Математика и механика
Физика

УДК 514.76

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_m В АФФИННОЕ A_n ($m<n$)

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: lutchinin@mail.ru

Рассматривается дифференцируемое отображение $V_m^n:E_m\to A_n$ ($m<n$) евклидова пространства E_m в аффинное пространство A_n. Изучаются поля двумерных площадок в E_m и A_n, определяемые компонентами фундаментального геометрического объекта отображения V_m^n в смысле Г.Ф. Лаптева.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, многомерные пространства, линейные подпространства.

Введение

Как известно в [1–6] особое место занимает статья Г.Ф. Лаптева [1], в которой с помощью фундаментального геометрического объекта строится инвариантная теория дифференцируемых отображений.

В данной статье изучается инъективное дифференцируемое отображение $V_m^n:E_m\to A_n$ ($m<n$) евклидова пространства E_m в аффинное A_n. Показывается, что это отображение сводится к биективному отображению $V_m^m:E_m\to L_m$ ($m<n$), где L_m – касательная плоскость к m-поверхности S_m, текущими точками которой являются образы точек пространства E_m при отображении V_m^n. С помощью компонент фундаментального геометрического объекта аналитически и геометрически рассматриваются отображения V_m^n поля двумерных площадок $\Gamma_2^1\subset E_m$ и $L_2^1=V_m^m\Gamma_2^1\subset L_m\subset A_n$.

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а все функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–12].

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается m-мерное евклидово пространство E_m, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R^*=\{\overline{B},\overline{\varepsilon}_a\}$, ($a,b,c=1,m$) с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\overline{B} = \Theta^a \overline{\varepsilon}_a,\ d\overline{\varepsilon}_a = \Theta_a^b \overline{\varepsilon}_b;$$
$$D\Theta^a = \Theta^b \Lambda \Theta_b^a,\ D\Theta_a^b = \Theta_a^c \Lambda \Theta_c^b. \qquad (1.1)$$

Здесь 1-формы Θ_a^b удовлетворяют соотношениям $\Theta_a^b+\Theta_b^a=0$, вытекающим из условий $\langle\overline{\varepsilon}_a,\overline{\varepsilon}_b\rangle=\delta_{ab}$ ортонормальности репера R. Символом $\langle\overline{u},\overline{v}\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ евклидова пространства E_m.

1.2. Рассматривается n-мерное аффинное пространство, отнесенное к подвижному аффинному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_i\}$, ($i,j,k,l=1,n$) с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\overline{A} = \omega^i \overline{e}_i,\ d\overline{e}_i = \omega_i^k \overline{e}_k;$$
$$D\omega^i = \omega^j \Lambda \omega_j^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \Lambda \omega_j^k. \qquad (1.2)$$

1.3. Репер $\overset{*}{R}$ в E_m и репер R в A_n выбираем так, чтобы точки B и A с радиус-векторами $\overline{B}$ и $\overline{A}$ были текущими точками пространств E_m и A_n, соответственно, тогда 1-формы Θ^a и ω^i в силу (1.1) и (1.2) являются главными и их можно считать базисными.

Зададим отображение

$$V_m^n : E_m \to A_n, \qquad (1.3)$$

которое каждой точке $B\in E_m$ сопоставляет вполне определенную точку $A\in A_n$, тогда дифференциальные уравнения этого отображения запишутся в виде

$$\omega^i = A^i_a \Theta^a. \qquad (1.4)$$

Здесь в силу (1.1) и (1.2) величины A^i_a удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA^i_a + A^j_a\omega^i_j - A^i_b\Theta^b_a = A^i_{ab}\Theta^b;\ A^i_{[ab]} = 0 \qquad (1.5)$$

и образуют фундаментальный геометрический объект

$$\Gamma = \{A^i_a\} \qquad (1.6)$$

отображения (1.3) в смысле Г.Ф. Лаптева [1].

Замечание 1. В дальнейшем будет решаться задача об инвариантном нахождении двумерных площадок $\Gamma^1_2\subset E_m$ и $L^1_2\subset A_n$, проходящих через соответствующие точки $B\in E_m$ и $A\in A_n$ и определяемых аналитически с помощью величин, охватываемых компонентами геометрического объекта (1.6).

2. Инъективное отображение V^n_m ($m<n$)

2.1. Кривую k_u в пространстве E_m, описываемую точкой $B\in E_m$, будем задавать параметрическими дифференциальными уравнениями

$$k_u: \Theta^a = u^a\Theta,\ D\Theta = \Theta\Lambda\Theta_1. \qquad (2.1)$$

Здесь величины u^a при фиксированных первичных параметрах, т. е. при $\Theta^a=0$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta u^a + u^b \overset{0}{\Theta}{}^a_b = 0;\ \overset{0}{\Theta}{}^b_a = \Theta^b_a(\delta) = \Theta^b_a\Big|_{\Theta^a=0},$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам.

Из (1.1) следует, что прямая

$$u = (\bar B, \bar\varepsilon_a)u^a \qquad (2.2)$$

является касательной к кривой k_u в точке $B\in E_m$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что смещение в направлении (2.2) (или в направлении u) будет означать смещение по кривой (2.1) (или по кривой k_u).

Заметим, что образом кривой (1.4) при отображении (1.3) будет кривая в A_n:

$$\overset{*}{k}_v: \omega^i = t^i\Theta, v^i = A^i_a u^a. \qquad (2.3)$$

Касательной к кривой (2.3), описываемой точкой $A\in A_n$, будет прямая в A_n:

$$t = (\bar A, \bar e_i)t^i, \qquad (2.4)$$

являющаяся в силу (2.3) образом прямой (2.2) при отображении $V^n_m: E_m\to A_n$.

2.2. Будем предполагать, что отображение $V^n_m:E_m\to A_n$ является инъективным, т. е. $m<n$. Тогда из (1.1) и (1.2) с учетом (1.4), (2.1) и (2.3) следует, что, когда точка B проходит все пространство E_m, ее образ $A=V^n_m B$ в аффинном пространстве A_n описывает m-поверхность S_m с касательной m-плоскостью L_m. Проведем такую канонизацию аффинного репера в A_n, при которой

$$L_m = (\bar A, \bar e_1, \bar e_2, ..., \bar e_m). \qquad (2.5)$$

Здесь и в дальнейшем символ $H_s(\bar X, \bar x_1, \bar x_2, ..., \bar x_s)$ обозначает s-плоскость в A_n, проходящую через точку X параллельно линейно независимым векторам $x_1,...,\bar x_s$ пространства A_n. Учитывая (2.5) и (1.2), получаем, что дифференциальные уравнения m-поверхности E_m в A_n имеют вид:

$$\omega^{\hat\alpha} = 0 \overset{(1.4)}{\Rightarrow} A^{\hat\alpha}_a = 0,$$

$$(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,m}; \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma = \overline{m+1,n}). \qquad (2.6)$$

Из (2.6) с учетом (1.4) получаем, что дифференциальные уравнения отображения $V^n_m:E_m\to A_n$, сводящегося к отображению $V^m_m: E_m\to A_n$ принимают вид:

$$\omega^\alpha = A^\alpha_a\Theta^a,\quad \omega^{\hat\alpha}=0, \qquad (2.7)$$

что в силу (1.5) и (1.1) приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\Theta^a = B^a_\beta\omega^\beta, \omega^{\hat\alpha}_\alpha = A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\omega^\beta;$$

$$dA^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} - A^{\hat\alpha}_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - A^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta + A^{\hat\beta}_{\alpha\beta}\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta} = A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma,$$

$$A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta\gamma]}=0, A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta]}=0. \qquad (2.8)$$

Здесь

$$A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} = A^{\hat\alpha}_{ba}B^a_\beta B^b_\alpha, B^a_\beta A^\alpha_a = \delta^\alpha_\beta, B^a_\gamma A^\gamma_b = \delta^a_b,$$

$$\det[A^\alpha_a]\ne 0, (\alpha,\beta,\gamma,a,b=\overline{1,m}), \qquad (2.9)$$

т. е. отображение $V^m_m:E_m\to A_n$ предполагается невырожденным. Поэтому существует обратное отображение

$$\overset{*}{V}{}^m_m: L_m\to E_m \Leftrightarrow \Theta^a = B^a_\beta\omega^\beta \Leftrightarrow u^a = B^a_\beta x^\beta. \qquad (2.10)$$

2.3. Рассмотрим в точке B пространства E_m две прямые

$$u = (\bar B, \varepsilon_a)u^a,\quad v = (\bar B, \bar\varepsilon_b)v^b. \qquad (2.11)$$

Образами этих прямых при отображении $V^n_m:E_m\to A_n$ будут в силу (2.7) прямые

$$x = (\bar A, \bar e_\alpha)x^\alpha = (\bar A,\bar e_\alpha)A^\alpha_a u^a;$$

$$y = (\bar A,\bar e_\beta)y^\beta = (\bar A,\bar e_\beta)A^\beta_b u^b. \qquad (2.12)$$

Скалярное произведение направляющих векторов $\bar u = u^a\bar\varepsilon_a$ и $\bar v = v^b\bar\varepsilon_b$ имеет вид

$$\langle\bar u,\bar v\rangle = u^1v^1+u^2v^2+...+u^mv^m. \qquad (2.13)$$

Из (2.7)–(2.12) следует, что для билинейной симметрической формы

$$B(x,y)\equiv B_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,\quad B_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^n B^a_\alpha B^a_\beta \qquad (2.14)$$

в точке A скалярное произведение (2.13) является прообразом при отображении $V^n_m:E_m\to A_n$. Из (2.8) и (2.14) с учетом (2.9) следует, что величины $B_{\alpha\beta}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB_{\alpha\beta} - B_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - B_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta = B_{\alpha\beta a}\Theta^a = B_{\alpha\beta a}B^a_\beta\omega^\beta. \qquad (2.15)$$

Поэтому

$$B(x,y)=0\Leftrightarrow\langle\bar u,\bar v\rangle = 0. \qquad (2.16)$$

Из (2.13)–(2.16) следует, что в точке $A\in A_n$, являющейся образом точки $B\in E_m$ при отображении $V_m^m:E_m\to A_n$, в L_m определен $(m-1)$-мерный конус $B_{m-1}^2\in A$ второго порядка (в общем случае невырожденный), заданный следующими уравнениями:

$$B_{m-1}^2: B_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0, x^{\hat\alpha}=0, \det[B_{\alpha\beta}]\neq 0, \qquad (2.17)$$

причем

$$B_{m-1}^2=\{x=L_m\,|B(x,x)=0\}. \qquad (2.18)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. С отображением $V_m^n:E_m\to A_n$ $(m<n)$ в аффинном пространстве A_n ассоциируется m-поверхность S_m с касательной m-плоскостью L_m в точке $A\in S_m$ с инвариантно определенным полем конусов $B_{m-1}^2\subset L_m$ с вершинами в текущей точке A

3. Поле гиперплоскостей $L_{n-1}\supset L_m$

3.1. Поле $(m+1)$-плоскостей $L_{n-1}\supset L_m$.

Точке $B\in E_m$ сопоставим в соответствующей точке $A\in L_m\subset A_n$ гиперплоскость $L_{n-1}(x)\subset A_n$, проходящую через L_m:

$$L_{n-1}(x): x_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}=0. \qquad (3.1)$$

Из (1.2) в силу (2.8) и (2.5) заключаем, что множество всех прямых (2.3) – образов соответствующих прямых (2.2) при отображении V_m^n – вдоль которых L_m и бесконечно близкая L_m' к ней принадлежат гиперплоскости (3.1), образует конус $q_{m-1}^2(L_{n-1}(x))\subset L_m$ с вершиной $A\in S_m$, определяемый уравнениями:

$$q_{m-1}^2(L_{n-1}(x)): x_{\hat\alpha}A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}x^\alpha x^\beta=0, \quad x^{\hat\alpha}=0. \qquad (3.2)$$

Все гиперплоскости $L_{n-1}(x)$, которым отвечают конусы $q_{m-1}^2(L_{n-1}(x))$, аполярные конусу $B_{m-1}^2\subset L_m$, в силу (2.17) и (3.2) пересекаются по $(m+1)$-плоскости

$$L_{m+1}=(L_m,\bar e_{\hat\alpha})\Lambda^{\hat\alpha}. \qquad (3.3)$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat\alpha}$ определяются по формулам

$$\Lambda^{\hat\alpha}=A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}B^{\alpha\beta}, B^{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}=\delta_\gamma^\alpha \qquad (3.4)$$

и в силу (2.15), (2.17) и (2.8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$d\Lambda^{\hat\alpha}+\Lambda^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha}=\Lambda_a^{\hat\alpha}\Theta^a=A_a^{\hat\alpha}B_\alpha^a\omega^\alpha. \qquad (3.5)$$

3.2. Поле фокальных гиперконусов T_{n-1}^m в A_n.

Обозначим T_{n-1}^m – множество всех гиперплоскостей (3.1), которым отвечают вырожденные конусы $q_{m-1}^2(L_{n-1}(x))$ второго порядка, по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящие через точку $A\in S_m\subset A_n$ т. е. $\det[x_{\hat\alpha}A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}]=0$.

Отсюда следует, что множество T_{n-1}^m является гиперконусом класса в A_n с вершиной L_m, определяемым уравнением:

$$T_{n-1}^m: A^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}x_{\hat\alpha_1}x_{\hat\alpha_2}\ldots x_{\hat\alpha_m}=0,$$

$$(\hat\alpha_1,\ldots,\hat\alpha_m=\overline{m+1,n}; m>2, n-m\geq 2, m<n), \qquad (3.6)$$

где симметрические величины $A^{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_m}$ находятся по формулам

$$A^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}=\frac{1}{m!}A_{1[1}^{(\hat\alpha_1}A_{|2|2}^{\hat\alpha_2}\ldots A_{|m|m]}^{\hat\alpha_m)} \qquad (3.7)$$

и в силу (2.8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}-2A^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}\omega_\alpha^\alpha+A^{\hat\alpha\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\alpha_1}+\cdots+$$
$$+A^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_{m-1}\hat\alpha}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\alpha_m}=A_a^{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_m}\Theta^a=A_a^{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_m}B_\beta^a\omega^\beta. \qquad (3.8)$$

$\hat\alpha_1,\hat\alpha_2,\ldots,\hat\alpha_m$, $\hat\alpha=\overline{m+1,n}; \alpha=\overline{1,m}$; (по α суммировать).

Здесь явный вид величин $A_a^{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_m}B_\beta^\alpha$ для нас несущественен.

Заметим, что гиперконус T_{n-1}^m является фокальным в смысле [9] и [10].

3.3. Поле гиперплоскостей $L_{n-1}\subset A_n$.

Из (3.6) и (3.3) следует, что в точке $A\in L_m$, являющейся образом точки $B\in E_m$ при отображении $V_m^n:E_m\to L_m$, $(m+1)$-плоскость L_{m+1} будет линейным полюсом, в смысле [11. С. 1317], гиперплоскости,

$$y_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha}=0 \qquad (3.9)$$

относительно гиперконуса T_{n-1}^m тогда и только тогда, когда $y_{\hat\alpha}$ удовлетворяет системе $n-m$ алгебраических уравнений

$$\varphi^{\hat\alpha}\equiv A^{\hat\alpha\hat\alpha_2\ldots\hat\alpha_m}y_{\hat\alpha_2}\ldots y_{\hat\alpha_m}-\lambda\Lambda^{\hat\alpha}=0, \qquad (3.10)$$

с $n-m+1$ неизвестными $y_{\hat\alpha}$, λ.

Так же, как и в случае системы [11. Ур. (39')], можно показать, что система (3.10) определяет конечное число гиперплоскостей (3.9) указанного типа. Проведем в A_n такую канонизацию аффинного репера R, при которой

$$\Lambda^{m+1}\neq 0, A^{m+1,\ldots,m+1}\neq 0, \Lambda^{\tilde\alpha}=0, A^{n+1,\tilde\alpha,\ldots,\tilde\alpha}=0;$$
$$\det[A^{\tilde\alpha\tilde\beta,m+1,\ldots,m+1}]\neq 0, (\tilde\alpha,\tilde\beta=\overline{m+2,n}). \qquad (3.11)$$

Геометрически это означает, что

$$L_{m+1}=(L_m,\bar e_{m+1})=(\bar A,\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_m,\bar e_{m+1});$$
$$L_{n-1}=(L_m,\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_n)=(\bar A,\bar e_1,\ldots,\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_n). \quad (3.12)$$

Из рассмотрения исключаются случаи, если в точке $A\in S_m$:

1. $\Lambda^{\hat\alpha}=0$, тогда L_{m+1} не определена.
2. $A^{m+1,\ldots,m+1}=0$, тогда $L_{n-1}\in T_{n-1}^m$.
3. $\det[A^{\tilde\alpha,\tilde\beta,m+1,\ldots,m+1}]=0$, тогда L_{n-1} определяется бесчисленным числом способов.

Из дифференциальных уравнений (3.5) и (3.8) с учетом (3.11) получаем дифференциальные уравнения:

$$\omega_{\tilde\alpha}^{m+1}=A_{\tilde\alpha a}^{m+1}\omega^a, \quad \omega_{m+1}^{\tilde\alpha}=A_{m+1,a}^{\tilde\alpha}\Theta^a,$$
$$dA_{\tilde\alpha a}^{m+1}+A_{\tilde\alpha a}^{m+1}\omega_{m+1}^{m+1}-A_{\tilde\beta a}^{m+1}\omega_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta}-A_{\tilde\alpha b}^{m+1}\Theta_a^b=A_{\tilde\alpha ab}^{m+1}\Theta^b,$$
$$dA_{m+1,a}^{\tilde\alpha}-A_{m+1,a}^{\tilde\alpha}\omega_{m+1}^{m+1}+A_{m+1,a}^{\tilde\beta}\omega_{\tilde\beta}^{\tilde\alpha}-A_{m+1,b}^{\tilde\alpha}\Theta_a^b=A_{m+1,ab}^{\tilde\alpha}\Theta^b,$$
$$(\tilde\alpha,\tilde\beta=\overline{m+2,n},a,b=\overline{1,m}). \qquad (3.13)$$

Замечание 3.1. Из (3.12) и (3.13) следует, что m-поверхность S_m в A_n инвариантным образом оснащена полем касательных гиперплоскостей $L_{n-1}\supset L_m$. Поэтому поле оснащающих $(n-m)$-плоскостей L_{n-m} на S_m:$L_{n-m}\in A, L_{n-m}\cap L_m=A, A_n=L_{n-m}\cup L_m$ аналитически и геометрически можно найти так же как и в [12. С. 17–21].

4. Поля двумерных площадок и $(m-2)$-плоскостей в E_m и $L_m\subset A_n(m<n)$

4.1. Поле гиперконусов $q^2_{m-1}\subset L_m\subset A_n$.

Из (3.2) и (3.12) следует, что точке $A\in S_m\subset A_n$, являющейся образом точки $B\in E_m$, отвечает в L_m конус q^2_{m-1} второго порядка с вершиной A, определяемый уравнениями:

$$q^2_{m-1}: A^{m+1}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0, \quad x^{\hat{\alpha}}=0. \tag{4.1}$$

Прообразом этого конуса в E_m при отображении V^n_m является конус

$$\tilde{q}^2_{m-1}: C_{ab}u^a u^b=0, \tag{4.2}$$

где величины C_{ab}, симметрические по a и b, определяются по формулам $C_{ab}=A^{m+1}_{\alpha\beta}A^\alpha_a A^\beta_b$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям $dC_{ab}-C_{cb}\Theta^c_a-C_{ac}\Theta^c_b=C_{abc}\Theta^c$. Здесь явный вид величин C_{abc} для нас несущественен.

4.2. Линейные подпространства $\Gamma^1_2\subset E_m$, $\Gamma^2_{m-2}\subset E_m$ и $L^1_2\subset L_m$, $L^2_{m-2}\subset L_m$.

Имеет место следующая

Теорема 4.1. С отображением V^m_m:$E_m\to L_m$ ассоциируются следующие распределения:

1. $\Delta^1_{m-1,m}$: $B\to\Gamma_2^1$; $\Delta^2_{m-2,m}$: $B\to\Gamma^2_{m-2}$:
   а) $\Gamma_2^1\perp\Gamma^2_{m-2}$, $\Gamma_2^1\cup\Gamma^2_{m-2}=E_m$;
   б) Γ_2^1 и Γ^2_{m-2} сопряжены относительно $\tilde{q}^2_{m-1}\subset E_m$.
2. $\tilde{\Delta}^1_{m-1,m}$: $A\to L_2^1$; $\tilde{\Delta}^2_{m-2,m}$: $A\to L^2_{m-2}$, $L^1_2\cup L^2_{m-2}=L_m$, L^1_2 и L^2_{m-2} сопряжены относительно конусов B^2_{m-2} и q^2_{m-2}.
3. $L_2^1=V^m_m\Gamma_2^1$, $L^2_{m-2}=V^m_m\Gamma^2_{m-2}$; V^m_m:$E_m\to L_m$.

Доказательство. Каждой точке $B\in E_m$ и соответствующей ей при отображении V^m_m точке $A\in L_m$ сопоставим следующие линейные подпространства.

1. В пространстве E_m.

$$\Gamma^1_2: u^{a_2}=h^{a_2}_{a_1}u^{a_1}; \Gamma^2_{m-2}: u^{a_1}=h^{a_1}_{a_2}u^{a_2},$$

$$\Gamma^1_2\perp\Gamma^2_{m-2}\Rightarrow h^{a_2}_{a_1}=-h^{a_1}_{a_2},$$

$$(a_1,b_1,c_1=1,2; \quad a_2,b_2,c_2=\overline{3,m}), \tag{4.3}$$

где $h^{a_2}_{a_1}$ и $h^{a_1}_{a_2}$ в силу условий инвариантности относительно репера $\overset{*}{R}$ в E_m удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dh^{a_2}_{a_1}+h^{b_2}_{a_1}\Theta^{a_2}_{b_2}-h^{a_2}_{b_1}\Theta^{b_1}_{a_1}+\Theta^{a_2}_{a_1}=h^{a_2}_{a_1b}\Theta^b;$$

$$dh^{a_1}_{a_2}+h^{b_1}_{a_2}\Theta^{a_1}_{b_1}-h^{a_1}_{b_2}\Theta^{b_2}_{a_2}+\Theta^{a_1}_{a_2}=h^{a_1}_{a_2b}\Theta^b, (a,b=\overline{1,m}).$$

2. В подпространстве $L_m=V^m_m E_m$.

$$L^1_2: x^{\alpha_2}=g^{\alpha_2}_{\alpha_1}x^{\alpha_1}, x^{\hat{\alpha}}=0; L^2_{m-2}: x^{\alpha_1}=g^{\alpha_1}_{\alpha_2}x^{\alpha_2}, x^{\hat{\alpha}}=0,$$

$$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1=1,2; \alpha_2,\beta_2,\gamma_2=\overline{3,m}; \hat{\alpha}=\overline{m+1,n}), \tag{4.4}$$

где $g^{a_2}_{a_1}$ и $g^{a_1}_{a_2}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dg^{\alpha_2}_{\alpha_1}+g^{\beta_2}_{\alpha_1}\omega^{\alpha_2}_{\beta_2}-g^{\alpha_2}_{\beta_1}\omega^{\beta_1}_{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1}=g^{\alpha_2}_{\alpha_1a}\Theta^a=g^{\alpha_2}_{\alpha_1a}B^a_\alpha\omega^\alpha,$$

$$dg^{\alpha_1}_{\alpha_2}+g^{\beta_1}_{\alpha_2}\omega^{\alpha_1}_{\beta_1}-g^{\alpha_1}_{\beta_2}\omega^{\beta_2}_{\alpha_2}+\omega^{\alpha_1}_{\alpha_2}=g^{\alpha_1}_{\alpha_2a}\Theta^a=g^{\alpha_1}_{\alpha_2a}B^a_\alpha\omega^\alpha,$$

$$(\alpha=\overline{1,m}).$$

Из (2.17) и (4.1)–(4.4) следует, что

а) ортогональные линейные подпространства Γ_2^1 и Γ^2_{m-2} сопряжены относительно конуса $B^2_{m-1}\subset E_m$ тогда и только тогда, когда $m_2=2(m-2)$ величин $h^{a_2}_{a_1}=-h^{a_1}_{a_2}$ удовлетворяют системе из m_1 алгебраических уравнений:

$$\varphi_{a_1b_2}\equiv C_{a_2b_1}h^{a_2}_{a_1}h^{b_1}_{b_2}+C_{a_1b_1}h^{b_1}_{b_2}+C_{a_2b_2}h^{a_2}_{a_1}+C_{a_1b_2}=0,$$

$$(a_1,b_1=1,2; a_2,b_2=\overline{3,m}). \tag{4.5}$$

б) линейные подпространства $L_2^1\subset L_m\subset A_n$ и $L^2_{m-2}\subset L_m\subset A_n$ сопряжены относительно конусов $B^2_{m-1}\subset L_m$ и $q^2_{m-1}\subset L_m$ тогда и только тогда, когда $m_2=2m_1=4(m-2)$ величин $g^{a_2}_{a_1}$ и $g^{a_1}_{a_2}$ удовлетворяют системе m_2 алгебраических уравнений

$$\varphi^1_{\alpha_1\beta_2}\equiv B_{\alpha_2\beta_1}g^{\alpha_2}_{\alpha_1}g^{\beta_1}_{\beta_2}+B_{\alpha_1\beta_1}g^{\beta_1}_{\beta_2}+B_{\alpha_2\beta_2}g^{\alpha_2}_{\alpha_1}+B_{\alpha_1\beta_2}=0,$$

$$\varphi^2_{\alpha_1\beta_2}\equiv A^{m+1}_{\alpha_2\beta_1}g^{\alpha_2}_{\alpha_1}g^{\beta_1}_{\beta_2}+A^{m+1}_{\alpha_1\beta_1}g^{\beta_1}_{\beta_2}+A^{m+1}_{\alpha_2\beta_2}g^{\alpha_2}_{\alpha_1}+A^{m+1}_{\alpha_1\beta_2}=0,$$

$$(\alpha_1,\beta_1=1,2; \alpha_2,\beta_2=\overline{3,m+1}). \tag{4.6}$$

Рассматривая якобиевы матрицы систем (4.5) и (4.6) и подсчитывая их ранги, например, при $h^{a_2}_{a_1}=-h^{a_1}_{a_2}=0$ для системы (4.5) и при $g^{a_2}_{a_1}=g^{a_1}_{a_2}=0$ для системы (4.6), можно убедиться в том, что ранги указанных матриц в общем случае равны, соответственно, m_1 и m_2. Это означает, что каждая из систем (4.5) и (4.6) состоит из алгебраически независимых уравнений. Поэтому системы (4.5) и (4.6) определяют конечное число соответствующих линейных подпространств, о которых идет речь в настоящей теореме. Связь соответствующих линейных подпространств, указанных в условии 3, вытекает из их геометрической интерпретации. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Справедливость теоремы 4.1 вытекает также из нижеследующих геометрических соображений. С конусом $\tilde{q}^2_{m-1}\subset E_m$, определенным уравнениями (4.2), ассоциируется центроаффинное преобразование Π с центром в точке A: каждой прямой $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)u^a\subset E_m$ отвечает гиперплоскость $U_{n-1}\perp u$. Этой гиперплоскости отвечает прямая $u^*=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)\overset{*}{u}{}^a$ являющаяся полюсом гиперплоскости U_{n-1} относительно конуса $\tilde{q}^2_{m-1}$. Легко видеть, что в общем случае существует m направлений u_a, совпадающих с $\overset{*}{u}$. Эти инвариантные направления являются собственными направлениями преобразования Π: $E_m\perp E_m$. Заметим, что каждое из направлений $u_a(a=1,2,...,m)$ ортогонально соответствующей гиперплоскости, проходящей через остальные направления. Из этих направлений $(m(m-1))/2$ способами определяются линейные подпространства Γ_2^1 и $\Gamma^2_{m-2}\perp\Gamma_2^1$ в E_m.

Аналогичная геометрическая картина возникает и в m-плоскости $L_m=V^m_m E_m$, поскольку конусы

B^2_{m-1} и q^2_{m-1}, см. (2.17) и (4.1), порождают центроаффинное преобразование Π: $L_m \to L_m$: для прямой $x=(\overline{A}, \overline{\varepsilon}_a)x^{a?} \in L_m$ полярой является та $(m-1)$-плоскость в L_m относительно конуса $B^2_{m-1} \subset L_m$, полюсом которой является прямая $y=\Pi x \subset L_m$ относительно конуса $q^2_{m-1} \subset L_m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 6. – С. 37–42.
2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий // Итоги науки. Вып. Геометрия. – 1963. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 65–107.
3. Павлюченко Ю.В., Рожков В.В. Об изгибании точечных соответствий между проективными пространствами // Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 263–275.
4. Павлюченко Ю.В. О характеристической системе точечных соответствий // Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – Т. 2. – С. 221–233.
5. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – Т. 2. – С. 235–241.
6. Рыжков В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Вып. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1970. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 153–174.
7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
8. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
9. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
10. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
11. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, L^{\hat{\alpha}}_{m+1})$ в n-мерном проективном пространстве // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
12. Ивлев Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности // Дифференциальная геометрия многообразия фигур. Вып. 4. – Калининград, 1974. – С. 6–28.

Поступила 05.02.2009 г.

УДК 517.3

ПРОГРАММА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Предложена программа построения анализа с нецелочисленными порядками интегрирования и дифференцирования. Показано, что для каждого вещественного порядка s можно построить внутренне замкнутую теорию (ветвь) анализа, если функции в данной теории выражаются через ряды с дробными степенями с соответствующим дробным шагом s. Каждая ветвь будет иметь свой индивидуальный набор элементарных и других важных функций.

Ключевые слова:
Оператор Адамара, ветви дробного анализа, родственные ветви, модельные ветви, дробностепенные ряды с шагом s, маркирующие функции.

Под дробным анализом (или дробным исчислением) будем понимать направление в анализе, в котором исследуются аналитические операции дифференцирования и интегрирования любых конечных вещественных порядков, как целочисленных, так и нецелочисленных, что обобщает «стандартный» анализ, в основе которого лежат производные и интегралы первого порядка или порядков, кратных единице.

Путей такого обобщения известно много [1]. Наиболее простой из них предложил Адамар на основе введённого им оператора дробного интегро-дифференцирования функций, которые выражаются через степенные ряды [2]

$$d^s x\!:\!\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+s)} x^{m+s}.$$

Здесь $d^s x$ *оператор Адамара* порядка s, действующий над множеством степенных функций x^m, s, x, $\in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, s=const, $\Gamma(...)$ – гамма-функция Эйлера.

Случаи $s < 0$ соответствует операторам дробного дифференцирования порядка s, которые обозначим как $d^{-s}x$. При $s>0$ – операторы дробного интегрирования порядка s. При $s=0$ оператор Адамара становится единичным оператором.

Оператор Адамара носит алгебраический характер, что делает его более простым, чем другие операторы дробного интегродифференцирования [1].