УДК 521.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ

Г.Е. Нагибин

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: kafedra@nifti.krasnoyarsk.ru

Показана возможность решения задачи с использованием представления в векторной форме силы инерции, а также её составляющих – центробежной и поворотной. На основе выражения для вектора Лапласа составлено векторное уравнение, которое можно трактовать как условие направленного действия сил – инерции и тяготения, результирующая которых равна неизменяемой по направлению силе. Это позволяет получить уравнения для решения задачи невозмущенного кеплеровского движения, рассчитывать параметры траектории и привести в удобной и относительно простой форме зависимости изменения координат от времени.

Ключевые слова:

I. Известно, что при движении тела в центральном поле с потенциалом $U=-\alpha/r$, наряду с моментом импульса $\boldsymbol{L}$ и полной энергией E, сохраняется векторная величина $\boldsymbol{f}$ – вектор Лапласа [1] или вектор Рунге-Ленца [2].

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L} - \frac{\alpha\cdot\boldsymbol{r}}{r}. \qquad (1)$$

Вектор $\boldsymbol{f}$ лежит в плоскости орбиты, и его направление совпадает с линией апсид – прямой, соединяющей центр силового поля с перицентром траектории движения тела. Физический смысл, как силовой характеристики для вектора $\boldsymbol{f}$, можно получить следующим образом.

Разделим выражение (1) на r^2 и получим векторное уравнение, каждый член которого имеет размерность силы.

$$\frac{\boldsymbol{f}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}}{r^2} - \frac{\alpha\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad (2)$$

$\boldsymbol{F}_1 = -\dfrac{\alpha\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ – это сила притяжения (или отталкивания в зависимости от знака α).

$$F_1 = \alpha/r^2 .$$

$\dfrac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}}{r^2}$ – есть величина, определяющая силу инерции $\boldsymbol{F}_i$.

Если разложить вектор скорости $\boldsymbol{v}$ на радиальную составляющую $\boldsymbol{v}_r$ и перпендикулярную радиус-вектору $\boldsymbol{v}_\varphi$, то получим общепринятые составляющие силы инерции:

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{v}_\varphi\times\boldsymbol{L}}{r^2} + \frac{\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{L}}{r^2}. \qquad (3)$$

Обозначим $|\boldsymbol{v}_r|=\dot{r}$, $|\boldsymbol{v}_\varphi|=r\dot{\varphi}$.

$\boldsymbol{F}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_\varphi\times\boldsymbol{L}}{r^2}$ – данное выражение есть вектор центробежной силы инерции.

$$F_2 = mr\dot{\varphi}^2 = L^2/mr^3 .$$

$\boldsymbol{F}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{L}}{r^2}$ – этот вектор определяет величину и направление поворотной силы инерции (сила Кориолиса). $F_3=\dot{r}L/r^2$.

$\boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_\varphi\times\boldsymbol{L}}{r^2} - \dfrac{\alpha\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ – суммарная радиальная составляющая сил.

$$F_4 = L^2/mr^3 - \alpha/r^2 .$$

$\boldsymbol{F}_5 = \dfrac{\boldsymbol{f}}{r^2}$ – суммарная составляющая силы притяжения и силы инерции.

$$F_5 = f/r^2 .$$

Действие указанных сил показано на рисунке.

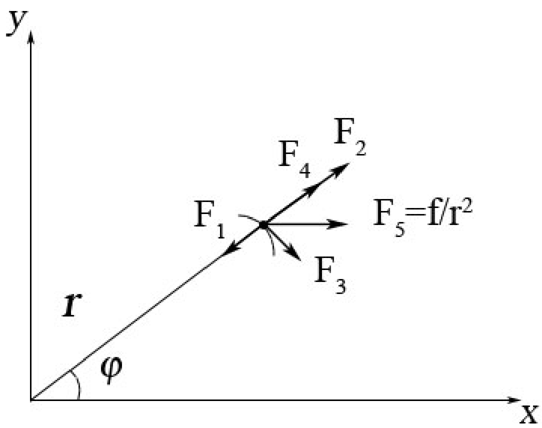

Рисунок. *Силы, действующие на тело при движении в центральном поле*

Таким образом, представление и использование сил инерции в форме (3) позволяет рассматривать выражение (2) как условие направленного действия сил, когда суммарная составляющая сил притяжения и инерции изменяется только по величине (обратно пропорционально квадрату расстояния) и не изменяется по направлению.

Записав уравнение (2) в проекциях на полярные оси, получим достаточно простые уравнения для решения задачи о движении тела в центральном поле:

$$f \cdot \cos\varphi = r\dot{\varphi} \cdot L - \alpha; \quad f \cdot \sin\varphi = \dot{r} \cdot L. \qquad (4)$$

Переносим в первом уравнении α в левую часть и, разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{f \sin\varphi}{\alpha + f\cos\varphi}; \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f \sin\varphi\, d\varphi}{\alpha + f\cos\varphi};$$

$$\ln r\Big|_{r_0}^{r} = -\ln(\alpha + f\cos\varphi)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi}.$$

Таким образом, для траектории движения получаем известное уравнение кривой второго порядка в полярных координатах.

$$r = \frac{r_0(1 + e\cdot\cos\varphi_0)}{1 + e\cdot\cos\varphi}.$$

Если отсчет угла производить от линии апсид, в этом случае $r_0 = r_{\min}$, и, как будет показано ниже,

$$r = \frac{p}{1 + e\cdot\cos\varphi},$$

где $p = \dfrac{L^2}{\alpha\cdot m}$, $e = \dfrac{F_5}{F_1} = \dfrac{f}{\alpha}$ – эксцентриситет траектории, определяемый отношением суммарной результирующей силы к силе притяжения.

Отсюда имеем известные условия для траекторий движения:

- эллиптического – $F_5 < F_1$ ($f < \alpha$, $e < 1$);
- гиперболического – $F_5 > F_1$ ($f > \alpha$, $e > 1$);
- параболического – $F_5 = F_1$ ($f = \alpha$, $e = 1$).

Для определения положения орбиты в её плоскости, т. е. для определения углового расстояния от перицентра до начального радиус-вектора r_0, можно использовать формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{F_3}{F_4} = \frac{\dot{r}_0 \cdot L}{L^2 / mr_0 - \alpha}.$$

отсюда $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{\dot{r}_0 \cdot L}{L^2 / mr_0 - \alpha}$.

Четверть, в которой лежит r_0, зависит от знаков, которые имеют F_3 и F_4. Знаки по четвертям, которые принимает F_3, равны (+,+,–,–), для F_4 – (+,–,–,+).

Если рассматривать замкнутое (эллиптическое движение) по четвертям, то с точки зрения рассматриваемых здесь сил ситуация выглядит следующим образом. В первой и четвертой четвертях силы инерции являются преобладающими и препятствуют падению тела на силовой центр. Во второй и третьей четвертях преобладающее воздействие оказывает сила притяжения.

Параметр p определяет расстояние и точку на траектории, в которой радиальная составляющая силы $F_4 = 0$, т. е. сила притяжения и центробежная сила инерции уравновешивают друг друга.

Используя условие (2), можно получить уравнение движения тела в декартовой системе координат. Записав (2) в проекциях на координатные оси x,y, после необходимых преобразований получим уравнение кривой второго порядка в декартовой системе координат с центром в фокусе, которое имеет следующий вид:

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{ap} = 1, \qquad (5)$$

где $a = p/(e^2 - 1)$.

Действительно, при $e < 1$ слева в ур. (5) будет сумма квадратов – и это есть уравнение эллипса.

При $e > 1$ остается разность квадратов – уравнение гиперболы.

При $e = 1$, после подстановки этого значения и соответствующих преобразований, выражение (5) переходит в уравнение параболы:

$$y^2 = -(2px - p^2).$$

Это показывает, что уравнение (2) является инвариантным по отношению к повороту координат.

II. Зависимость $r(t)$ также определяется из уравнений (4). Чтобы избавиться от φ, возведем эти уравнения в квадрат, сложим их и получим следующее выражение

$$dt = \frac{mLr\,dr}{\sqrt{m^2(f^2 - \alpha^2)r^2 + 2\alpha mL^2 r - L^4}}. \qquad (6)$$

Здесь также использовано выражение для $L = mr^2\dot{\varphi}$.

Разрешенные и граничные значения, которые может принимать радиус, и интеграл этого выражения зависит от знака величины $(f^2 - \alpha^2)$.

1. $f < \alpha$ ($e < 1$) – имеем эллиптическое движение.

Действительно, дискриминант квадратного трехчлена в (6) всегда положителен (либо равен нулю),

$$D = 4m^2 f^2 L^4$$

и r может принимать значения в пределах от $r_{\min}$ до $r_{\max}$, которые, как следует из (6), равны:

$$r_{\min} = \frac{L^2}{m(f + \alpha)} = \frac{p}{1 + e}; \quad r_{\max} = \frac{L^2}{m(\alpha - f)} = \frac{p}{1 - e}.$$

Выделяя в (6) полный квадрат под знаком радикала, получим:

$$dt = \sqrt{\frac{am}{\alpha}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}},$$

где $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.

Введем новую переменную $U = (r - a)/ae$,

$$dt = a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \cdot \frac{(eU + 1)\,dU}{\sqrt{1 - U^2}}.$$

Интегрирование этого выражения окончательно дает:

$$t = a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}(\arcsin U - e\sqrt{1-U^2})\Bigg|_{U_0}^{U}. \quad (7)$$

Безразмерный параметр U изменяется в пределах от –1 до +1.

Выполняя интегрирование от $r_{\min}$ до $r_{\max}$ из (7), получим выражение для периода обращения (третий закон Кеплера):

$$T = a^{3/2}2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}.$$

Для вычисления $r(t)$ можно также использовать разложение (7) в ряды по степеням U.

2. $f>\alpha$ ($e>1$) в этом случае, как следует из (6), r может изменяться от $r_{\min}$ до ∞ (гиперболическое движение).

При этом $r_{\min} = \dfrac{L^2}{m(f+\alpha)} = \dfrac{p}{e+1}$.

Выделяя полный квадрат в (6), оно приводится к виду:

$$dt = \sqrt{\frac{a'm}{\alpha}}\cdot\frac{r\,dr}{\sqrt{(r+a')^2 - a'^2e^2}}, \text{ где } a' = \frac{p}{e^2-1}. \quad (8)$$

Используем также новую переменную $U'=(r+a')/a'e$, подстановка которой в (8) дает следующую зависимость:

$$t = a'^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}[e\sqrt{U'^2-1} - \ln\left|U' + \sqrt{U'^2-1}\right|]\Bigg|_{U'_0}^{U'}. \quad (9)$$

3. Для параболического движения (когда e=1) интегрирование уравнения (6) дает следующее выражение:

$$t = \frac{p^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}(U''+1)\sqrt{2U''-1}\Bigg|_{U''_0}^{U''} \quad \text{где } U'' = r/p. \quad (10)$$

Общим для уравнений (7), (9), (10) является то, что время движения пропорционально характеристическому параметру орбиты в степени 3/2.

III. Аналогичный метод расчета можно использовать для решения задачи при движении двух тел вокруг общего центра масс.

Если два тела массой m_1 и m_2 на расстоянии r взаимодействуют между собой с силой $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\alpha\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Используя условие ($m_1\cdot\boldsymbol{r}_1+m_2\cdot\boldsymbol{r}_2=0$), и рассматривая движение тела 1 относительно центра масс, можно силу $\boldsymbol{F}$ заменить на эквивалентную силу $\boldsymbol{F}_1$, действующую на него из центра масс ($\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}$).

$$\boldsymbol{F}_1 = -G\frac{\mu_1\cdot m_1\cdot\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}, \text{ где } \mu_1 = m_2^3/(m_1+m_2)^2.$$

Аналогично силу $\boldsymbol{F}$, действующую на тело 2, заменяем эквивалентной силой $\boldsymbol{F}_2$, также действующей на него из центра масс ($\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$).

$$\boldsymbol{F}_2 = -G\frac{\mu_2\cdot m_2\cdot\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}, \text{ где } \mu_2 = m_1^3/(m_1+m_2)^2.$$

Таким образом, зная силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ и начальные условия ($\boldsymbol{r}_{10}$, $\boldsymbol{v}_{10}$, $\boldsymbol{r}_{20}$, $\boldsymbol{v}_{20}$), можно решить задачу для каждого тела по приведенному выше способу.

Рассматриваемый в задаче метод решения относится к описанию невозмущенного кеплеровского движения, т. е., зная начальные условия и определив вектор $\boldsymbol{f}$, можно получить решение задачи [1]. К тому же в каждый момент времени будет известна результирующая сила $\boldsymbol{F}_5=\boldsymbol{f}/r^2$. В этом случае можно попытаться решать задачу возмущенного движения следующим образом.

Разбивая траекторию движения на малые участки, в пределах которых возмущающую силу можно считать постоянной и, добавляя её к результирующей силе $\boldsymbol{f}/r^2$, можем таким образом вводить поправки на изменение вектора $\boldsymbol{f}$. Исходя из новых значений вектора $\boldsymbol{f}$, рассчитываем (в пределах малого участка) новые параметры траектории движения тела.

Предлагаемый способ требует, конечно, более детальной расчетной и экспериментальной проверки.

Силы инерции в форме (3) не являются в принятом понимании д'аламберовыми силами инерции, и принцип Д'Аламбера выполняется для них только при условии f=0. Их введение может быть оправдано тем, что в такой форме они легко определяются (зная значение скорости тела $\boldsymbol{v}$) относительно любой точки пространства. Это может оказаться удобным для решения ряда задач с использованием силовых векторных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
2. Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980. – 330 с.

Поступила 23.05.2007 г.