УДК 539.37

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛАСТИКИ СТЕРЖНЯ В РАЗНОВИДНОСТЯХ ПЛОСКОГО ИЗГИБА (СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НАГРУЗКА)

А.В. Анфилофьев

Томский политехнический университет
E-mail: zvm@tpu.ru

Упругий стержень в продольном изгибе сосредоточенной нагрузкой при больших искривлениях представлен как совокупность стержней, находящихся в различных видах изгиба. Сформирована общая расчётная схема для исследования влияния ориентации нагрузки на геометрию упругих кривых. Установлено, что в некоторых пределах форма кривых практически не зависят от направления нагрузки. Это позволяет определить границы, в которых имеет место понятие «малости» в положениях традиционной теории изгиба. Установлены свойства линии с линейно изменяемой кривизной и дано её соответствующее геометрическое представление. Сформирована диаграмма состояний стерня в диапазоне искривлений от центрального сжатия до центрального растяжения.

Ключевые слова:
Кривизна, функция кривизны, эластика, стержень, сосредоточенная нагрузка, разновидности изгибов.

1. Введение

В теории изгиба задача определения геометрии оси деформируемого стержня (задача эластики) формулируется как «восстановление линии по заданной функции изменения кривизны». Кривизна, по определению, характеризуется скоростью изменения угла наклона касательной θ при движении по длине L искомой линии $y(x)$ и выражается аналитически в естественной и координатной форме:

$$K = \frac{d\theta}{dL} = \frac{d^2 y}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-3/2}. \qquad (1)$$

Функцию изменения кривизны даёт теория изгиба уравнением Я. Бернулли:

$$K^* = M/EJ. \qquad (2)$$

Здесь M – функция изгибающих моментов, обусловленная нагрузкой, EJ – изгибная жесткость стержня.

Согласно (1) и (2) задача восстановления линии формируется уравнением:

$$\frac{d\theta}{dL} = K^* \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-3/2} = K^*. \qquad (3)$$

Искривление прямого стержня может явиться результатом нагрузки разного направления по отношению к нему и, очевидным образом, сформировано представление о разных видах его изгиба, рис. 1.

Стержни, для которых требование жёсткости ставит ограничения на величину искривления, являются объектом исследования теории изгиба «малых» перемещений. Используется упрощенное Л. Эйлером аналитическое выражение кривизны в координатной форме (1), с которым ур. (3) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx K^*. \qquad (4)$$

В этой теории систему координатных осей всегда связывают с осью стержня в начальном недеформированном состоянии. Функция кривизны K^* устанавливается без учёта искривления оси или с его учётом при наличии продольных сил. Соответственно, различают теории продольного, поперечного, продольно-поперечного изгиба.

Искривление длинных и гибких стержней устанавливается по (3) и они являются объектом исследований теории «больших» перемещений [1, 2]. Основная её сложность состоит в согласовании функции K^* с выражениями кривизны [3].

Для искривлённых стержней в системе осей, связанной с направлением нагрузки, представление о разных изгибах исчезает, и становится очевидной общность между ними. Она имеет визуализацию в эластике стержня в продольном изгибе возрастающей сосредоточенной нагрузкой при разных углах поворота концевого сечения, рис. 2.

Одна из кривых, рис. 2, приведена на рис. 3. На этой линии указаны отрезки, которые представляют стержни в разных изгибах. Из совокупности кривых, рис. 2, можно выделить короткие (жёсткие) и длинные (гибкие) стержни при любом направлении нагрузки к их первоначальной оси.

Если в системе осей, связанных с начальной осью стержня, функции кривизны (2) для выделенных отрезков определяются разными уравнениями, то в системе осей x, y, связанных с направлени-

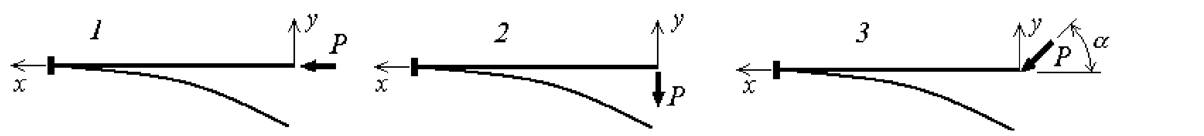

Рис. 1. *Разновидности плоского изгиба стержня сосредоточенной нагрузкой P: 1) продольный, 2) поперечный, 3) продольно-поперечный*

ем нагрузки, она одинакова для любого из них и упругие кривые их есть отрезки эластики стержня в продольном изгибе. Концы стержней определяют граничные условия его в соответствующем изгибе и, следовательно, все разновидности изгибов можно определить одной расчётной схемой.

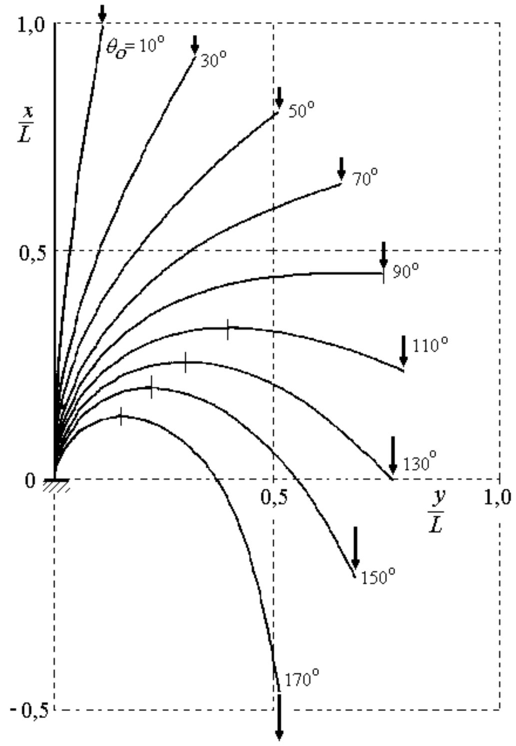

Рис. 2. *Эластика стержня в продольном изгибе*

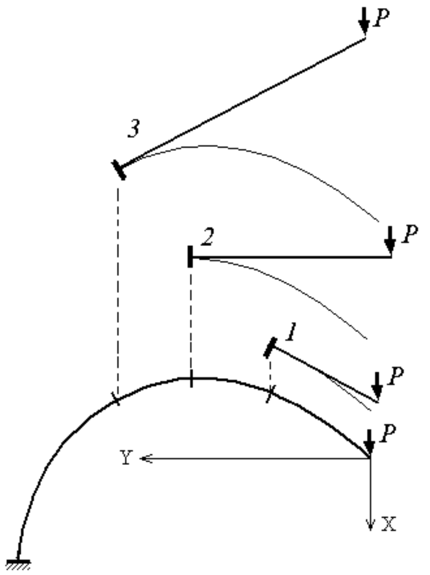

Рис. 3. *Разновидности изгибов стержня в кривой продольного изгиба: 1) с растяжением, 2) поперечный, 3) со сжатием*

Цель работы – установление особенностей геометрии искривления оси стержня в отмеченном едином представлении разновидностей его изгиба.

2. Расчётная схема разновидностей изгиба стержня

На рис. 4 состояние стержня определяется нагрузкой неизменного направления к его оси указанного углом α. Изменением этого угла в диапазоне 0...180° реализуются все возможные изгибы от центрального сжатия до центрального растяжения.

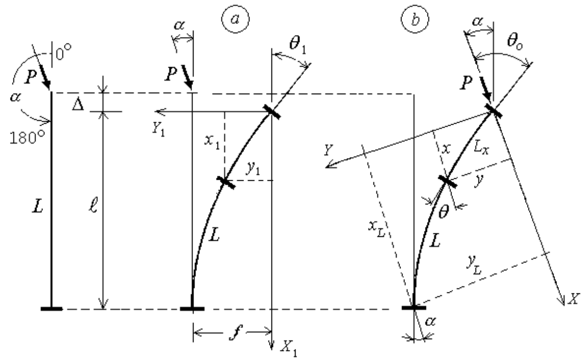

Рис. 4. *Изгиб стержня нагрузкой произвольного направления. Система осей связана: a) с начальной осью стержня, b) с направлением нагрузки*

В системе осей X_1, Y_1 (рис. 4, *a*) стержень от нагрузки с направлением $\alpha \neq 0$ искривляется. При этом «малые» перемещения точек упругой кривой можно устанавливать по ур. (4). Если перемещения являются «большими» они должны определяться по ур. (3). В системе осей X, Y (рис. 4, *b*), связанной с направлением нагрузки, даже «малые» перемещения становятся «большими».

Для решения поставленной задачи используем точные выражения кривизны в параметрической форме [4]:

$$K = \pm \frac{d(\sin\theta)}{dx} = \mp \frac{d(\cos\theta)}{dy}. \qquad (5)$$

Задача восстановления линии L с функцией изменения кривизны $K^*=py$, где коэффициент $p=P/EJ$ (EJ=const) формулируется уравнениями:

$$\frac{d(\cos\theta)}{dy} = py,\ -\frac{d(\sin\theta)}{dx} = py,\ dL = \frac{dx}{\cos\theta}. \qquad (6)$$

Граничные условия: в начале координат $x=0$, $y=0$, $\theta=\theta_0=\alpha+\theta_1$, на конце линии $x=x_L$, $y=y_L$, $\theta=\alpha$. Здесь θ_1 – поворот концевого сечения относительно своего исходного положения.

Из первого дифференциального уравнения (6) получаем уравнение ординат точек кривой:

$$y = \sqrt{\frac{2}{p}(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \qquad (7)$$

Из второго дифференциального уравнения (6) при подстановке (7) находим уравнение абсцисс:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}}. \qquad (8)$$

По третьему уравнению (6) определяется длина кривой от её начала до точки с координатами x, y, θ:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}}. \qquad (9)$$

Полная длина кривой L и её проекции на оси устанавливается по координатам её конца.

С преобразованием $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ ур. (8), (9) принимают вид:

$$x\sqrt{p} = -\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{[1-\sin^2(\theta/2)]\,d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}, \qquad (10)$$

$$L_x\sqrt{p} = -\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \qquad (11)$$

При замене $\sin(\theta_0/2)=k$, $\sin\varphi = \sin(\theta/2)/k$ ур. (10) и (11) выражаются нормальными эллиптическими интегралами первого и второго рода:

$$x\sqrt{p} = [F(\varphi_\theta, k) - F(\varphi_{\theta_0}, k)] - 2[E(\varphi_\theta, k) - E(\varphi_{\theta_0}, k)],$$

$$L\sqrt{p} = [F(\varphi_{\theta_0}) - F(\varphi_\alpha, k)],$$

где

$$\varphi_\theta = \arcsin\left[\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right], \quad \varphi_{\theta_0} = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_\alpha = \arcsin\left[\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right].$$

Полные интегралы $F(\varphi_{\theta0},k)$ и $E(\varphi_{\theta0},k)$ определяются углом поворота сечения стержня в начале координат θ_0, неполные $F(\varphi_\theta,k)$ и $E(\varphi_\theta,k)$ зависят от θ_0 и переменного угла θ в диапазоне $\theta_0...\alpha$. Для краткости приняты обозначения:

$$F(\varphi_{\theta_0}, k) = F_{\theta_0}, \quad F(\varphi_\theta, k) = F_\theta,$$

$$E(\varphi_{\theta_0}, k) = E_{\theta_0}, \quad E(\varphi_\theta, k) = E_\theta.$$

Ур. (7), (8) в относительных величинах имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{L} &= \frac{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}{F_{\theta_0} - F_\alpha}, \\ \frac{x}{L} &= \frac{1}{F_0 - F_\alpha}[(F_\theta - F_{\theta_0}) - 2(E_\theta - E_{\theta_0})]. \end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

$$L\sqrt{p} = [F_{\theta_0} - F_\alpha]. \qquad (13)$$

3. Геометрия упругих кривых изгибаемого стержня

Координаты точек кривых (12) устанавливаются по углу наклона касательных θ. В системе координат, связанной с начальной осью стержня (рис. 4, *а*), они находятся поворотом осей на угол α:

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

На рис. 5 представлены линии разной искривлённости при разных углах направления нагрузки α к первоначальной оси стержня для разных углов поворота его концевого сечения θ_1.

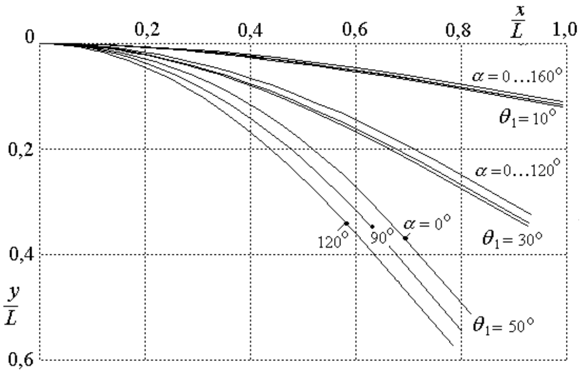

Рис. 5. *Искривления стержня при изменении направления сосредоточенной нагрузки в системе осей, связанной с начальной осью стержня*

Геометрически упругие линии в широком диапазоне изменения направления нагрузки одинаковы и приобретают отличие в количественных оценках только при значительных искривлениях. Искривление линий практически не зависит от направления нагрузки в диапазоне изменения угла α=0...160° при взаимном повороте её концов до $\theta_0-\alpha=\theta_1\approx 10°$. Все линии близки в смысле близости нулевого порядка и, по этому признаку, такие искривления можно определить как «малые» в очевидных допущениях.

Так, если $\sin(\theta/2)\approx\theta/2$, то интегралы (10) и (11) выражаются элементарными функциями:

$$x\sqrt{p} = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\theta}{\theta_0}\right)\left(1 - \frac{\theta_0^2}{4}\right) - \frac{\theta}{4}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}, \qquad (14)$$

$$L_x\sqrt{p} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\theta}{\theta_0}. \qquad (15)$$

При α=0 угол $\theta_0=\theta_1$ и функции (7), (14), (15) определяют кривую продольного изгиба стержня и, согласно рис. 5, этой кривой можно определить линии «малой» искривлённости стержня в разных изгибах.

В системе координат, связанных с осью стержня, его свободный конец имеет самые большие перемещения: поперечное f, продольное Δ и угловое θ_1. Эти перемещения в совокупности определяют геометрию деформирования. На рис. 6 показаны их связи.

Можно отметить, что линейные перемещения до значительных искривлений практически не зависят от направления нагрузки. Для «малых» искривлений из (7), (14), (15) следуют соответствующие элементарные выражения этих связей:

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2}{\pi}\theta_1, \quad \frac{\Delta}{L} \approx \frac{1}{4}\theta_1^2. \qquad (16)$$

Формулы (16) позволяют по углу поворота концевого сечения определить его линейные перемещения для стержня в разных изгибах в системе координат, связанных с осью стержня.

Так, при θ_1=10° из (16) следуют значения: f/L=0,1111, Δ/L=0,0076 с погрешностью относительно точных значений, определяемых по уравне-

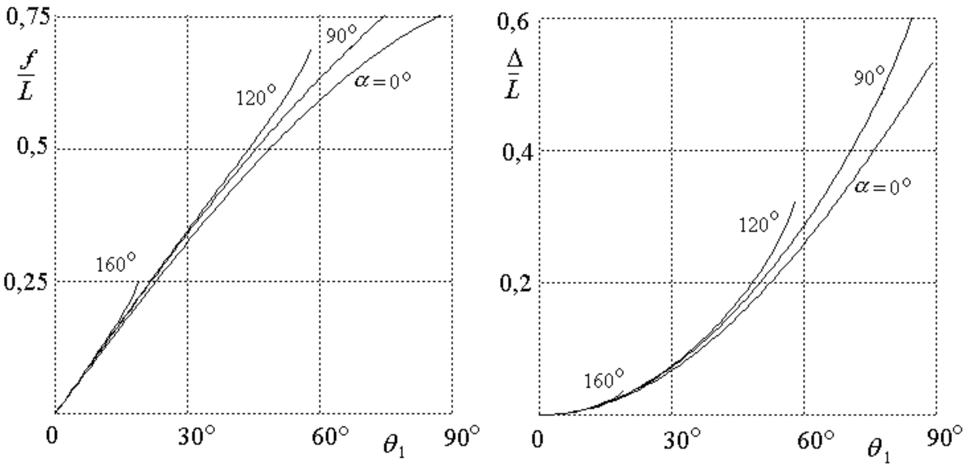

Рис. 6. *Линейные перемещения свободного конца стержня в системе, связанной с начальной осью стержня, в зависимости от его угла поворота*

ниям (12) и (13), для продольного изгиба стержня $-0{,}065$ %, $-0{,}124$ %, для поперечного изгиба $-4{,}02$ %, $-0{,}128$ %.

Обратим внимание на сформированное теорией «малых» перемещений представление о незначительности продольных смещений конца стержня Δ при разных изгибах. Допущением $dx \approx dL$ они исключаются из анализа, как величины второго порядка малости. Реальное представление об этих величинах даёт соотношение между линейными перемещениями, рис. 7. Отношение их практически линейно связано с углом поворота сечения и, согласно (16), для «малых» искривлений определяется формулой

$$\frac{\Delta}{f} \approx \frac{\pi}{8}\theta_1.$$

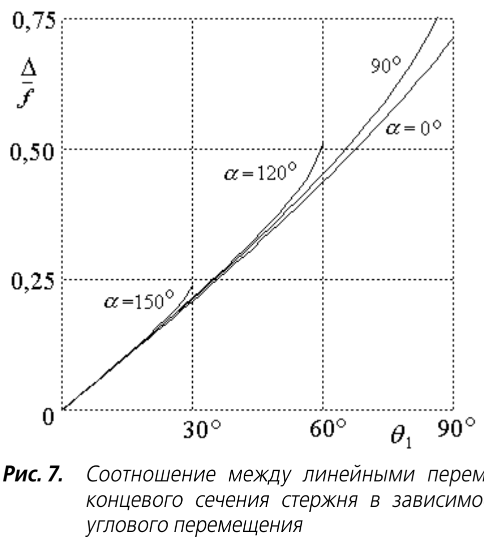

Рис. 7. *Соотношение между линейными перемещениями концевого сечения стержня в зависимости от его углового перемещения*

4. Геометрические свойства кривой с линейно изменяемой кривизной

Как следует из уравнений (6) кривая продольного изгиба является линией с линейно изменяющейся кривизной. Согласно представлениям рис. 3, эта линия имеет определяющее значение в геометрии деформирования стержня в разновидностях изгиба, однако свойства её практически не изучены. Она изображается по вычисленным точкам; в эксперименте наблюдается её форма, но она не имеет образа, которые создают линии, выраженные в элементарных функциях.

Существует единственная интерпретация этой кривой – «аналогия Кирхгофа», основанная на схожести упрощенного дифференциального уравнения кривой для продольного изгиба (4) и уравнения колебаний маятника. Угол наклона касательной к линии, когда точка касания движется по ней с постоянной скоростью, меняется точно так же, как и угол отклонения маятника при движении от одной крайней точки к другой.

Формулы кривизны (5) позволяют установить её некоторые геометрические свойства, рис. 8.

Так, из второго ур. (6) при начальных условиях x=0, y=0, θ=θ_0 непосредственно следует:

$$\sin\theta_0 - \sin\theta = p\int_0^x y\,dx = p\,\omega_x.$$

Здесь ydx=$d\omega$ есть элемент площади фигуры, образуемой кривой и её проекцией на ось координат, ω_x – площадь фигуры от начала координат до её произвольной точки.

$$\sin\theta = \sin\theta_0 - p\,\omega_x. \qquad (17)$$

Ур. (18) позволяет отметить одно геометрическое свойство кривой: синус угла наклона касательной к линии изменяется пропорционально изменению площади, заключённой между линией и её проекцией на ось абсцисс.

Из ур. (7) следует:

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = p\frac{y^2}{2}. \qquad (18)$$

Осуществим координатное представление ур. (17) и (18), для чего возведём их в квадрат и сложим

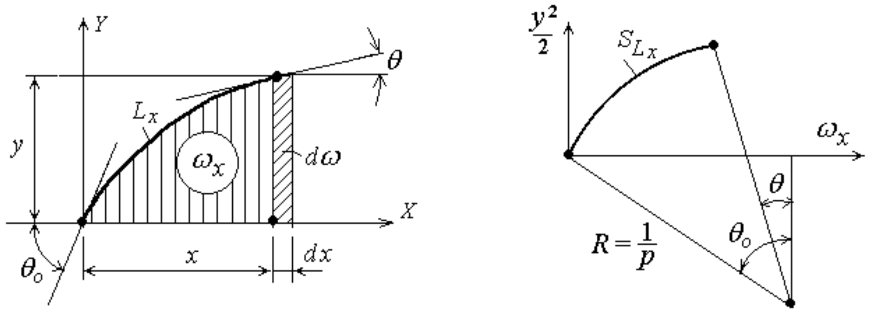

Рис. 8. *Геометрические свойства линии с кривизной K*=py*

$$\left[\omega_x - \frac{\sin\theta_0}{p}\right]^2 + \left[\frac{y^2}{2} + \frac{\cos\theta_0}{p}\right]^2 = \left(\frac{1}{p}\right)^2. \qquad (19)$$

В координатах $y^2/2$ и ω_x ур. (19) определяет дугу окружности радиусом $1/p$ с центральным углом ($\theta_0-\theta$). Длина её при этом равна статическому моменту длины кривой L_x относительно оси X. Действительно, по определению, её статический момент есть:

$$S_{L_x} = \int_0^{L_x} y\,dL = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{y\,dy}{\sin\theta},$$

где из ур. (6) следует

$$y\,dy = \frac{d(\cos\theta)}{p} = -\frac{\sin\theta\,d\theta}{p}, \quad \frac{y\,dy}{\sin\theta} = -\frac{d\theta}{p}$$

и, следовательно,

$$S_{L_x} = -\frac{1}{p}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{1}{p}(\theta_0 - \theta). \qquad (20)$$

В геометрическом представлении, рис. 8, стержни в разных изгибах сосредоточенной нагрузкой изображены на рис. 9.

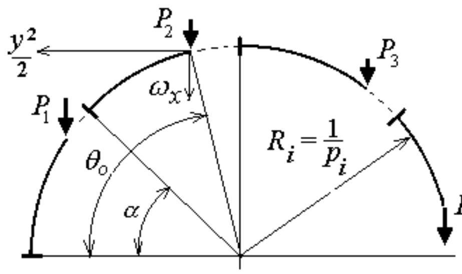

Рис. 9. *Разновидности изгибов стержня*

Для линии конечной длины, определяемой углами θ_0 и α, площадь фигуры ограниченной искривлённой линией и её проекцией на ось абсцисс по (17) выражается как:

$$\omega_L = \frac{\sin\theta_0 - \sin\alpha}{p}. \qquad (21)$$

Статический момент линии относительно этой оси по (20)

$$S_L = \frac{\theta_0 - \alpha}{p}. \qquad (22)$$

Согласно (21) и (22) такая линия обладает следующим геометрическим свойством:

$$\frac{\omega_L}{S_L} = \frac{\sin\theta_0 - \sin\alpha}{\theta_0 - \alpha}.$$

При «малых» искривлениях, когда $\sin\theta\approx\theta$, $\omega_L\approx S_L$.

По (21) можно установить нагрузку для упругой кривой, определённой экспериментально: $p = \frac{\sin\theta_0 - \sin\alpha}{\omega_L}$. В эксперименте необходимо определять в системе осей, связанных с направлением нагрузки, углы поворота концевых сечений и площадь, ограниченную линией и её проекциями.

5. Диаграмма состояний стержня в разновидностях изгиба

За основную зависимость, определяющей состояние деформируемых тел, обычно принимается связь нагрузки с перемещением, которое считается «характерным». Для деформируемых стержней им является самое большое линейное перемещение.

Поперечный изгиб стержня и его теория «малых» перемещений, как основная теория плоского изгиба, сформировали представление, что и при любом изгибе таким перемещением является самое большое поперечное смещение (стрела прогиба).

Пропорциональность роста стрелы прогиба с увеличением нагрузки стала признаком геометрической линейности. В других видах изгиба поведение стержня, оцениваемое по такой зависимости, нарушает это представление. Продольный изгиб традиционно ассоциируется с потерей устойчивости.

Аналитическим решением устанавливается искривленная линия конечной длины по функционально заданной кривизне стержня, и только уравнение Я. Бернулли (2) придаёт физический смысл задаче. Очевидно, необходимо различать решение математической задачи и его физические интерпретации.

Структура ур. задачи (6) определяет основную переменную – угол наклона касательной к линии (угловая координата). Искривление определяется взаимным поворотом концов $\theta_0-\alpha=\theta_1$. Коэффициент «p» функции изменения кривизны $K^*=py$ получает значение при заданной длине линии по угловым координатам концов в системе осей, связанной с нагрузкой. Эта связь определена (13) и представлена на рис. 10 диаграммой, которую можно трактовать как диаграмму состояний стержня, рис. 4.

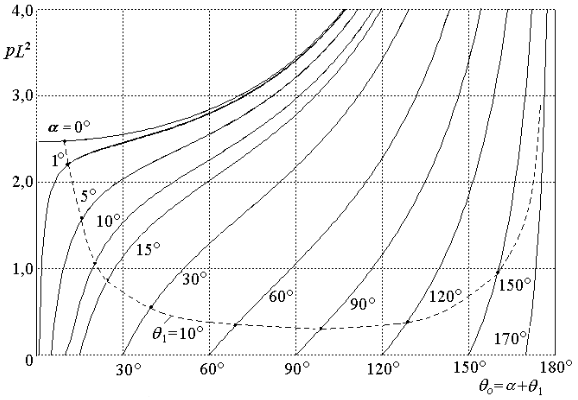

Рис. 10. *Диаграмма состояний стержня в плоском изгибе: - - - – граница $\theta_1 \approx 10°$, разделяющая «малые» и «большие» искривления*

Диаграмма включает все виды изгиба стержня от центрального сжатия до центрального растяжения. Сверху все состояния ограничены зависимостью (13) для продольного изгиба. Штриховая линия разделяет в соответствии с рис. 5 «малые» перемещения от «больших». Она же указывает значения нагрузок разных направлений к оси стержня практически одинаковой искривлённости при взаимном повороте концов на угол $\theta_0-\alpha=\theta_1$. Графически представленная связь «нагрузка – угол поворота» позволяет судить о геометрической линейности или нелинейности поведения стержня и устойчивости или неустойчивости при соответствующих нагрузках.

Выводы

1. В системе координатных осей, связанных с направлением нагрузки, «малые» и «большие» искривления стержня с линейной функцией кривизны во всех разновидностях изгиба имеют единое аналитическое и графическое представление.
2. Искривление стержня при повороте одного концевого сечения относительно другого на угол ≤10° практически не зависят от направления нагрузки. Линии этой искривлённости являются близкими в смысле близости нулевого порядка, и по этому признаку такое искривление определяет понятие «малости» традиционной теории изгиба.
3. Параметрическое выражение кривизны плоских линий позволяет установить их геометрические свойства и признаки, а также дать геометрическую иллюстрацию эластики стержня в разновидностях изгиба дугой окружности в соответствующих координатах.
4. Основной переменной в анализе геометрии деформирования изгибаемых стержней является поворот поперечных сечений. Соответственно, основной функциональной зависимостью, характеризующей искривление стержня конечной длины, является связь коэффициента функции кривизны (параметр нагрузки) с углами поворота его концевых сечений. Диаграммное представление этой связи даёт полную информацию для заключения о состоянии стержня и его поведении под нагрузкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 294 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1. Статика. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.
3. Анфилофьев А.В. Определение формы упругой линии гибкого стержня при заданном законе изменения её кривизны // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 4. – С. 17–22.
4. Анфилофьев А.В. Теории «малых» и «больших» искривлений стержней в общем аналитическом представлении // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310. – № 2. – С. 55–59.

Поступила 15.05.2008 г.