

B_{m-1}^2 и q_{m-1}^2 , см. (2.17) и (4.1), порождают центроаффинное преобразование $\Pi: L_m \rightarrow L_m$: для прямой $x = (A, \bar{e}_a)x^a \in L_m$ полярной является та $(m-1)$ -плоскость в L_m относительно конуса $B_{m-1}^2 \subset L_m$, полюсом которой является прямая $y = \Pi x \subset L_m$ относительно конуса $q_{m-1}^2 \subset L_m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1974. — Т. 6. — С. 37–42.
2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий // Итоги науки. Вып. Геометрия. — 1963. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1965. — С. 65–107.
3. Павлюченко Ю.В., Рожков В.В. Об изгибании точечных соответствий между проективными пространствами // Труды геометрического семинара. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1969. — Т. 2. — С. 263–275.
4. Павлюченко Ю.В. О характеристической системе точечных соответствий // Труды геометрического семинара. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. — Т. 2. — С. 221–233.
5. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Труды геометрического семинара. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. — Т. 2. — С. 235–241.
6. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Вып. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1970. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. — С. 153–174.

7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.
8. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. — М., 1953. — Т. 2. — С. 275–382.
9. Аквис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. — 1957. — № 1. — С. 9–19.
10. Аквис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 146. — № 3. — С. 515–518.
11. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, L_{m+1})$ в n -мерном проективном пространстве // Сибирский математический журнал. — 1967. — Т. 8. — № 6. — С. 1307–1320.
12. Ивлев Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности // Дифференциальная геометрия многообразия фигур. Вып. 4. — Калининград, 1974. — С. 6–28.

Поступила 05.02.2009 г.

УДК 517.3

ПРОГРАММА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Предложена программа построения анализа с нецелочисленными порядками интегрирования и дифференцирования. Показано, что для каждого вещественного порядка s можно построить внутренне замкнутую теорию (ветвь) анализа, если функции в данной теории выражаются через ряды с дробными степенями с соответствующим дробным шагом s . Каждая ветвь будет иметь свой индивидуальный набор элементарных и других важных функций.

Ключевые слова:

Оператор Адамара, ветви дробного анализа, родственные ветви, модельные ветви, дробностепенные ряды с шагом s , маркирующие функции.

Под дробным анализом (или дробным исчислением) будем понимать направление в анализе, в котором исследуются аналитические операции дифференцирования и интегрирования любых конечных вещественных порядков, как целочисленных, так и нецелочисленных, что обобщает «стандартный» анализ, в основе которого лежат производные и интегралы первого порядка или порядков, кратных единице.

Путей такого обобщения известно много [1]. Наиболее простой из них предложил Адамар на основе введенного им оператора дробного интегриродифференцирования функций, которые выражаются через степенные ряды [2]

$$d^s x: \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+s)} x^{m+s}.$$

Здесь $d^s x$ оператор Адамара порядка s , действующий над множеством степенных функций x^m , $s, x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $s = \text{const}$, $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера.

Случай $s < 0$ соответствует операторам дробного дифференцирования порядка s , которые обозначим как $d^{-s} x$. При $s > 0$ — операторы дробного интегрирования порядка s . При $s = 0$ оператор Адамара становится единичным оператором.

Оператор Адамара носит алгебраический характер, что делает его более простым, чем другие операторы дробного интегриродифференцирования [1].

Подход, основанный на построении дробного анализа с помощью оператора Адамара над множеством степенных рядов, был назван *программой Адамара*.

Подход Адамара не получил должного развития, хотя он представляется естественным и интуитивно понятным. Простота и логичность данного подхода даёт основание предполагать, что в нём заложен большой потенциал для развития и самых разных обобщений.

Аналитическое и численное рассмотрение показало, что свойства элементарных функций, используемых в стандартном анализе, при действии на них операторов Адамара, порядки которых отличаются от единицы, теряют свойства, которые имеют место в стандартном анализе [3, 4]. Например, стандартная экспонента не является инвариантной при дробном дифференцировании и интегрировании, как это имеет место при дифференцировании и интегрировании первого порядка.

С другой стороны, было показано, что каждая пара дробных порядков $\pm s$ операторов Адамара $d^{\pm s}$, имеют свою частную экспоненту — $\exp_s x$, отличную от экспонент операторов Адамара других порядков [3].

Аналогичные выводы можно сделать и для других функций, в частности, элементарных.

Из сказанного следует необходимость сформулировать другую программу построения дробного анализа, отличную от программы Адамара, в которой два пункта.

1. Каждая отдельная пара взаимно обратных операторов Адамара (интегрирования и дифференцирования), с порядками $\pm s$ ($s \in \mathbb{R}$), задают частную теорию дробного анализа, которую будем называть *ветвью дробного анализа порядка s*.
2. Степенные ряды, которые необходимо использовать при построении каждой отдельной ветви дробного анализа порядка s , должны иметь показатели степеней переменных, кратные порядку s , которые задают ветвь дробного анализа порядка s

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l}, \quad a_n, s, l \in \mathbb{R}, n_0, n \in \mathbb{Z}.$$

В более общем случае, когда центр ряда находится в точке x_0

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{sn+l}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Такие ряды будем называть *дробностепенными рядами с шагом s*.

Из второго положения следует то, что каждая ветвь дробного анализа должна иметь свой, индивидуальный набор элементарных, специальных и других важных функций, которые, в общем случае, отличны от соответствующих наборов функций остальных ветвей дробного анализа. Это хорошо видно уже из сравнения ветвей $s=1$ и $s=1/2$ [4].

Каждая ветвь является внутренне замкнутой и самодостаточной теорией, отличной и независимой от остальных ветвей дробного анализа.

Другими словами, под дробным анализом будем понимать бесконечное множество ветвей дробного анализа, в основе которых лежат операторы дробного интегродифференцирования всех конечных порядков s , которые действуют в пространствах функций, представляемых в виде степенных рядов с соответствующим дробным шагом s .

Отличие предлагаемой программы от программы, предложенной Адамаром, заключается в том, что последняя не предполагает разбиение дробного анализа на множество независимых ветвей, а само дробное интегродифференцирование развивается в рамках стандартного анализа, расширяя его аналитические возможности.

Данная программа может быть изменена или расширена в нескольких направлениях. Например, при построении отдельных ветвей дробного анализа могут использоваться операторы разных типов, а не только оператор Адамара. Возможно построение ветвей дробного анализа, в основе которых лежат различные возможные обобщения оператора Адамара, а также операторы дробного интегродифференцирования других типов.

Кроме разработки отдельных («чистых») ветвей возможно развитие *смешанного дробного анализа*, в основе которого лежат различные комбинации операторов дробного интегродифференцирования разных порядков. При этом для отдельных порядков могут использоваться как один, так и несколько типов дробных операторов.

Модели смешанного анализа представляются более сложными, чем отдельные ветви дробного анализа. В этом случае встаёт, в частности, вопрос о возможности построения замкнутых моделей смешанного дробного анализа. Если это возможно, то в каких случаях?

Дробный анализ может развиваться так, что ветвь порядка $s=1$ будет соответствовать стандартному анализу. В этом случае будем говорить, что в данном дробном анализе выполняются *принцип соответствия*.

Также возможна ситуация, когда принцип соответствия выполняться не будет, т. е. в таком дробном анализе ни одна ветвь (включая $s=1$) не будет соответствовать стандартному анализу.

Дробный анализ, в котором выполняется принцип соответствия, представляется более естественным, чем возможные направления дробного анализа, в которых данный принцип не выполняется. Но не исключено, что и такие направления могут найти применение в математике и в приложениях.

Для реализации предложенной программы построения отдельных ветвей дробного анализа необходимы следующие формальные шаги.

1. Замена операторов, которая заключается в том, что ветвь, определяемая взаимно обратными операторами порядков $\pm s$, или просто — ветвь s , стро-

ится по аналогии со стандартным анализом, где степени операторов дифференцирования и интегрирования степени 1 заменяется оператором дробного интегриродифференцирования степени s

$$\frac{d}{dx} \equiv d^{-1}x \rightarrow d^{-s}x \text{ и } \int f(x) dx \equiv d^1x : f(x) \rightarrow d^s x : f(x).$$

В случае, когда имеется не одна, а несколько переменных, тогда частные производные первого порядка необходимо заменить частными производными дробных порядков

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \equiv \partial^{-s}x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^s \equiv \partial^{-s}y.$$

Здесь для примера взяты две переменные x и y .

Частные производные второго порядка нужно заменить на частные производные дробных порядков

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^s \equiv \partial^{-s}x : \partial^{-s}y.$$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ операторы интегрирования запишем в виде

$$\int f(x, y) dx \equiv d^1x : f(x, y) \rightarrow \partial^s x : f(x, y),$$

$$\int f(x, y) dy \equiv d^1y : f(x, y) \rightarrow \partial^s y : f(x, y).$$

Двойной повторный интеграл:

$$\iint f(x, y) dx dx \equiv d^1x : d^1x : f(x, y) \rightarrow \rightarrow \partial^s x : \partial^s x : f(x, y).$$

Двойной интеграл со смешанным интегрированием:

$$\iint f(x, y) dx dy \equiv d^1x : d^1y : f(x, y) \rightarrow \rightarrow \partial^s x : \partial^s y : f(x, y).$$

Заметим, что при $s \neq 1$ для операторов Адамара в общем случае справедливы неравенства

$$\partial^s x : \partial^s x : f(x, y) \neq \partial^{s+*s} x : f(x, y).$$

2. Замена рядов заключается в замене целочисленных степеней аргумента в степенных рядах стандартного анализа, через которые выражаются функции стандартного анализа $f(x) \equiv f_1(x)$ на дробностепенные ряды с шагом s , через которые выражаются функции $f_s(x)$ ветви порядка s

$$\begin{aligned} f(x) \equiv f_1(x) &= \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m x^{m+q} \rightarrow \\ \rightarrow f_s(x) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{sn+l}, \\ m_0, n_0, q, m, n &\in \mathbb{Z}; a_m, a_n, s, l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким способом можно получить дробную экспоненту порядка s , $\exp_s x$, полученную другим способом в [3]

$$\begin{aligned} \exp x &\equiv \exp_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \rightarrow \\ &\rightarrow \exp_s x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}. \end{aligned}$$

Такая непосредственная и формальная замена возможна не для всех функций. В этом случае необходимы более сложные преобразования.

Упростить исследования дробного анализа можно путём разбиения множества всех его ветвей на отдельные множества ветвей, похожих между собой, которые будем называть *родственными ветвями*. Критерием схожести ветвей можно установить, например, схожесть некоторых стандартных функций, которые будем называть *маркирующими функциями*. В качестве маркирующих функций удобно выбрать частные экспоненты разных порядков. Такой выбор производится по причине фундаментального значения экспонент для математики и по причине того, что через них выражаются многие важные функции, например, элементарные, специальные и другие.

Если среди родственных ветвей выбрать по одной или несколько ветвей, которые будем называть *модельными ветвями*, и подробно их исследовать, то по ним можно составлять качественные представления о других родственных ветвях.

Одной из задач дробного анализа будет разбиение множества всех ветвей дробного анализа на множества ветвей с родственными свойствами.

Прежде всего, множество ветвей дробного анализа можно разделить на множества ветвей с иррациональными и рациональными порядками. Рациональные ветви можно разделить на целочисленные (первого порядка, чётных и нечётных порядков) и дробные, с порядками больше и меньше единицы.

Построение ветвей иррациональных порядков является задачей более сложной, чем рациональных.

Исследования в области дробного анализа должны проводиться как аналитически, так и численно. Для численных исследований необходимо создание компьютерных программ, а сама роль численных расчётов в дробном анализе представляется относительно более важной, чем в стандартном.

Дробный анализ в последнее время всё шире используется в приложениях, см., например, [1, 5, 6]. Для практических целей могут применяться разные операторы дробного интегриродифференцирования. Поэтому встаёт вопрос об адекватности описания реального мира на основе разных подходов дробного анализа, основанных на альтернативных операторах дробного интегриродифференцирования.

Кроме этого, в дробном анализе важно сравнение подходов, основанных на разных операторах дробного интегриродифференцирования, и, в частности, с анализом на основе оператора Адамара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Hadamar J. Essai sur l'étude des fonctions donnees par leur developement de Taylor // J. math. pures et appl. Ser. 4. – 1892. – V. VIII. – P. 101–186.
3. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312 – № 2. – С. 16–20.
4. Чуриков В.А. Дробный анализ порядка $1/2$ на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 21–23.
5. Гук И.Л. Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – № 4. – С. 7–11.
6. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

Поступила 01.12.2008 г.

УДК 517.3

ВНУТРЕННЯЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводятся пространства операторов Адамара и операторных векторов. Определены операции умножения на число, сложения и умножения, выяснена их алгебраическая структура. Рассмотрены топологические свойства пространства операторов Адамара.

Ключевые слова:

Внутренняя алгебра операторов Адамара внешняя алгебра операторов Адамара, пространство операторов Адамара, операторные вектора.

В работе [1] были рассмотрены некоторые свойства оператора Адамара дробного интегродифференцирования. Далее рассмотрим свойства оператора Адамара более подробно.

Оператор Адамара носит скорее алгебраический, чем аналитический характер, в отличие от большинства других операторов дробного интегродифференцирования, которые, как правило, являются более сложными с математической точки зрения интегральными преобразованиями [2]. Выясним общие алгебраические свойства операторов Адамара.

Алгебраическую структуру операторов Адамара будем делить на две составляющие: на *внутреннюю* и на *внешнюю алгебру операторов Адамара*.

Внутренняя алгебра рассматривает алгебраическую структуру, которая возникает только между операторами Адамара, а *внешняя* – при взаимодействии операторов Адамара и функциями, на которые они действуют.

Вначале введем понятие пространств, основанных на операторах Адамара.

Определение. Операторы Адамара $d^s x$ всех конечных вещественных порядков, $s_i \in \mathbb{R}$, $s_i < \infty$, образуют множество, которое будем называть *пространством операторов Адамара*, которое будем обозначать как $D_A(\mathbb{R})$.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ представляет объединение трёх множеств

$$D_A(\mathbb{R}) = D_A^+(\mathbb{R}) \cup D_A^0(\mathbb{R}) \cup D_A^-(\mathbb{R}).$$

Здесь $D_A^+(\mathbb{R})$ – множество всех операторов интегрирования; $D_A^-(\mathbb{R})$ – множество всех операторов дифференцирования; $D_A^0(\mathbb{R}) = \{d^0 x\}$ – множество, состоящее из одного элемента – единичного оператора $d^0 x \equiv 1$.

Очевидно, что каждому вещественному числу s соответствует единственный оператор Адамара $d^s x$ порядка η . В силу этого, между множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством операторов Адамара имеет место взаимнооднозначное (биективное) отображение « $\leftrightarrow$ »

$$\mathbb{R} \leftrightarrow D_A(\mathbb{R}).$$

Биекцию между пространством $D_A(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно осуществить бесконечным числом способов. Наиболее подходящим из таких отображений является одно.

Определение. Биекцию между пространством $D_A(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ будем называть *тривиальной*, если каждому оператору Адамара $d^s x$ будем ставить в соответствие число s , которое определяет порядок данного оператора.

Далее будем рассматривать только тривиальную биекцию между $D_A(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$.

Биекция $\mathbb{R} \leftrightarrow D_A(\mathbb{R})$ значительно упрощает исследование алгебраических и топологических свойств пространства $D_A(\mathbb{R})$.

В частности, очевидна