

УДК 621.833

## ЭЛЕМЕНТЫ РАСЧЁТА ЖЕСТКОСТИ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

В.С. Янгулов, А.Е. Беляев\*

Томский политехнический университет  
E-mail: dtps@lcg.tpu.ru

\*Новоуральский государственный технологический институт  
E-mail: Arnold@NPI.Novouralsk.ru

*Рассмотрены особенности конструкции основных деталей волновых передач с промежуточными телами качения, представлены зависимости для расчёта их деформаций. Разработана методика по определению деформаций в зонах контакта тел качения с деталями передачи. Предложен алгоритм расчёта жесткости передачи с учётом её особенностей. Представлены результаты расчёта жесткости кинематической цепи и пути её повышения.*

### Ключевые слова:

Волновые передачи с промежуточными телами качения, деформации, жесткость, податливость.

Жесткость кинематической цепи зубчатых передач, во многом, определяет качество приводов, в состав редуктора которых они входят. Прежде всего, это относится к точности исполнения перемещений от двигателя к управляемому объекту. Жесткость и мёртвый ход зубчатых передач – основные составляющие точности редуктора приводов.

Волновые передачи с промежуточными телами качения (ВППТК) находят применение в редукторах приводов различного назначения. Диапазон их использования от маломощных приводов (от долей Вт) до мощных приводов (сотни кВт и более) в различных по назначению механизмах и устройствах. Подтверждением этому являются материалы [1-3]. Основные достоинства ВППТК – многопарность зацепления и высокая твердость рабочих поверхностей, что обеспечивает высокие показатели по точности при ресурсе 20 лет и более. Результаты исследований механических передач с промежуточными телами качения [4, 5], разновидностью которых являются и волновые, также подтверждают перспективность использования тел качения.

Основой рассматриваемых передач является конструкция, представленная на рис. 1. Генератор волн, эксцентрик – 3, вращаясь, вызывает радиальные перемещения шариков – 4 в пазах обоймы

– 2. Шарики – 4 контактируют с поверхностями зубьев жесткого колеса – 1. Разность числа шариков и зубьев жесткого колеса обеспечивает редукцию передачи. Выходным звеном могут быть обойма с шариками или жесткое колесо при фиксации одного из них относительно корпуса.

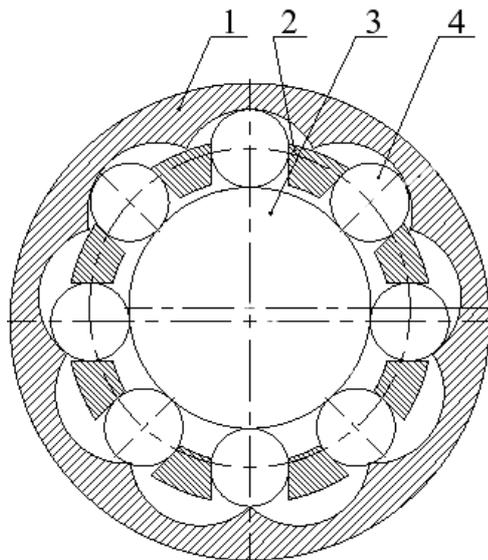


Рис. 1. Волновая передача с промежуточными телами качения

Наличие эксцентричной детали в передаче приводит к дисбалансу, что может послужить источником колебаний в кинематической цепи. Для компенсации дисбаланса чаще всего применяют два ряда тел качения, которые контактируют с двумя диаметрально расположенными эксцентриками. Реже используются три ряда тел качения.

На рис. 2 представлена схема ВППТК с двумя рядами тел качения при нагружении выходного вала – 2 моментом  $T$  и с жестко закрепленным входным валом – 1. Для примера, выходным валом примем обойму, в пазах которой размещены ролики – 4. Жесткое колесо – 3, общее для обоих рядов роликов, жестко крепится к корпусу передачи. Узлы крепления входного и выходного валов и жесткого колеса не входят в схему для расчёта жесткости. Рассмотрим, начиная с выходного вала, в нашем случае обоймы, основные деформации деталей передачи, которые определяют жесткость.

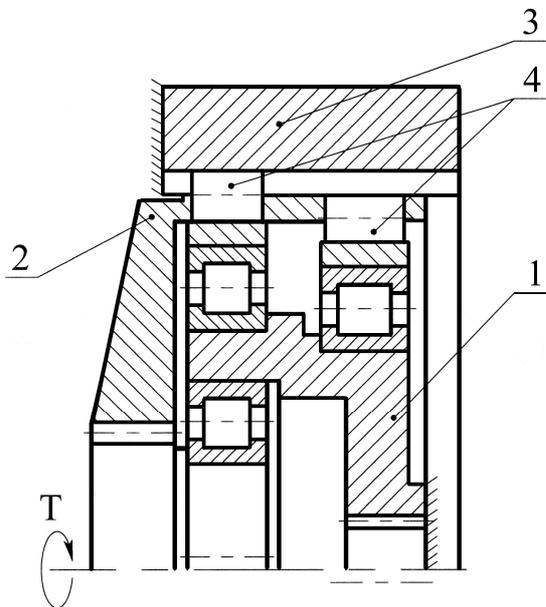


Рис. 2. Схема ВППТК с двумя рядами роликов

Условно можно представить, что обойма выполнена из двух частей: диска и полого цилиндра с двумя рядами пазов. Принимаем, что каждый из двух рядов роликов нагружен по  $0,5T$ . Угол закручивания участка полого цилиндра [6]

$$\varphi = \frac{T l_i}{G J_p},$$

где  $T_i$  – момент в сечении;  $l_i$  – длина участка;  $G$  – модуль сдвига;  $J_p$  – полярный момент сопротивления;  $J_p^c = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$  – для сплошного кольца и

$J_p^n = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$  – для участка с пазами, т. к.

ширину пазов и перемычек между ними, обычно, принимают одинаковыми.

Полагая, что момент в каждом ряду приложен в середине паза, запишем выражение угла закручивания для цилиндрической части обоймы (рис. 3)

$$\varphi_0^n = \frac{T l_1}{G J_p^c} + \frac{T l_2}{G J_p^n} + \frac{0,5 T l_3}{G J_p^n} + \frac{0,5 T l_4}{G J_p^c} + \frac{0,5 T l_5}{G J_p^n}.$$

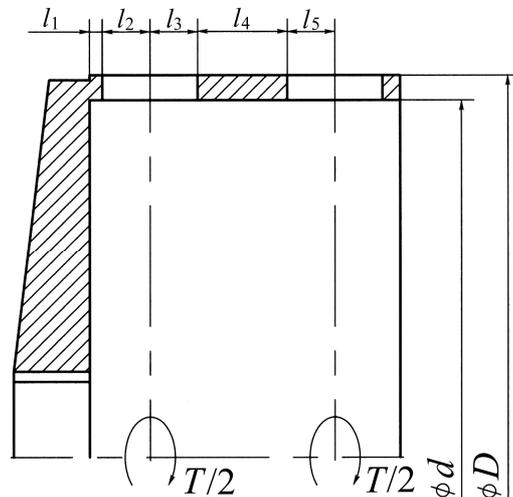


Рис. 3. Схема для расчёта угла закручивания цилиндрической части обоймы

Для передач с одним или с тремя рядами тел качения также можно выразить угол закручивания обоймы по этой методике.

Другую часть обоймы примем в виде диска с переменной толщиной. Его деформация обусловлена сдвигом цилиндрических кольцевых слоёв. На рис. 4 показано сечение диска.

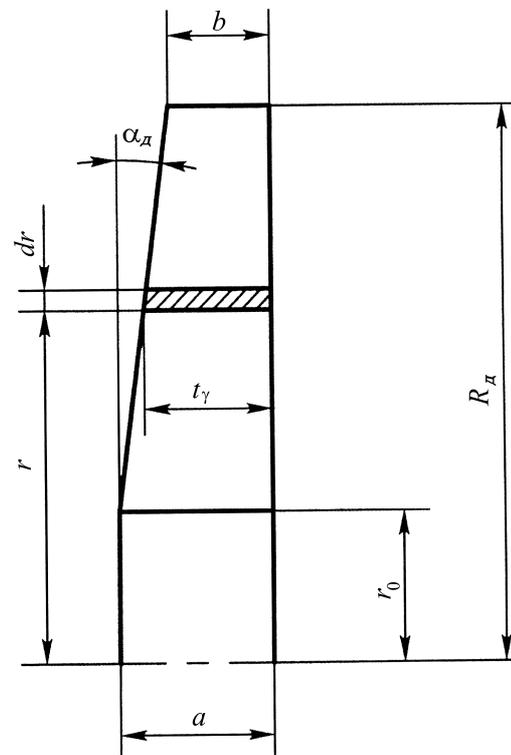


Рис. 4. Схема для расчёта дисковой части обоймы

Рассмотрим кольцо радиуса  $r$  и толщиной  $dr$ , элементарный угол закручивания в этом кольце составит

$$d\varphi_0^a = \frac{\gamma dr}{r},$$

где  $\gamma = \tau/G$  – относительный сдвиг;  $\tau = T/2\pi r^2 t_\tau$  – касательные напряжения;  $t_\tau = a - (r - r_0) \operatorname{tg} \alpha_d$  – толщина кольца диска;  $\operatorname{tg} \alpha_d = (a - b)/(R_d - r_0)$ .

Угол поворота внутреннего слоя диска ( $r_0$ ), относительно наружного ( $R_d$ ), определится из

$$\varphi_0^a = \frac{T}{G} \int_{r_0}^{R_d} \frac{dr}{r^3(1 - \beta r)} = \left( -\frac{1}{2r^2} - \frac{\beta}{r} + \beta^2 \ln \frac{r}{1 - \beta r} \right)_{r_0}^{R_d},$$

где  $\beta$  – определяется исходя из действительных размеров диска.

Суммарный угол закручивания обоймы  $\varphi_0 = \varphi_0^u + \varphi_0^a$ .

Жесткость обоймы –  $C_0 = T/\varphi_0$ , податливость, величина, характеризующая угол закручивания под действием удельной нагрузки –  $\delta_0 = \varphi_0/T$ .

Используя результаты исследований жесткости зубчатых передач [7, 8], можно сделать вывод, что деформацию жесткого колеса ВППТК упрощенно можно представить в виде следующего выражения

$$W_\Sigma = W_n + W_{oc} + W_{ob} + W_k,$$

где  $W_n$  – деформация от изгиба зуба;  $W_{oc}$  – «осадка» основания зуба;  $W_{ob}$  – деформация обода колеса;  $W_k$  – контактная деформация в зоне взаимодействия с роликом.

Оценим значение каждой из составляющих и их удельный вклад в суммарную величину деформации жесткого колеса, используя результаты работы [7].

При исследовании изгибной податливости зубьев роликового зацепления использовалась задача теории упругости о бесконечном клине с наложенными на него граничными условиями. Форма зуба жесткого колеса ВППТК и зуба роликовой передачи зависят от размера (диаметра) ролика. Изгибная податливость зуба роликовой передачи, полученная в результате расчетов, уменьшается при уменьшении угла возвышения точки контакта ролика с зубом и увеличении приведенного радиуса кривизны зуба и практически не зависит от числа зубьев. Удельный вклад деформации от изгиба зуба роликовой передачи составляет не более 10 % от контактной деформации в зоне взаимодействия зуба с роликом при значении угла возвышения точки контакта 75°. При угле возвышения точки контакта не более 45° удельный вклад деформации от изгиба зуба не превышает 3 %.

Проводя сравнительный анализ формы зуба волновой передачи с роликами (шариками) и зуба роликовой передачи, можно отметить следующее: в первой передаче угол  $\alpha$ , который является углом передачи движения профилю, аналогичен углу возвышения точки контакта во второй передаче и, как правило, не превышает 45°; приведенный ради-

ус кривизны профиля зуба в первой передаче существенно больше радиуса ролика, во второй он превышает радиус ролика на величину зазора между роликом и профилем.

Учитывая вышесказанное, можно предположить, что  $W_n$  не оказывает существенного влияния на суммарную деформацию жесткого колеса и её удельный вклад не превысит 3 %. Тем более, что отклонение расчётных и экспериментальных значений деформаций составило 23 % [7]. Исходя из этого, на этапе предварительных оценок основных параметров ВППТК можно пренебречь расчётом  $W_n$ .

Величина  $W_{oc}$  также не оказывает существенно влияния на суммарную деформацию жесткого колеса, что доказано в работах [7, 8], поэтому её расчётом можно пренебречь.

Деформацию обода  $W_{ob}$  можно определить по выше приведённой методике для полого цилиндра.

Теоретические и экспериментальные исследования, проведённые для механических роликовых передач [7], показали, что наибольший вклад в деформацию жестких колёс вносит контактная деформация –  $W_k$ . Она достигает 90 % и более от общей деформации жесткого колеса.

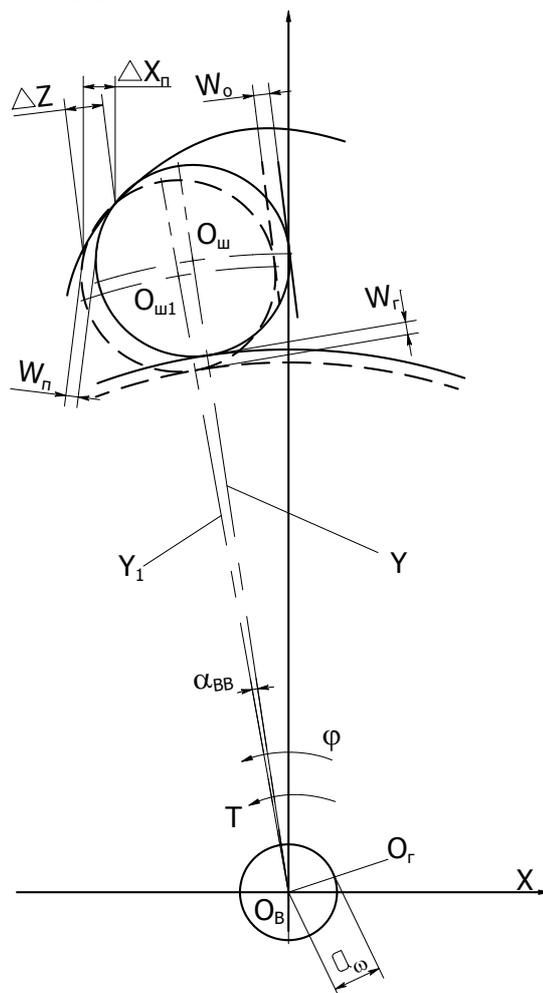


Рис. 5. Схема для расчёта угла закручивания выходного вала ВППТК

Особенностью ВППТК является то, что тела качения одновременно находятся в контакте с тремя звеньями: генератором, обоймой и жестким колесом. На рис. 5 схема поперечного сечения передачи для определения угла закручивания выходного вала  $\alpha_{\text{вв}}$  от деформаций в зонах контакта ролика. При приложении момента  $T$  центр ролика  $O_{\text{ш}}$  переместится и займёт положение с центром  $O_{\text{ш1}}$  за счёт деформаций в контакте с генератором –  $W_i$ ; с обоймой –  $W_o$ ; с профилем жесткого колеса –  $W_r$ . Используя результаты работы [9], проведём анализ влияния деформаций в зонах контакта ролика на угол закручивания выходного вала.

$$\alpha_{\text{вв}} = \alpha_{\text{вв}}^{\text{n}} + \alpha_{\text{вв}}^{\text{o}},$$

где  $\alpha_{\text{вв}}^{\text{n}} = \arctg \Delta Z / Y_1$ ;  $\Delta Z = \Delta X_n / \cos(\varphi / u)$ ;  $\alpha_{\text{вв}}^{\text{o}} = \arctg W_o / Y_1$ ;  $Y_1$  и  $Y_2$  – расстояния от центра ролика  $O_{\text{ш}}$  до центра зубчатого венца жесткого колеса  $O_{\text{г}}$  до и после деформации;  $\Delta X_n$  – изменение координаты профиля зуба в контакте с роликом до и после деформации;  $\varphi$  – текущий угол поворота входного звена;  $u$  – число зубьев.

$$Y = a_o \cos \varphi + \sqrt{R_{\Sigma}^2 - a_o^2 \sin^2 \varphi};$$

$$Y_1 = (a_o - W_r^{\text{n}}) \cos \varphi + \sqrt{(R_{\Sigma} - W_r^{\text{n}})^2 - (a_o - W_r^{\text{n}})^2 \sin^2 \varphi},$$

где  $\alpha_o$  – эксцентриситет генератора;  $W_r^{\text{n}}$  – деформация подшипника генератора;  $R_{\Sigma} = 0,5(D_r + D_{\text{ш}})$  – отрезок, соединяющий центры ролика  $O_{\text{ш}}$  и эксцентрика  $O_r$ , где  $D_r$ ,  $D_{\text{ш}}$  – диаметры генератора и ролика.

$$\Delta X_n = X_n + X_{\text{нд}},$$

где  $X_n = Y \sin \frac{\varphi}{u} + 0,5 D_{\text{ш}} \sin \left( \alpha + \frac{\varphi}{u} \right)$  – координата профиля в контакте с роликом до деформации;

$X_{\text{нд}} = Y_1 \sin \frac{\varphi}{u} + (0,5 D_{\text{ш}} - W_r^{\text{n}}) \sin \left( \alpha + \frac{\varphi}{u} \right)$  – после деформации.

Деформации или сближение центра ролика с генератором и профилем жесткого колеса (рис. 6) можно определить по следующей зависимости [10]

$$W_i^{\text{p}} = 0,579 \frac{q_i}{E} \left( \ln \frac{2 D_{\text{ш}} \rho_i}{b_i^2} + 0,814 \right),$$

где  $q_i = R_i / l_p$  – удельная нагрузка;  $R_i$  – нагрузка в зоне контакта;  $l_p$  – длина ролика;  $E$  – модуль упругости;  $\rho_i$  – приведённый радиус кривизны контактирующей с роликом поверхности;  $b_i = 1,522 \sqrt{\frac{q_i}{E} \frac{0,5 D_{\text{ш}} \rho_i}{\rho_i \pm 0,5 D_{\text{ш}}}}$  –

половина ширины площадки контакта [11], знак «минус» берётся если одна из поверхностей вогнутая.

В контактах ролика происходит и деформация смежных с ним деталей. Для их оценки применим решение задачи о плоской деформации упругого полупространства, нагруженного равномерным давлением на участке шириной  $2b_i$  [11]

$$W_i^{\text{n}} = q_i \frac{1 + \mu}{2\pi E} \left[ 2\pi(1 - 2\mu)(N - \alpha \text{tg} \alpha - \ln \cos \alpha) + \ln(1 + 4N^2) \right],$$

где  $N$  – превышение глубины точек полупространства над шириной площадки контакта  $2b_i$ .

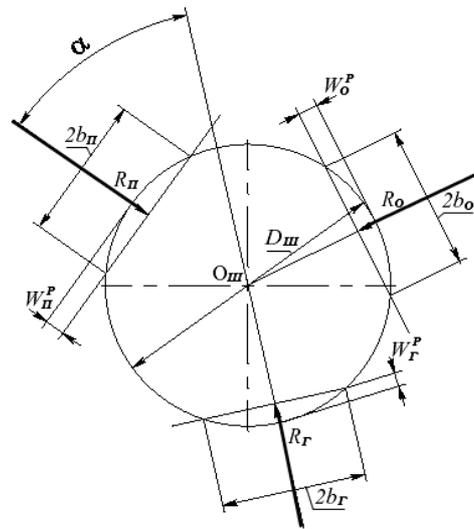


Рис. 6. Схема для определения деформаций ролика в зонах его контактов

При ограничении значения бесконечно удалённых точек полупространства на глубину равную  $40b_i$  ( $N=20$ ), погрешность расчётов не превышает 2 %.

Деформацию ролика в контакте со стенкой паза обоймы оценить по вышеприведённой зависимости затруднительно потому, что приведённый радиус кривизны равен  $\infty$ . Для её оценки воспользуемся формулой Б.С. Ковальского [10]

$$W_o^{\text{p}} = \frac{2(1 - \mu^2)}{\pi E} q_o \left( \ln \frac{D_{\text{ш}}}{b_o} + 0,407 \right),$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $b_o$  – половина ширины площадки контакта ролика со стенкой паза.

Примем, что деформация стенки паза обоймы равна деформации ролика. В этом случае, полное значение в контакте ролика с обоймой будет равно

$$W_o = \frac{4(1 - \mu^2)}{\pi E} q_o \left( \ln \frac{D_{\text{ш}}}{b_o} + 0,407 \right).$$

Проведём оценку деформации подшипника генератора за счёт сближения его колец. При расчётах примем, что равнодействующая сил, действующих на наружное кольцо, –  $P = T / \alpha_o$ . В случае двух рядов роликов передачи и более, она делится поровну на каждый подшипник. Усилие на самый нагруженный ролик или шарик подшипника –  $P_{\text{ш}} = 5P / Z$ , где  $Z$  – число роликов в подшипнике. Используя результаты работы [10], запишем

$$W_r^{\text{n}} = 1,158 \frac{q_n}{E} \left[ \ln \left( 1,727 \frac{E}{q_n} R_{\text{ср}} \right) + 0,814 \right],$$

где  $q_n$  – удельное давление;  $R_{\text{ср}}$  – радиус, проходящий через центры роликов подшипника.

В ВППТК, также как и в классических волновых передачах, присутствует многопарность контактов в зацеплении. Число промежуточных тел качения, находящихся одновременно в зацеплении, может достигать до 35 % от их общего количества в передаче.

В реальных передачах рабочие поверхности деталей имеют отклонения от своих расчётных значений, которые обусловлены погрешностями изготовления и сборки. Вследствие этого в начальный момент работы передачи в контакте находится лишь часть роликов, теоретически находящихся в зацеплении. Даже в одной передаче, при различных положениях входного и выходного валов, будут разные сочетания контактов роликов с зубьями жесткого колеса. Учитывая это, предлагается следующее:

1. Провести расчёт деформаций для случая, когда все ролики теоретически находятся в зацеплении.
2. Определить изменение углового положения выходного вала (жесткости) за счёт деформаций по п. 1.
3. Рассчитать максимальную погрешность изготовления всех рабочих поверхностей деталей, влияющих на зацепление роликов.
4. Найти значение момента нагрузки  $T_1$ , необходимого для создания деформаций одного ролика, достаточных для устранения зазоров, обусловленных погрешностями, рассчитанных по п. 3.
5. Вычислить момент на остальные ролики, теоретически находящиеся в зацеплении ( $T_2 = T - T_1$ ).
6. Продолжить расчёт жесткости для всех роликов в зацеплении при моменте нагрузки  $- T_2$ .

Реальная жесткость в зонах контакта ролика будет между идеальным случаем (п. 1) и наихудшим, т. е. когда в контакте будет до достижения момента нагрузки значения  $T_1$  только один ролик.

Расчёты угловой деформации по п. 1 показывают, что её значение меняется от вершины зуба до впадины. В действительности угловая деформация во всех точках контакта роликов с профилем должна иметь одно и то же значение, т. е. будет перераспределение усилий в зонах контакта. В настоящее время решение задачи по определению действительных величин усилий в контактах роликов, находящихся в зацеплении с жестким колесом, затруднительно. Это связано со сложной формой зуба и недостаточной разработкой задач теории упругости. Поэтому упрощенно представим, что угловая деформация выходного вала, обусловленная деформациями в зо-

нах контакта роликов с зубчатым венцом жесткого колеса, является среднеарифметической величиной для расчётных  $n$  точек профиля зуба

$$\alpha_{\text{вв}}^{\text{пз}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{\text{вви}}^{\text{пз}}}{n}.$$

Расчёт жесткости вала генератора ведётся по приведённым методикам для определения деформаций полого вала, диска и известным методикам [6].

По приведённой выше методике был проведён расчёт жесткости кинематической цепи редуктора, который был разработан для японской компании «Komatsu». Основным направлением её деятельности является разработка и выпуск строительной и дорожной техники. Основные параметры и размеры редуктора: момент нагрузки на выходном валу  $- T = 4375$  Н·м; число рядов роликов  $- 2$ ; количество роликов в каждом ряду  $- 25$ ; размеры роликов передачи  $- \varnothing 12 \times 12$ ; эксцентриситет генератора  $- \alpha_0 = 3$  мм; размеры роликового подшипника генератора  $- \varnothing 150 \times \varnothing 110 \times 20$ . Угол закручивания выходного вала  $- \alpha_{\text{вв}} = 9,294 \cdot 10^{-3}$  рад.; жесткость  $- C_{\text{вв}} = 4,707 \cdot 10^7$  Н·м/рад.; податливость  $- \delta_{\text{вв}} = 2,124 \cdot 10^{-6}$  рад./Н·м.

Т. к. редуктор предназначался для замены планетарного в механизме поворота экскаватора, то его присоединительные размеры соответствовали существующим на тот момент, включая и размеры выходного вала. Угол закручивания собственно выходного вала, без учёта деформаций в передаче, рассчитанный по приведённой методике, составил  $- 3,52 \cdot 10^{-3}$  рад.

Очевидно, что жесткость кинематической цепи данного редуктора определяется в основном жесткостью выходного вала, поэтому перспективным направлением повышения жесткости, является модульное построение кинематической цепи редуктора [1]. В этом случае исчезают промежуточные звенья между передачами внутри редуктора, а выходной вал крепится на исполнительном механизме без дополнительных звеньев или устанавливается на специальных опорах, что обеспечивает отсутствие в конструкции выходного вала участков с уменьшенными радиальными размерами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янгулов В.С. Прецизионный редуктор повышенной долговечности // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 2. – С. 18–23.
2. Янгулов В.С., Дмитриев В.С., Гладышев Г.Н., Лянзбург В.П. Малогабаритный редуктор повышенной точности и долговечности // Военная техника, вооружение и современные технологии при создании продукции военного и гражданского назначения: IV Междунар. технолог. конгресс. – Омск, 2007. – Ч. 2. – С. 240–243.
3. Лихачев В. Волновая передача с промежуточными звеньями. Машиностроительная компания [Электронный ресурс]: Статья. – 2001. – Режим доступа: <http://sodicom.ru/publications/articles/article5>.
4. Беляев А.Е. Механические передачи с промежуточными телами повышенной точности и долговечности. – Томск: ТПИ, 1986. – 60 с.
5. Беляев А.Е. Механические передачи с шариковыми промежуточными телами. – Томск: ТПИ, 1992. – 231 с.
6. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1964. – 539 с.
7. Беляев А.Е. Механические роликовые передачи. – Новоуральск: НПИ, 1994. – 120 с.
8. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д. Податливость обода эпицикла планетарного редуктора // Известия вузов. Машиностроение. – 1967. – № 1. – С. 60–66.
9. Янгулов В.С. Геометрические и конструктивные соотношения в волновых передачах с промежуточными телами качения // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 312. – № 2. – С. 24–27.
10. Пономарёв С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1958. – Т. 2. – 974 с.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Поступила 29.09.2008 г.