СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Hadamar J. Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur development de Taylor // J. math. pures et appl. Ser. 4. – 1892. – V. VIII. – P. 101–186.
3. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312 – № 2. – С. 16–20.
4. Чуриков В.А. Дробный анализ порядка 1/2 на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 21–23.
5. Гук И.Л. Формализм Лагранжа для частиц, движущихся в пространстве фрактальной размерности // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – № 4. – С. 7–11.
6. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

Поступила 01.12.2008 г.

УДК 517.3

ВНУТРЕННЯЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводятся пространства операторов Адамара и операторных векторов. Определены операции умножения на число, сложения и умножения, выяснена их алгебраическая структура. Рассмотрены топологические свойства пространства операторов Адамара.

Ключевые слова:
Внутренняя алгебра операторов Адамара внешняя алгебра операторов Адамара, пространство операторов Адамара, операторные вектора.

В работе [1] были рассмотрены некоторые свойства оператора Адамара дробного интегродифференцирования. Далее рассмотрим свойства оператора Адамара более подробно.

Оператор Адамара носит скорее алгебраический, чем аналитический характер, в отличие от большинства других операторов дробного интегродифференцирования, которые, как правило, являются более сложными с математической точки зрения интегральными преобразованиями [2]. Выясним общие алгебраические свойства операторов Адамара.

Алгебраическую структуру операторов Адамара будем делить на две составляющие: на *внутреннюю* и на *внешнюю алгебру операторов Адамара*.

Внутренняя алгебра рассматривает алгебраическую структуру, которая возникает только между операторами Адамара, а *внешняя* – при взаимодействии операторов Адамара и функциями, на которые они действуют.

Вначале введем понятие пространств, основанных на операторах Адамара.

Определение. Операторы Адамара $d^{s_i}x$ всех конечных вещественных порядков, $s_i \in \mathbb{R}$, $s_i < \infty$, образуют множество, которое будем называть *пространством операторов Адамара*, которое будем обозначать как $D_A(\mathbb{R})$.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ представляет объединение трёх множеств

$$D_A(\mathbb{R}) = D_A^+(\mathbb{R}) \cup D_A^0(\mathbb{R}) \cup D_A^-(\mathbb{R}).$$

Здесь $D_A^+(\mathbb{R})$ – множество всех операторов интегрирования; $D_A^-(\mathbb{R})$ – множество всех операторов дифференцирования; $D_A^0(\mathbb{R}) = \{d^0x\}$ – множество, состоящее из одного элемента – единичного оператора $d^0x \equiv \mathbf{1}$.

Очевидно, что каждому вещественному числу s соответствует единственный оператор Адамара $d^{\eta}x$ порядка η. В силу этого, между множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством операторов Адамара имеет место взаимнооднозначное (биективное) отображение «$\leftrightarrow$»

$$\mathbb{R} \leftrightarrow D_A(\mathbb{R}).$$

Биекцию между пространством $D_A(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно осуществить бесконечным числом способов. Наиболее подходящим из таких отображений является одно.

Определение. Биекцию между пространством $D_A(\mathbb{R})$ и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ будем называть *тривиальной*, если каждому оператору Адамара $d^s x$ будем ставить в соответствие число s, которое определяет порядок данного оператора.

Далее будем рассматривать только тривиальную биекцию между $D_A(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$.

Биекция $\mathbb{R} \leftrightarrow D_A(\mathbb{R})$ значительно упрощает исследование алгебраических и топологических свойств пространства $D_A(\mathbb{R})$.

В частности, очевидна

Теорема. Множество всех операторов Адамара имеет мощность множества континуума $\aleph_1$.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ является узким и не позволяет последовательно ввести алгебраические операции, такие, как умножение операторов на число и их сложение, так, чтобы результаты операции были замкнуты. Поэтому, необходимо ввести более широкое пространство, чем $D_A(\mathbb{R})$.

Определение. Линейные комбинации операторов Адамара $d^{s_i}x$ будем называть *операторными векторами* $\boldsymbol{d}x$.

Операторные вектора будут выражаться так

$$\boldsymbol{d}x = \sum_{i=0}^{S} \alpha_i d^{s_i} x = \alpha_0 d^{s_0} x + \alpha_1 d^{s_1} x + \alpha_2 d^{s_2} x + \\ + \ldots + \alpha_{i-1} d^{s_{i-1}} x + \alpha_i d^{s_i} x + \ldots$$

где S – предел суммирования может быть как конечным, так и бесконечным, а коэффициенты α_i – вещественные (комплексные) и конечные числа.

Определение. Множество всех операторных векторов будем называть пространством *операторных векторов* и обозначать как $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

В частном случае, когда все коэффициенты α_i в операторном векторе равны нулю, получим нулевой оператор

$$\mathbf{0} = \sum_{s_i=1}^{S} \alpha_i d^{s_i} x, \alpha_i = 0.$$

Здесь $d^{s_i}x$ операторы Адамара порядков s_i из пространства $D_A(\mathbb{R})$.

При воздействии нулевого оператора на функцию с конечной нормой получаем ноль

$$\mathbf{0} : f(x) = 0, \| f(x) \| < \infty.$$

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ является подпространством пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$, $D_A(\mathbb{R}) \subset \Sigma_A(\mathbb{R})$.

Операторы Адамара $d^{s_i}x$ являются линейно независимыми для разных порядков s_1 операторов пространства $D_A(\mathbb{R})$ и образуют базис в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$, по которому раскладываются операторные вектора.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ образует наиболее простой базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$, когда все коэффициенты базиса равны единице (β_i=1), который будем называть *нормированным базисом* пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

Теорема. Базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$ имеет множество слагаемых мощности континуума $\aleph_1$.

Данное утверждение справедливо в силу того, что пространство $D_A(\mathbb{R})$ биективно множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пространство $D_A(\mathbb{R})$ образует не единственно возможный базис пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$. Любое множество операторов $\beta_i d^{s_i}x$, где коэффициенты β_i отличны от нуля и являются вещественными числами ($\beta_i \neq 0$, β_i, $i \in \mathbb{R}$), образуют базис. Но такие базисы не являются нормированными в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

Теорема. Множество всех возможных базисов пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$ имеет мощность, следующую за мощностью континуума – мощность $\aleph_2$, ($\aleph_2 > \aleph_1$).

Это следует из того, что числовые коэффициенты β_i в операторных полиномах и их индексы i пробегают множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, поэтому их можно рассматривать как функции над множеством $\mathbb{R}$, а множество всех функций над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность $\aleph_2$ [3].

В пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$ между операторными векторами можно ввести ряд операций, которые будут образовывать внутренне замкнутую алгебраическую структуру операторных векторов, легко выводимых из свойств оператора Адамара.

Операция умножения операторных векторов на число. Число умножается на операторный вектор слева.

Умножения операторных векторов на единицу (унитарность)

Ch_1. $1\boldsymbol{d}x = \boldsymbol{d}x$.

Ассоциативность умножения на число

Ch_2. $(ab)\boldsymbol{d}x = a(b\boldsymbol{d}x)$, a, b=const.

Операцию сложения «+» операторных векторов

Ассоциативность относительно операции сложения операторных векторов

G_1. $(\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x) + \boldsymbol{d}_3x = \boldsymbol{d}_1x + (\boldsymbol{d}_2x + \boldsymbol{d}_3x)$.

Сложение с нулевым оператором

G_2. $\boldsymbol{d}x + \mathbf{0} = \boldsymbol{d}x$.

Наличие у каждого операторного вектора $\boldsymbol{d}x$ противоположного оператора $-\boldsymbol{d}x$

G_3. $\boldsymbol{d}x - \boldsymbol{d}x = 0$.

Коммутативность относительно операции сложения

G_4. $\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x = \boldsymbol{d}_2x + \boldsymbol{d}_1x$.

Кроме этого справедливы законы дистрибутивности, связывающие операции сложения и умножения

D_1. $(a + b)\boldsymbol{d}x = a\boldsymbol{d}x + b\boldsymbol{d}x$;

D_2. $a(\boldsymbol{d}_1x + \boldsymbol{d}_2x) = a\boldsymbol{d}x + a\boldsymbol{d}x$.

Теорема. Относительно операции сложения операторные вектора образует коммутативную группу над пространством $\Sigma_A(\mathbb{R})$.

Данное утверждение справедливо в силу свойств G_1, G_2, G_3, G_4.

В силу восьми приведённых свойств Ch_1, Ch_2, G_1, G_2, G_3, G_4, D_1, D_2 для операторных векторов в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$ справедлива

Теорема. Операторные вектора из пространства $\Sigma_A(\mathbb{R})$ относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Операторы Адамара, являются частными случаями операторных векторов, поэтому они образуют в пространстве $\Sigma_A(\mathbb{R})$ относительно операции сложения коммутативную группу, а относительно операций умножения на число и сложения образуют линейное пространство.

Для реальных вычислений достаточно использовать не полностью пространства $D_A(\mathbb{R})$ и $\Sigma_A(\mathbb{R})$, а их подпространства с конечным или бесконечным счётным числом операторов Адамара или операторных векторов.

Например, в каждой отдельной ветви дробного анализа порядка s удобно работать с базисными операторными векторами на основе операторов Адамара, порядки которых удовлетворяют соотношению $s_n=ns$, $s\in\mathbb{R}$, $n=\in\mathbb{Z}$. Векторные операторы, ветви анализа порядка s, можно обозначить как

$$\boldsymbol{d}^s x=\sum_{n=0}^{S}\alpha_n d^{ns}x=$$

$$=\alpha_0 d^0 x+\alpha_1 d^s x+\alpha_2 d^{2s}x+...+\alpha_n d^{ns}x+....$$

Здесь α_1, α_2, α_3, ... α_n – вещественные (или комплексные) числа.

Такие операторные вектора будем называть операторными векторами порядка s.

Пространство $\Sigma_A(\mathbb{R})$ можно разбить на фактормножества $\Sigma_A(\mathbb{R})$ по порядку векторных операторов s

$$\Sigma_A(\mathbb{R})=\bigcup_{\forall s\in\mathbb{R},|s|<\infty}\Sigma_s(\mathbb{R}),$$

$$\bigcap_{\forall s\in\mathbb{R},|s|<\infty}\Sigma_s(\mathbb{R})=\varnothing.$$

Для пересечения двух фактормножеств справедливо соотношение

$$\Sigma_{s_1}(\mathbb{R})\cap\Sigma_{s_2}(\mathbb{R})=\begin{cases}\varnothing,\ s_1\neq s_2\\ \Sigma_{s_1}(\mathbb{R}),\ s_1=s_2\Rightarrow\Sigma_{s_1}(\mathbb{R})=\Sigma_{s_2}(\mathbb{R}).\end{cases}$$

Между операторами Адамара введём операцию умножения (*произведение*, *композиция*) операторов. Операция умножения будет замкнута внутри пространства $D_A(\mathbb{R})$.

Произведение двух операторов порядков s и r можно выразить как один оператор порядка $s+r$.

$$d^s x{:}d^r x=d^r x{:}d^s x=d^{s+r}x=d^{r+s}x.$$

Оператор Адамара порядка $s+r$ можно разложить на произведение двух операторов порядков s и r (*декомпозиция*)

$$d^{s+r}x=d^s x\cdot d^r x.$$

Для оператора Адамара выполняются условия:

- ассоциативности

$$(d^s x{:}d^q x)\ d^d x=d^s x{:}(d^q x{:}d^d x);$$

- наличия единичного оператора $\mathbf{1}=d^0x$

$$d^0x{:}d^s x=d^s x{:}d^0 x=d^s x \text{ или в другой записи}$$
$$\mathbf{1}{:}d^s x=d^s x{:}\mathbf{1}=d^s x;$$

- наличия обратного элемента

$$d^s x{:}d^{-s}x=d^{-s}x{:}d^s x=d^0 x=\mathbf{1};$$

- коммутативности умножения операторов

$$d^s x{:}d^q x=d^q x{:}d^s x.$$

Теорема. Относительно операции умножения операторы Адамара образуют коммутативную группу в пространстве $D_A(\mathbb{R})$.

На множестве операторов Адамара можно ввести отношение строгого порядка (> или <), которое удовлетворяет двум аксиомам:

1. Из $a<b$ и $b<c$ следует, что $a<c$ (*транзитивность*);
2. Невозможность одновременного выполнения $a<b$ и $a>b$.

Определение. Для двух операторов $d^s x$ и $d^q x$ больше тот, у которого больше порядок. Из $s>q$ следует, что $d^s x>d^q x$.

Очевидно, что в случае, когда порядки операторов равны, то равны и сами операторы, т. е. из $s=q$ следует, что $d^s x=d^q x$.

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ гомоморфно отношению строгого порядка в пространстве операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$.

В силу равномощности $D_A(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ справедлива следующая

Теорема. Отношение строгого порядка над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ и пространством операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ изоморфны друг другу.

Над пространством $D_A(\mathbb{R})$ можно ввести меру ρ, в качестве которой удобно взять модуль показателя порядка оператора Адамара $|s|$. В этом случае будут выполняться все свойства меры

1. $\rho(|s|)=0$, $s=0$;
2. $\rho(|s|)>0$, $s\neq0$;
3. $\rho(|s_1|, |s_2|)\leq\rho(|s_1|)+\rho(|s_2|)$, $\rho(|s_1|, |s_2|)=\rho(|s_1|-|s_2|)$.

Порядок в множестве $\mathbb{R}$ является архимедовским [4], что в силу изоморфности между $\mathbb{R}$ и $D_A(\mathbb{R})$ выполняется и для операторов из $D_A(\mathbb{R})$. Тогда для операторов Адамара можно сформулировать

Определение. Если для двух операторов Адамара справедливо неравенство $d^{|s|}x<d^{|q|}x$, то найдётся такой оператор Адамара $d^{n|s|}x$, $n\in\mathbb{N}$, что будет выполняться неравенство $d^{n|s|}x>d^{|q|}x$.

Теорема. Порядок в пространстве операторов $D_A(\mathbb{R})$ является архимедовским.

Кроме того, в силу изоморфности $D_A(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ мы можем говорить, что в пространстве операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ порядок архимедовский, как и над множеством $\mathbb{R}$.

Из биективности $\mathbb{R}\leftrightarrow D_A(\mathbb{R})$ между множеством вещественных чисел и множеством операторов Адамара следует, что в пространстве операторов Адамара можно ввести нетривиальную топологию. Из чего автоматически вытекают самые простые топологические свойства пространства $D_A(\mathbb{R})$.

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ топологически эквивалентны (*гомеоморфны*).

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ одномерно, $\dim(D_A(\mathbb{R}))=1$.

Теорема. Множество операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ плотно.

Теорема. Множество операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ связно.

Для операторов Адамара из пространства $D_A(\mathbb{R})$ удовлетворяется аксиома отделимости Хаусдорфа (T_2 – пространство) [5], а значит справедлива

Теорема. Пространство операторов Адамара $D_A(\mathbb{R})$ хаусдорфово.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной.- М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1977. – 496 с.

Поступила 01.12.2008 г.

УДК 519.17

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ГИПЕРГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

В.В. Быкова

Институт математики Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: bykvalen@mail.ru

Доказана теорема, определяющая достаточные условия существования планарной реализации гиперграфа. Предложена эффективная процедура построения такой реализации. Показано, что в классе планарных гиперграфов реализуемость на плоскости – симметричное и монотонное свойство.

Ключевые слова:
Реализации гиперграфов, планарность, полиномиальная вычислимость.

Гиперграф и ассоциированные с ним графы

Гиперграф – это такое обобщение обыкновенного графа, когда ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества конечного множества вершин, включая пустые и одноэлементные. Интерес к подобным математическим объектам связан с тем, что они естественным образом возникают в конструкторском проектировании радиоэлектронной и вычислительной аппаратуры, лингвистической трансляции, исследовании слабоструктурированных систем, анализе и синтезе распределенных реляционных баз данных, формировании трафика компьютерных сетей и др. [1, 2]. Для разных приложений желательны те или иные структурные свойства гиперграфа. Так, в производстве интегральных схем важна топологичность гиперграфа – реализуемость на плоскости. Математически обосновано, что в общем случае задача распознавания возможности реализации гиперграфа на плоскости является NP-полной [3]. В данной статье выделяется класс планарных гиперграфов и доказывается, что для него данная задача полиномиально разрешима.

Введем необходимый минимум понятий теории гиперграфов, сохраняя терминологию и обозначения, принятые А.А. Зыковым в работе [4]. Пусть X – некоторое конечное множество, а U – конечное семейство подмножеств множества X. Пара $H=(X,U)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер U, при этом $H=(\varnothing,\varnothing)$ считается пустым гиперграфом. Если вершина $x\in X$ принадлежит ребру $u\in U$, то говорят, что они инцидентны. Сопоставим каждой вершине $x\in X$ гиперграфа H множество $U(x)$ всех инцидентных ей ребер, а каждому ребру $u\in U$ – множество $X(u)$ всех инцидентных ему вершин. Две вершины $x_1,x_2\in X$ являются смежными в H, если существует ребро $u\in U$, которое содержит обе эти вершины, т. е. $x_1,x_2\in X(u)$. Аналогичным образом, два ребра $u_1,u_2\in U$ смежные в H, если $X(u_1)\cap X(u_2)\neq\varnothing$. Число $|U(x)|$ определяет степень вершины x, а число $|X(u)|$ – степень ребра u. Если $|U(x)|=0$, то вершина x называется изолированной. Ребро степени 0 считается пустым. Элемент гиперграфа степени 1 именуется висячим.

Если $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $n\geq1$, $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$, $m\geq1$, то гиперграф $H=(X,U)$ однозначно описывается матрицей инциденций $A(H)=\{a_{ij}\}$: $a_{ij}=1$ при x_iI $X(u_j)$; $a_{ij}=0$ при $x_i\in X(u_j)$; $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$. Гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ с матрицей инциденций $A(H^*)=A^{\mathrm{T}}(H)$ – двойственный (симметричный) гиперграф для $H=(X,U)$. Для изучения структурных особенностей гиперграфов используются вспомогательные обыкновенные графы: $L(H)$ – реберный граф или граф смежности ребер гиперграфа; $L^{(2)}(H)$ – граф смежности вершин гиперграфа; $K(H)$ – кенигово представление или граф инциденций. Двойственный гиперграф H^* по определению сохраняет отношение смежности и инцидентности между элементами гиперграфа H. Оттого он наследует все свойства гиперграфа H, основанные на этих отношениях. Справедливо отношение равенства между графами смежности для H и H^* [5]: $L(H)=L^{(2)}(H^*)$, $L^{(2)}(H)=L(H)$. Кенигово представление гиперграфа $H=(X,U)$ – двудольный граф $K(H)$, отражающий отношение инцидентности элементов гиперграфа, с