударного импульса по волноводу, прохождения его через инструмент и превращения его энергии в полезную энергию разрушения среды и частичного отражения ударной волны. Решение проблемы эффективности работы ударных машин требует управления полезной энергией в течение всего процесса ее преобразования от разгона бойка до непосредственного разрушения среды.

В результате соударения в телах возникает весьма сложное поле напряжений, изменяющееся не только от точки к точке, как при статической нагрузке, но и в данной точке тела со временем. Поле напряжений еще более усложняется в результате отражения волн от границ тела. Вследствие этого напряжение и деформации необходимо рассматривать как сумму последовательных ударных волн, таких, как продольная, поперечная, поверхностная и т. д., и волн, отраженных от границ тел.

Математическое описание процесса удара в общем виде оказывается весьма сложным, и потому для решения частных, прикладных вопросов теории удара применяются некоторые упрощения и допущения, которые иногда приводят к недопустимым ошибкам количественного и качественного характера, и, следовательно, к неправильному выбору направления при решении тех или иных проблем, связанных с ударом.

В связи с этим особое значение приобретает рациональный выбор такой методики расчета из числа существующих, которая бы в наибольшей мере соответствовала физическим особенностям рассматриваемой ударной системы. К настоящему времени известными, апробированными являются следующие методы расчета ударных систем [1]:

- классический ньютоновский метод;
- метод Герца, предполагающий области контакта упругими, а тела твердыми;
- метод, предполагающий тела полностью упругими, но распространение напряжений по телам мгновенным;
- метод одномерной волны Сен-Венана;
- комбинированный метод, сочетающий статические решения теории упругости для приконтактной зоны и метод плоской волны для остальной части соударяющихся тел.

На ударные нагрузки материалы реагируют иначе, чем на статическое нагружение. Такие свойства, как скорость распространения волн или плотность материала, не имеющие существенного значения при медленных нагрузках, становятся весьма важными при ударе. Действие ударной нагрузки не передается мгновенно всем частям тела: вначале отдельные участки последнего остаются невозмущенными, выражаясь образно, они еще «не знают», что произошло нагружение. При этом напряжения и деформации движутся в стержнях в виде волн, распространяющихся со скоростью звука.

Наиболее широкое применение при исследовании ударных систем получила одномерная волновая теория удара, сформулированная Барре де Сен-Венаном [2], нашедшего общее решение задачи в форме, допускающей практические приложения. Теория Сен-Венана построена для тонких стержней с плоскими торцами на тех допущениях, что: 1) плоские, поперечные к оси стержня, сечения остаются плоскими в процессе распространения волн продольной деформации; 2) материал стержня подчиняется закону Гука, т. е. деформации остаются в пределах упругости; 3) соприкосновение соударяющихся тел происходит в один и тот же момент времени по всей площади ударного торца.

По теории Сен-Венана процесс продольного соударения стержней полностью определяется функцией смещения $u(x,t)$ поперечного сечения стержня с координатой x в момент времени t. Ось координат поперечных сечений x совпадает с прямой, проходящей через центры сечений. Процесс распространения волн продольных колебаний в стержне описывается дифференциальным уравнением гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $a=\sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения упругих волн продольной деформации в стержне с плотностью материала ρ и модулем упругости E.

Как видно, ур. (1) учитывает только свойства материалов соударяющихся тел и никак не учитывает их геометрию. Рассмотрим процесс распространения волн продольных колебаний в стержне переменного поперечного сечения (рис. 1).

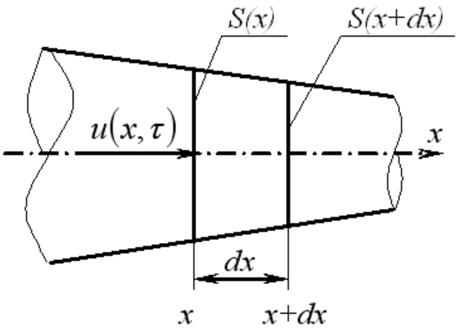

Рис. 1. *Процесс распространения волн продольных колебаний в стержне переменного поперечного сечения*

Выделим элемент стержня ограниченный боковой поверхностью и двумя поперечными сечениями, отстоящими на бесконечно малом расстоянии dx друг от друга, с координатами x и $x+dx$. Выделенный элемент будет иметь объем

$$dV = S(x)\,dx,$$

и массу

$$dm = \rho\, dV = \rho\, S(x)\, dx.$$

Ускорение смещения сечения $a(x,t)$ определятся соответственно второй производной по времени от функции смещения сечений

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Относительная деформация $\varepsilon(x,t)$, напряжение $\sigma(x,t)$, усилие $F(x,t)$ в сечении с координатой x в момент времени t определяется формулой

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sigma(x,t) = E\cdot\varepsilon(x,t) = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$F(x,t) = S(x)\,\sigma(x,t) = E\cdot S(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \qquad (2)$$

Второй закон Ньютона для выделенного элемента запишется в виде

$$dm\cdot a(x,t) = F(x+dx,t) - F(x,t),$$

$$\rho\cdot S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{F(x+dx,t)-F(x,t)}{dx},$$

$$\rho\cdot S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}. \qquad (3)$$

Подставляя выражение усилия (2) в (3), получаем модификацию уравнения продольных колебаний стержней с учетом их геометрии

$$\rho\cdot S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E\cdot S(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right). \qquad (4)$$

Ур. (4) для стержней переменного поперечного сечения показано в работе Я.Г. Пановко [3].

Выполняя операции дифференцирования, можно представить ур. (4) в другой форме

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a^2\frac{1}{S(x)}\frac{dS(x)}{dx}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \qquad (5)$$

Для стержня постоянного поперечного сечения ур. (5) преобразуется в уравнение (1).

При решении частных задач о продольном соударении стержней помимо дифференциальных уравнений смещения сечений для бойка и для стержня записываются начальные и граничные условия. При этом стержень, как правило, считается полубесконечным, а система координат принимается таким образом, что ее начало совпадает с местом соударения бойка и стержня, т. е. неударный торец бойка имеет координату $x=l$, где l – длина бойка.

Начальные условия следующие:

– в момент начала взаимодействия смещения сечений стержня $w(x,t)$ и бойка $u(x,t)$ равны нулю:

$$w(x,0) = 0, \quad u(x,0) = 0;$$

– скорость смещения, определяемая частной производной по времени, для бойка равна его предударной скорости V_0, а для стержня равна нулю:

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = V_0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия, определяющие состояние концов бойка и стержня, следующие:

– в процессе взаимодействия смещения на границе бойка и стержня равны:

$$w(0,t) = u(0,t);$$

– в процессе взаимодействия силы взаимодействия на границе бойка и стержня равны:

$$S(0)\frac{\partial w(0,\tau)}{\partial x} = S_0\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial x};$$

– неударный торец бойка свободен от деформаций:

$$\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = 0;$$

– т. к. стержень полубесконечный, то в удаленных от ударного сечениях стержня деформации отсутствуют:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, полученная модификация волнового уравнения позволяет учитывать сложную геометрическую форму деталей ударных узлов, имеющих криволинейные образующие боковой поверхности, различные отверстия или полости.

Однако экспериментальные опыты свидетельствуют о некорректности допущений, принятых в одномерной волновой теории удара, и невозможности их осуществления на практике. В ударных системах сложной геометрической формы предположение, что в процессе деформирования плоские поперечные сечения остаются плоскими, весьма сомнительно, т. к. совместно с продольными колебаниями возникают и поперечные. Эти факты свидетельствуют о необходимости рассмотрения деформации стержней в радиальном направлении. Впервые на необходимость более детального рассмотрения задачи о продольном ударе указал Т. Юнг [4], введя ограничение на предударную скорость бойка и принимая в учет влияние его массы. В 1876 г. Л. Похгаммером была опубликована работа [5], в которой он рассматривает задачу о продольных колебаниях цилиндрического стержня кругового сечения, учитывая при этом поперечные перемещения.

Принцип одномерности обеспечивает сравнительно простое описание волновых процессов при продольных колебаниях, поэтому были предприняты попытки модификации дифференциального уравнения Сен-Венана с учетом поперечных колебаний. Одна из таких попыток заключается во введении поправки Релея при сохранении теории Сен-Венана в целом, согласно которой предполагается, что после энергии продольного движения частиц стержня следующей по значению является кинетическая энергия радиального движения динамически сжимаемого тела.

Вывод модифицированного уравнения продольных колебаний в цилиндрической системе координат показан в работе [6]. Однако использование цилиндрической системы координат накладывает ограничения на возможность расчета ударных систем, детали которых имеют сложную форму, отличающуюся от тел вращения гладких плоских кривых. К примеру, в ударной бурильной машине [7] волновод выполняется с некруглым поперечным сечением – шестиугольным, квадратным или ромбическим. На основании этого обратимся к выводу модифицированного уравнения продольных колебаний стержней сложной формы в декартовой прямоугольной системе координат.

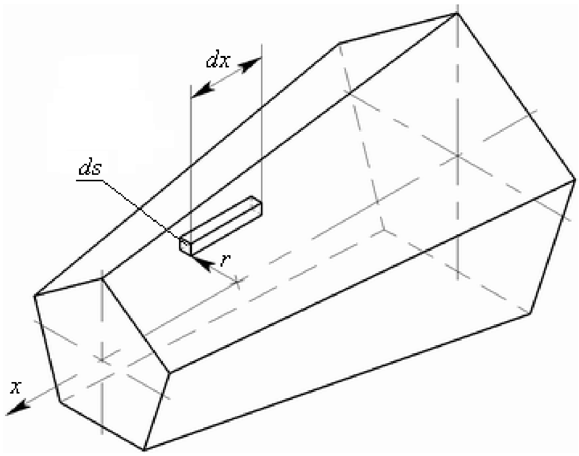

Рис. 2. *Колебания в стержне при ударе*

Напряженно-деформированное состояние и кинематика стержня при ударе (рис. 2) определяются функцией смещения $u(x,t)$ сечения вдоль оси, как и по теории Сен-Венана. Относительная продольная деформация элемента определяется выражением

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Согласно закону Гука, при продольной деформации тела возникают относительные деформации ε_r в поперечном направлении

$$\varepsilon_r = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_r(x,r,t)}{\partial r},$$

где μ – коэффициент Пуассона; $u_r(x,r,t)$ – функция радиального перемещения.

Тогда функция радиального перемещения полностью определяется функцией осевого перемещения сечения и расстоянием r от точки сечения до оси x

$$u_r(x,r,t) = -\mu r\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Согласно энергетическому подходу принципа Гамильтона-Остроградского, действительное движение системы с голономными связями отличается от иных кинематически возможных движений тем, что для него приращение функционала действия по Гамильтону-Остроградскому, определенного для произвольного промежутка времени, равно нулю

$$\delta\int_{t_0}^{t} L dt = 0,$$

где $L=(T-П)$ – функция Лагранжа, определяемая разностью кинетической T и потенциальной $П$ энергий системы.

С учетом поправки Релея кинетическая энергия выделенной части, или всего, стержня складывается из энергии частиц стержня в осевом T_x и радиальном T_r направлениях. Потенциальная энергия определяется энергией продольного сжатия $П_x$.

Таким образом, функция Лагранжа определяется выражением

$$L = T_x + T_r - П_x.$$

Тогда

$$\delta \int_{t_0}^{t} (T_x + T_r - П_x) dt = 0. \quad (6)$$

Кинетическая энергия выделенного элемента с функцией площади поперечного сечения $S(x)$ в осевом направлении определяется выражением

$$T_x = \int_l \int_{S(x)} \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_{(l)} \rho S(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (7)$$

Аналогично получается выражение кинетической энергии в радиальном направлении

$$T_r = \int_l \int_{S(x)} \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u_r(x,r,t)}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_l \mu^2 \rho \, (\int_{S(x)} r^2 dS) \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx.$$

Интеграл

$$\int_{S(x)} r^2 dS = J_\rho(x)$$

представляет собой полярный момент инерции сечения.

Следовательно

$$T_r = \frac{1}{2} \int_l \rho \mu^2 J_\rho(x) \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx. \quad (8)$$

Для определения потенциальной энергии выделенного элемента учитывается, что при продольном деформировании возникают только нормальные напряжения $\sigma_x(x,t)=\sigma(x,t)$, параллельные продольной оси, которые в пределах упругости определяются законом Гука

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon_x(x,t) = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Тогда потенциальная энергия выделенного элемента стержня

$$П_x = \int_l \int_{S(x)} \frac{1}{2} \sigma(x,t) \varepsilon_x(x,t) dS dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_l ES(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (9)$$

С учетом полученных соотношений (7)–(9) определяется выражение (6) принципа Гамильтона-Остроградского для продольных колебаний выделенного элемента с учетом поправки Релея

$$\delta \int_{t_0}^{t} \int_l \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho S(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \rho \mu^2 J_\rho(x) \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 - \\ - \frac{1}{2} ES(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix} dx dt = 0.$$

Задача вывода уравнения продольных колебаний сводится к исследованию функционала действия по Гамильтону-Остроградскому на экстремум.

Условие экстремальности представляется в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v_r} \right) = 0, \quad (10)$$

где $\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $v_r = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$.

Вычисляя производные, входящие в условие экстремальности (10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho S(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\rho \mu^2 J_\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) = 0.$$

В соответствии с этим модифицированное уравнение продольных колебаний стержня переменного поперечного сечения с поправкой Релея будет записываться в следующей форме

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \rho S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} +$$

$$+ \rho \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(J_\rho(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Если пренебречь деформацией в радиальном направлении, приняв $\mu=0$, получается уравнение (4).

Приведенное модифицированное уравнение (11) свидетельствует о том, что поправка Релея приводит к появлению члена более высокого порядка малости. Поскольку поправка Релея зависит от коэффициента Пуассона μ и полярного момента инерции $J_\rho(x)$, можно сделать вывод, что решение зависит от большего числа механических параметров и особенностей геометрии стержней, чем по одномерной теории Сен-Венана. Таким образом, предложенная авторами модификация может стать фундаментальной основой при решении проблем, связанных с продольным ударом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. – М.: Наука, 1969. – 201 с.
2. Clebsch A. Theorie de l'elasticite des corps solides / V.f. Saint-Venant. – Paris: Dunod, 1883. – 980 p.
3. Пановоко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е., доп. и переработ. – Л.: Машиностроение, 1976. – С. 133.
4. Thomas Y. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. – London, 1807.
5. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrentzen isotropen Kreiszylinder // J. f. d. reine und angew. – 1876. – Math., 81. – S. 324.
6. Мясников А.А. Модифицированное уравнение продольных колебаний стержней переменного поперечного сечения в цилиндрической системе координат // Матер. VII научно-практ. конф. по проблемам машиностроения, металлургических и горных машин / Под ред. проф. Л.Т. Дворникова. – Новокузнецк: СибГГМА, 1998. – С. 70–79.
7. Пат. 2090753 РФ. МПК^6 E21C 5/02. Ударная бурильная машина / Л.Т. Дворников, Е.Ф. Губанов. – Приоритет от 08.06.1993, опубл. 20.09.97, Бюл. № 26.

Поступила 09.06.2008 г.

УДК 621.01(07)

ЗАДАЧА СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АССУРОВЫХ ТРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Л.Т. Дворников, М.Г. Попугаев

Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк
E-mail: fdba@yandex.ru

Работа посвящена наиболее широко применяемым в технике трехзвенным механизмам. Излагается оригинальный метод структурного синтеза пространственных ассуровых механизмов, в основе, которого лежит теория сложных кинематических цепей, определяемых сложностью базисного звена. Найдены и показаны фрагменты полного состава однозвенных пространственных групп Ассура.

Ключевые слова:
Трехзвенные механизмы, однозвенные группы Ассура, кинематические пары.

Известно, что ассуровыми механизмами называют такие, в которых за ведущее звено принимается кривошип или ползун, т. е. звенья, соединяющиеся с неподвижным звеном – стойкой во вращательную или в поступательную кинематические пары, а все остальные подвижные звенья обладают нулевой подвижностью.

В трехзвенных механизмах подвижными являются два звена, а третьим звеном считается стойка, относительно которой рассматривается движение. Так как ведущим звеном в них будет или кривошип или ползун, обладающие подвижностью W=1, то при создании механизма с той же подвижностью, что и у ведущего звена, т. е. с W=1, вторым звеном, должна являться система, обладающая нулевой подвижностью, так называемая группа Ассура. Если найти структуры всех возможных однозвенных групп Ассура, то тем самым будет решена задача о полном составе трехзвенных ассуровых механизмов.

Обратимся к поиску структур однозвенных пространственных групп Ассура. Известно [1], что все пространственные кинематические цепи описываются структурной формулой А.П. Малышева, которая записывается в виде уравнения

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (1)$$

В (1) обозначены: W – подвижность кинематической цепи (число ее обобщенных координат); n – число подвижных звеньев цепи; p_i – число используемых в цепи кинематических пар, где i – класс пары, соответственно: i=5 – пятый, i=4 – четвертый и т. д.

Однозвенным пространственным группам Ассура соответствуют следующие параметры: W=0 и n=1, тогда формула (1) принимает вид

$$5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 = 6. \qquad (2)$$

Все удовлетворяющие (2) решения могут быть реализованы конструктивно, однако найти такие решения из одного уравнения (2), содержащего 6 неизвестных, невозможно. Обратимся к работе [2], в которой обосновывается метод поиска структур цепей в зависимости от сложности используемого базисного звена, так называемого τ-угольника, по числу геометрических элементов (кинематических пар) в нем. Уравнения для определения общего числа кинематических пар p и общего числа звеньев цепи n, в этом случае, записываются в виде

$$\begin{cases} p = \tau + (\tau - 1)n_{i-1} + \ldots + in_i + \ldots + 2n_2 + n_1, \\ n = 1 + n_{\tau-1} + \ldots + n_i + \ldots + n_2 + n_1. \end{cases} \qquad (3)$$

В (3)

$$p = p_5 + p_4 + p_3 + p_2 + p_1, \qquad (4)$$