УДК 519.233.22

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОРОГОВОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

А.С. Марков

Томский политехнический университет
E-mail: markovalexander@mail.ru

Для оценивания параметров пороговой авторегрессии предлагаются последовательные оценки по методу наименьших квадратов. Получено совместное асимптотическое распределение ошибок оценивания. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова:
Пороговая авторегрессия, метод наименьших квадратов, последовательные оценки, асимптотическое распределение.

Введение

Идентификация вида зависимости между наблюдениями за стохастической динамической системой является одной из актуальных проблем в задачах, связанных с управлением, фильтрацией, прогнозированием. Как в технике, так и в экономике широкое применение получили линейные модели авторегрессии [1–5]. Однако на практике ограничение линейной зависимости не всегда позволяет отследить динамику реального процесса. Так в последние годы представляет интерес модель пороговой авторегрессии, функция динамики которой является кусочно-линейной. Рассмотрим модель пороговой авторегрессии первого порядка вида

$$X_k = \begin{cases} \theta_1 X_{k-1} + \varepsilon_k, & \text{при } X_{k-1} \le 0, \\ \theta_2 X_{k-1} + \varepsilon_k, & \text{при } X_{k-1} > 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\{X_k\}_{k\ge 0}$ – наблюдаемый процесс; $X_0=0$, $\{\varepsilon_k\}_{k\ge 1}$ – шумовая последовательность; θ_1, θ_2 – неизвестные параметры модели.

Рассмотрим задачу оценивания неизвестных параметров θ_1, θ_2. В работе [6] показано, что оценки параметров по методу наименьших квадратов (МНК) являются состоятельными тогда и только тогда, когда $\theta_1\le 1$, $\theta_1\le 1$, а в работе [7] показана совместная асимптотическая нормальность оценок в области, где процесс X_k является эргодическим $\{(\theta_1, \theta_2):\theta_1<1, \theta_2<1, \theta_1\theta_2<1\}$.

В данной работе для восстановления неизвестных параметров θ_1, θ_2 предлагается использовать последовательную процедуру на основе метода наименьших квадратов, когда число наблюдений при построении оценок не фиксировано, а определяется согласно некоторому правилу остановки.

Основные результаты

Будем предполагать, что последовательность шумов $\{\varepsilon_k\}_{k\ge 1}$ – это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной всюду положительной плотностью, причем $E\varepsilon_1=0$, $E\varepsilon_1^2=1$.

Для построения процедуры оценивания неизвестных параметров θ_1, θ_2 для каждого $H>0$ введем моменты остановки

$$\tau_j(H) = \inf\{n : \sum_{k=2}^{n} y_{k-1,j}^2 \ge H\},$$
$$\text{(здесь и далее } j=1,2), \qquad (2)$$

при $y_{k,1}=(X_k)^-$, $y_{k,2}=(X_k)^+$, где $(x)^-=\min(x,0)$, $(x)^+=\max(x,0)$. Пусть $0<\alpha_j(H)\le 1$ такие, что

$$\sum_{k=2}^{\tau_j(H)-1} y_{k-1,j}^2 + \alpha_j(H) y_{\tau_j(H)-1,j}^2 = H.$$

Обозначим

$$\beta_{k,j}(H) = \chi_{\{k<\tau_j(H)\}} + \alpha_j(H)\chi_{\{k=\tau_j(H)\}}, \quad k\ge 2, \qquad (3)$$

где $\chi_{\{\bullet\}}$ – индикаторная функция. Запишем последовательные оценки МНК

$$\hat\theta_j(H) = \frac{\sum_{k=2}^{\tau_j(H)} \beta_{k,j}(H) y_{k-1,j} X_k}{\sum_{k=2}^{\tau_j(H)} \beta_{k,j}(H) y_{k-1,j}^2} = \frac{1}{H}\sum_{k=2}^{\tau_j(H)} \beta_{k,j}(H) y_{k-1,j} X_k. \qquad (4)$$

При этом ошибка оценивания параметра θ_j записывается в виде

$$\hat\theta_j(H) - \theta_j = \frac{1}{H}\sum_{k=2}^{\tau_j(H)} \beta_{k,j}(H) y_{k-1,j}\varepsilon_k. \qquad (5)$$

Выбор коэффициентов $\beta_{k,j}(H)$ сделан, как и в [8], для того, чтобы оценки (4) в отличие от обычных оценок МНК обладали свойством несмещенности, т. е. $E\hat\theta_j(H)=\theta_j$.

Недостаток обычных оценок МНК состоит в том, что их асимптотическое распределение зависит от моментов процесса X_k в стационарном режиме (см. [4]), которые не вычисляются аналитически. Это затрудняет построение доверительных интервалов для неизвестных параметров θ_1, θ_2.

Следующая теорема показывает, что оценки $\hat\theta_1(H)$, $\hat\theta_2(H)$ асимптотически независимы, а их предельное распределение является стандартным гауссовым.

Теорема 1. Для любого компактного множества $K\subset\Theta$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} \sup_{x_1,x_2\in R} \left| \begin{array}{l} P(\sqrt{H}(\hat\theta_1(H)-\theta_1)\le x_1, \\ \sqrt{H}(\hat\theta_2()H-\theta_2)\le x_2) - \\ -\Phi(x_1)\Phi(x_2) \end{array} \right| = 0,$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Замечание 1. Теорема 1 устанавливает, что оценки (4) обладают свойством равномерной по параметрам совместной асимптотической нормальности, когда параметры θ_1, θ_2 принимают значения в области $\Theta=\{\{(\theta_1,\theta_2):\theta_1<1,\ \theta_2<1,\ \theta_1\theta_2<1\}$. Известно, что для обычных оценок МНК данное свойство не выполнено.

Замечание 2. Теорема 1 позволяет строить доверительную область для неизвестных параметров θ_1, θ_2 с заданным коэффициентом доверия.

Результаты численного моделирования

Для применения предложенных оценок на практике, необходимо определить при каком уровне порога H найденное в теореме 1 асимптотическое распределение может быть использовано для построения доверительных интервалов неизвестных параметров. Кроме того, представляет интерес поведение распределения оценок на границе допустимой области параметров. Поэтому было проведено имитационное моделирование процесса (1) с гауссовыми шумами. Для генерации псевдослучайных величин $\{\varepsilon_k\}_{k\geq1}$ использован алгоритм из [9], а для построения величин $\{X_k\}_{k\geq1}$ – рекуррентная формула (1) с $X_0=0$. Полученные наблюдения использовались для построения оценок (4). На рисунке приводятся оценки плотностей распределений нормированных уклонений

$$\sqrt{H}(\hat{\theta}_j(H)-\theta_j),$$

построенные по 10000 повторений процедуры оценивания при $H=50$ для внутренней точки $\theta_1=0{,}2$, $\theta_2=0{,}85$ (рисунок, *а* и *б*) и точки $\theta_1=0{,}8$, $\theta_2=1{,}25$, лежащей на границе области Θ (рисунок, *в* и *г*). Непрерывная линия показывает теоретическую предельную плотность, прерывистая – оценки плотностей нормированных уклонений.

Из графиков видно, что оценки плотностей распределений ошибок достаточно хорошо аппроксимируют теоретическую предельную плотность, как для внутренней точки, так и для точки на границе допустимой области значений параметров.

Рассмотрим задачу построения доверительной области неизвестных параметров, когда ширина доверительной области по каждому параметру одинакова. Для этого при заданном уровне доверия α необходимо найти x такое, что

$$P(\sqrt{H}(\hat{\theta}_1(H)-\theta_1)\leq x, \sqrt{H}(\hat{\theta}_2(H)-\theta_2)\leq x)=\alpha.$$

Тогда доверительная область будет иметь вид

$$\{(\theta_1,\theta_2):\hat{\theta}_j(H)-\frac{x}{\sqrt{H}}\leq\theta_j\leq\hat{\theta}_j(H)+\frac{x}{\sqrt{H}},\ j=1,2\}.$$

Согласно теореме 1

$$P(\sqrt{H}(\hat{\theta}_1(H)-\theta_1)\leq x, \sqrt{H}(\hat{\theta}_2(H)-\theta_2)\leq x)\approx(\Phi(x))^2,$$

поэтому $x\approx\Phi^{-1}(\sqrt{\alpha})$. При $H=100$ для уровня доверия 0,9 получаем область

$$\{(\theta_1,\theta_2):\hat{\theta}_j(H)-0{,}16322\leq\theta_j\leq\hat{\theta}_j(H)+0{,}16322,\ j=1,2\}.$$

Заключение

Предложена последовательная процедура оценивания неизвестных параметров пороговой авторегрессии. Показано, что в отличие от обычных

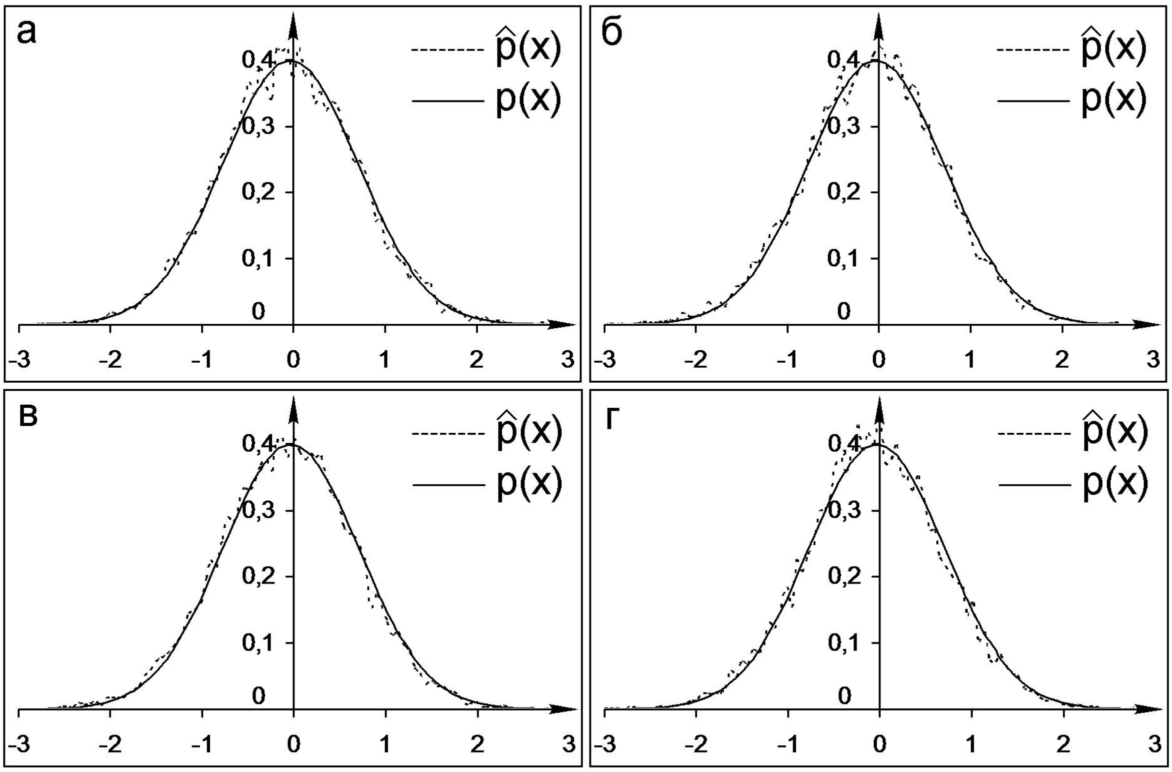

Рисунок. *Теоретическая предельная плотность p(x) (непрерывная линия) и ее оценка p̂(x) (пунктирная линия) для: а)* $\sqrt{50}(\hat{\theta}_1(50)-0{,}2)$; *б)* $\sqrt{50}(\hat{\theta}_2(50)-0{,}85)$; *в)* $\sqrt{50}(\hat{\theta}_1(50)-0{,}8)$; *г)* $\sqrt{50}(\hat{\theta}_2(50)-1{,}25)$

МНК оценки (4) обладают следующими свойствами:

- несмещенность;
- независимость предельного распределения от моментов процесса в стационарном режиме;
- равномерная по параметрам совместная асимптотическая нормальность.

Последнее свойство может быть использовано для построения доверительной области неизвестных параметров с заданным уровнем доверия. Представлены результаты построения плотностей нормированных уклонений оценок, полученные путем имитационного моделирования процесса (1).

Приложение

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Для любого компактного множества $K\subset\Theta$ и любого $\delta>0$

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,j}^2>\delta\sum_{k=2}^{n} y_{k-1,j}^2\right)=0, \qquad (5)$$

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(y_{n,j}^2>a)=0, \text{ для любого } n\ge 2. \qquad (6)$$

Доказательство леммы 1. Поскольку K компактное множество, то его можно покрыть конечным числом прямоугольников, каждый из которых содержится в одной из областей

$$\Theta_1=\{(\theta_1,\theta_2):\ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1\},$$
$$\Theta_2=\{(\theta_1,\theta_2):\ \theta_1\le 0,\ \theta_2\le 0,\ \theta_1\theta_2<1\},$$
$$\Theta_3=\{(\theta_1,\theta_2):\ \theta_1\le 0,\ 0<\theta_2<1\},$$
$$\Theta_4=\{(\theta_1,\theta_2):\ 0<\theta_1<1,\ \theta_2\le 0\}.$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $K=\{(\theta_1,\theta_2):a_1\le\theta_1\le b_1,\ a_2\le\theta_2\le b_2\}$ и целиком содержится в одной из этих подобластей.

Случай $K\subset\theta_1$. По индукции можно показать, что для всех $(\theta_1,\theta_2)\in K$ $V_k\le X_k\le U_k$ при $V_k=\max(b_1,b_2)(V_{k-1})^-+\varepsilon_k$, $U_k=\max(b_1,b_2)(U_{k-1})^-+\varepsilon_k$, где $(V_k)^-=\min(V_k,0)$, $(U_k)^-=\min(U_k,0)$, $V_0=U_0=0$. Обозначим

$$u_{k,j}=\sqrt{U_k^2+V_k^2},\quad v_{k,1}=(U_k)^-,\quad v_{k,2}=(V_k)^+,$$

тогда $v^2_{k,j}\le y^2_{k,j}\le u^2_{k,j}$ для любых $(\theta_1,\theta_2)\in K$ и всех k, j. Поэтому при $m\to\infty$, $a\to\infty$

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,j}^2>\delta\sum_{k=2}^{n} y_{k-1,j}^2\right)\le$$
$$\le P\left(\exists n\ge m:\ \frac{u_{n,j}^2}{n}>\frac{1}{n}\delta\sum_{k=2}^{n} v_{k-1,j}^2\right)\to 0,$$

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(y_{n,j}^2>a)\le P(u_{n,j}^2>a)\to 0 \quad \text{для всех } n,$$

поскольку с вероятностью единица

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} v_{k-1,j}^2\to\sigma_j^2>0,\quad \frac{u_{n,j}^2}{n}\to 0,$$

т. к. процессы V_k, U_k являются геометрически эргодическими (см. [4]).

Случай $K\subset\Theta_2$. Как и в первом случае, для всех $(\theta_1,\theta_2)\in K$ можно показать, что

$$V_k\le X_k\le U_k,$$
$$\text{при } V_k=a_2(U_{k-1})^++\varepsilon_k,\ U_k=a_1(V_{k-1})^-+\varepsilon_k.$$

Пусть $u_k=U_{2k}$, $v_k=V_{2k}$, $\xi_k=\varepsilon_{2k}$, $\eta_k=\varepsilon_{2k-1}$. Тогда

$$u_k=a_1(a_2(u_{k-1})^++\eta_k)^-+\xi_k,$$
$$v_k=a_2(a_1(v_{k-1})^-+\eta_k)^++\xi_k.$$

Согласно теореме 1 из [10], процессы u_k, v_k будут геометрически эргодическими, если существуют непрерывная функция $g(x)$, $\delta>0$ и компакт A ненулевой меры, такие, что $g(x)\ge 1$ для любого $x\in A$ и $E[g(u_k)/u_{k-1}=x]\le(1-\delta)g(x)$ для любого $x\in A^c$. Пусть $g(x)=1+|x|$. Тогда

$$E[g(u_k)/u_{k-1}=x]=$$
$$1+E[a_1(a_2(x)^++\varepsilon_1)^-+\varepsilon_2]\le 1+(1-\alpha)|x|+C,$$

где $\alpha=1=a_1a_2>0$, $C=(1-a_1)E|\varepsilon|<\infty$. Положим $\delta=\alpha/2$, тогда для $x\in A^c$

$$1+(1-\alpha)|x|+C=$$
$$=(1-\delta)g(x)+\delta(1-|x|)+C\le(1-\delta)g(x),$$
$$\text{если } A=\{x:\ x\le 1+C/\delta\}.$$

Эргодичность v_k проверяется аналогично. Далее воспользуемся неравенствами

$$y_{2k+1,j}^2\le V_{2k+1}^2+U_{2k+1}^2\le a_2^2u_k^2+a_1^2v_k^2+2\varepsilon_{2k}^2,$$
$$y_{2k,j}^2\le V_{2k}^2+U_{2k}^2\le u_k^2+v_k^2,$$
$$y_{2k,1}\ge(U_{2k})^-=(u_k)^-,\quad y_{2k,2}\ge(V_{2k})^+=(v_k)^+.$$

Следовательно

$$y_{k,j}^2\le a_1^2r^2+(1+a_1^2+a_2^2)(u_{[k/2]}^2+v_{[k/2]}^2)+2\varepsilon_k^2=\zeta_k.$$

Поэтому в силу геометрической эргодичности u_k, v_k, при $m\to\infty$, $a\to\infty$

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,1}^2>\delta\sum_{k=2}^{n} y_{k-1,1}^2\right)\le$$
$$\le P\left(\exists n\ge m:\ \frac{\zeta_n}{n}>\frac{1}{n}\delta\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}((u_k)^-)^2\right)\to 0,$$
$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,2}^2>\delta\sum_{k=2}^{n} y_{k-1,2}^2\right)\le$$
$$\le P\left(\exists n\ge m:\ \frac{\zeta_n}{n}>\frac{1}{n}\delta\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}((v_k)^+)^2\right)\to 0,$$
$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(y_{n,j}^2>a)\le P(\zeta_n>a)\to 0 \text{ для всех } n.$$

Случай $K\subset\Theta_3$. Покажем по индукции, что для всех $(\theta_1,\theta_2)\in K$

$$\varepsilon_k\le X_k\le\eta_{k-1}+\varepsilon_k,\ \text{где}\ \eta_k=(b_2-a_1)\sum_{j=1}^{k}|\varepsilon_j|\,b_2^{k-j}. \qquad (7)$$

При k=1 $X_1=\varepsilon_1$, поэтому (7) выполнено. Пусть это неравенство выполнено при $k=p$. Покажем, что (7) выполнено при $k=p+1$. Выполнение левого неравенства очевидно. Для проверки правого неравенства рассмотрим оценки

$$X_{p+1} = \theta_1(X_p)^- + \theta_2(X_p)^+ + \varepsilon_{p+1} \le$$
$$\le a_1(X_p)^- + b_2(X_p)^+ + \varepsilon_{p+1} \le$$
$$\le a_1(\varepsilon_p)^- + b_2\left((b_2-a_1)\sum_{j=1}^{p-1}\left|\varepsilon_j\right|b_2^{p-1-j} + \varepsilon_p\right)^+ + \varepsilon_{p+1} \le$$
$$\le (b_2-a_1)\sum_{j=1}^{p-1}\left|\varepsilon_j\right|b_2^{p-j} + a_1(\varepsilon_p)^- + b_2(\varepsilon_p)^+ + \varepsilon_{p+1} \le$$
$$\le (b_2-a_1)\sum_{j=1}^{p}\left|\varepsilon_j\right|b_2^{p-j} + \varepsilon_{p+1}.$$

Таким образом (7) выполнено. Для некоторого целого M и $\delta>0$ рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((\eta_{k-1}+\varepsilon_k)^-)^2 \ge \lim_{n\to\infty}\delta^2\sum_{k=1}^{n}\chi_{\{\eta_{k-1}+\varepsilon_k<\delta\}} \ge$$
$$\ge \delta^2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{M}\chi_{\{\varepsilon_k<\delta-p\}}\chi_{\{p\le\eta_{k-1}<p+1\}} \ge$$
$$\ge \delta^2\sum_{p=0}^{M}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_{\{\varepsilon_k<\delta-p\}}\chi_{\{p\le\eta_{k-1}<p+1\}}.$$

Отметим, что с вероятностью единица существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\eta_k=\eta<\infty$, например, по теореме Колмогорова о «трех рядах». Кроме этого по усиленному закону больших чисел для любых δ и p $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_{\{\varepsilon_k<\delta-p\}} = P(\varepsilon_1>\delta-p)>0$. Поэтому по лемме Теплица с вероятностью 1 для любых δ и p

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_{\{\varepsilon_k<\delta-p\}}\chi_{\{p\le\eta_{k-1}<p+1\}} = P(\varepsilon_1<\delta-p)\chi_{\{p\le\eta<p+1\}}.$$

Используя последнее равенство при $M\to\infty$, получаем оценку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((\eta_{k-1}+\varepsilon_k)^-)^2 \ge$$
$$\ge \delta^2\sum_{p=0}^{\infty}P(\varepsilon_1<\delta-p)\chi_{\{p\le\eta<p+1\}}>0.$$

В силу (7) и последнего неравенства при $m\to\infty$

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K}P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,1}^2>\delta\sum_{k=2}^{n}y_{k-1,1}^2\right)\le$$
$$\le P\left(\begin{array}{l}\exists n\ge m:\ \dfrac{2(\eta_{n-1}^2+\varepsilon_n^2)}{n}> \\ >\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}((\eta_{k-2}+\varepsilon_{k-1})^-)^2\end{array}\right)\to 0.$$

Используя (7), имеем оценки

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K}P\left(\exists n\ge m:\ y_{n,1}^2>\delta\sum_{k=2}^{n}y_{k-1,1}^2\right)\le$$
$$\le P\left(\exists n\ge m:\ \frac{2(\eta_{n-1}^2+\varepsilon_n^2)}{n}>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((\varepsilon_{k-1})^+)^2\right)\to 0.$$
$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K}P(y_{n,j}^2>2(\eta_{n-1}^2+\varepsilon_n^2))\le$$
$$\le P(2(\eta_{n-1}^2+\varepsilon_n^2)>a)\to 0.$$

Случай $K\subset\Theta_4$ показывается аналогично рассмотренному случаю. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $v=(v_1,v_2)^T$ – некоторый вектор, такой, что $v_1^2+v_2^2=1$. Рассмотрим линейную комбинацию нормированных ошибок оценивания

$$\sum_{i=1}^{2}v_i\sqrt{H}(\hat{\theta}_i(H)-\theta_i)=\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=2}^{\tau_i(H)}v_i\beta_{k,i}(H)y_{k-1,i}\varepsilon_k.$$

Введем следующие случайные величины $g_k(H)$ и момент остановки $\tau(H)$

$$g_{k-1}(H)=\sum_{i=1}^{2}v_i\beta_{i,k}(H)y_{k-1,i}\chi_{\{k\le\tau_i(H)\}},$$
$$\tau(H)=\inf\left\{n:\ \sum_{k=2}^{n}(g_{k-1}(H))^2\ge H\right\}.$$

Используя (2), (3), получаем

$$\tau(H)=\max(\tau_1(H),\tau_2(H)),$$
$$\sum_{k=2}^{\tau(H)}(g_{k-1}(H))^2=H,$$
$$\sum_{k=2}^{\tau(H)}g_{k-1}(H)\varepsilon_k=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=2}^{\tau_i(H)}v_i\beta_{k,i}(H)y_{k-1,i}\varepsilon_k.$$

Утверждение теоремы 1 будет выполнено, если показать, что для любого вектора v ($v_1^2+v_2^2=1$) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{H\to\infty}\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K}\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{k=2}^{\tau(H)}g_{k-1}(H)\varepsilon_k\le x\right)-\Phi(x)\right|=0.$$

Введем множество

$$\Omega_H=\{\omega:\ g_n(H)=\tilde{g}_n(H)\ \text{для любого}\ n<\tau(H)\},$$

где $\tilde{g}_n(H)=g_n(H)\chi_{\{g_n^2(H)\le\delta^2H\}}+\delta\sqrt{H}\chi_{\{g_n^2(H)>\delta^2H\}}$.

Лемма 2.

$$\lim_{H\to\infty}\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K}P(\Omega_H^c)=0.$$

Доказательство леммы 2. Имеем включение

$$\Omega_H=\{g_n(H)\ne\tilde{g}_n(H)$$
$$\text{для нек.}\ n<\tau(H)\}=\{\cdot,n<p\}+\{\cdot,n\ge p\}\subseteq$$
$$\subseteq\bigcup\nolimits_{n=1}^{p-1}\{g_n^2(H)\ge\delta^2H\}\bigcup\{g_n^2(H)\ge$$
$$\ge\delta^2\sum\nolimits_{k=2}^{n}g_{k-1}^2(H)\ \text{для нек.}\ p\le n<\tau(H)\},$$

где

$$\{g_n^2(H) \ge \delta^2 H\} \subseteq \bigcup_{i=1}^2 \{y_{n\,i}^2 > \delta^2 H/2\},$$

$$\{g_n^2(H) \ge \delta^2 \sum\nolimits_{k=2}^n g_{k-1}^2(H) \text{ для нек. } p \le n < \tau(H)\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^2 \{(y_{n,i}^2) \ge \delta^2/2 \sum\nolimits_{k=2}^n (y_{k-1i}^2) \text{ для нек. } n \ge p\}.$$

Отсюда, в силу леммы 1, следует утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{\tau(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{\tau(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k \chi_{\{\Omega_H\}} + \Delta(H).$$

где $\Delta(H) = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum\nolimits_{k=2}^{\tau(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k \chi_{\{\Omega_H^c\}}$. Используя это равенство и определение множества Ω_H, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{\tau(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} \tilde{g}_{k-1}(H)\varepsilon_k \chi_{\{\Omega_H\}} + \Delta(H),$$

где $T(H) = \inf\{n: \sum_{k=2}^{n} (\tilde{g}_{k\text{-}1}(H))^2 \ge H\}$.

Для каждого $\delta>0$ рассмотрим разложение

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n' - E\varepsilon_n' + \varepsilon_n'' - E\varepsilon_n'',$$

где $\varepsilon_n' = \varepsilon_n \chi_{\{|\varepsilon_n| \le 1/\delta\}}, \varepsilon_n'' = \varepsilon_n \chi_{\{|\varepsilon_n| > 1/\delta\}}$. Используя это разложение, получаем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{\tau(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k = \xi_{H,\delta} + \eta_{H,\delta},$$

где

$$\xi_{H,\delta} = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} \tilde{g}_{k-1}(H)(\varepsilon_k' - E\varepsilon_k'),$$

$$\eta_{H,\delta} = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} \tilde{g}_{k-1}(H)(\varepsilon_k'' - E\varepsilon_k'') + \Delta(H).$$

По теореме о равномерной сходимости мартингалов (см. [11], лемма 2.1)

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} \left| P(\xi_{H,\delta} \le t) - \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) \right| \le \rho\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{H}}\right),$$

где функция $\rho(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Для некоторого $\lambda>0$ оценим вероятность

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(|\eta_{H,\delta}| > \lambda) \le$$

$$\le \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} \tilde{g}_{k-1}(H)(\varepsilon_k'' - E\varepsilon_k'') > \frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+ \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P\left(\Delta(H)\chi_{\{\Omega_H^c\}} > \frac{\lambda}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{4}{\lambda}\frac{1}{H} \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} \left\{ E\left(\sum_{k=2}^{T(H)} \tilde{g}_{k-1}(H)(\varepsilon_k'' - E\varepsilon_k'')\right)^2 \right\} +$$

$$+ \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(\Omega_H^c) \le \frac{4}{\lambda}(1+\delta^2)(1-D\varepsilon_1') + \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} P(\Omega_H^c).$$

Далее получаем оценку

$$\left| P\left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k \le t\right) - \Phi(t) \right| \le$$

$$\le \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k \le t\right) - P(\xi_{H,\delta} \le t) \right| +$$

$$+ \left| P(\xi_{H,\delta} \le t) - \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) \right| + \left| \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) - \Phi(t) \right| \le$$

$$\le \omega(F_{\xi_{H,\delta}}; R, \lambda) + P(|\eta_{H,\delta}| > \lambda) +$$

$$+ \rho\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{H}}\right) + \sup_{t\in R} \left| \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) - \Phi(t) \right| \le$$

$$\le \omega\left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right); R, \lambda\right) + P(|\eta_{H,\delta}| > \lambda) +$$

$$+ 3\rho\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{H}}\right) + \sup_{t\in R} \left| \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) - \Phi(t) \right|.$$

Здесь $\omega(\cdot)$ – модуль непрерывности функции, который задается равенством

$$\omega(f; E, \lambda) = \sup_{x',x''\in E, |x'-x''|<\lambda} |f(x') - f(x'')|.$$

Таким образом, получаем

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} \sup_{t\in R} \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=2}^{T(H)} g_{k-1}(H)\varepsilon_k \le t\right) - \Phi(t) \right| \le$$

$$\le \omega(\Phi(t); R, \lambda) + 3\sup_{t\in R} \left| \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{D\varepsilon_1'}}\right) - \Phi(t) \right| +$$

$$+ 3\rho\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{H}}\right) + \frac{4}{\lambda}(1+\delta^2)(1-D\varepsilon_1') + \sup_{\theta\in K} P_\theta(\Omega_H^c).$$

Переходя к пределу при $H\to\infty$, затем при $\delta\to 0$, и окончательно при $\lambda\to 0$, получаем утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.
3. Корнфельд И.П., Штейнберг Ш.Е. Оценивание параметров линейных и нелинейных стохастических систем методом осредненных невязок // Автоматика и телемеханика. – 1986. – Т. 18. – № 1. – С. 1651–1672.
4. Фетисов В.Н. Аппроксимация случайного процесса процессом авторегрессии в задачах стохастического управления // Автоматика и телемеханика. – 1994. – Т. 22. – № 4. – С. 1917–1930.
5. Тырсин А.Н. Идентификация зависимостей на основе моделей авторегрессии // Автометрия. – 2005. – Т. 41. – № 1. – С. 43–49.
6. Pham D.T., Chan K.S., Tong H. Strong Consistency of the least squares estimator for a non-ergodic threshold autoregressive model // Statistica Sinica. – 1991. – V. 1. – P. 361–369.

7. Petruccelly J.D., Woolford S.W. A threshold AR(1) model // J. Appl. Prob. – 1984. – V. 21. – P. 270–286.
8. Борисов В.З., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – Т. 5. – № 10. – С. 58–64.
9. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. – 2nd edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 994 p.
10. Feigin P.D., Tweedie R.L. Random coefficient autoregressive processes: A Markov Chain analysis of stationary and finiteness of moments // Journal of Time Series Analysis. – 1985. – V. 6. – № 1. – P. 1–14.
11. Lai T.L., Siegmund D. Fixed-Accuracy Estimation of an Autoregressive Parameter // The Annals of Statistics. – 1983. – V. 11. – № 2. – P. 478–485.

Поступила 26.01.2009 г.

УДК 519.2

ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

А.В. Китаева*, Г.М. Кошкин

*Томский политехнический университет
Томский государственный университет
Отдел проблем информатизации ТНЦ СО РАН, г. Томск
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассматриваются свойства оценок базовых функционалов, построенных по наблюдениям, удовлетворяющим условию сильного перемешивания. Показано, что порядок скорости сходимости в среднеквадратическом оптимальных ядерных оценок базовых функционалов для слабозависимых наблюдений такой же, как и для независимых. Определен также порядок скорости сходимости в среднеквадратическом четвертых моментов отклонений оценок базовых функционалов.

Ключевые слова:
Функционалы от плотности распределения, процессы сильного перемешивания, ядерное оценивание, сходимость в среднеквадратическом.

1. Постановка задачи

Статья продолжает работу [1], где поставлена задача оценивания характеризационного функционала (1) [1], являющегося функцией от базовых функционалов, и предлагается оценка подстановки, элементами которой являются рекуррентные ядерные оценки базовых функционалов с векторным параметром размытости, построенные по независимым наблюдениям. Предположение о независимости наблюдений существенно сужает область приложения модели, поскольку в стохастических динамических системах выходные переменные являются, как правило, стохастически связанными. Как отмечено, к примеру в [2. С. 102], «...the assumption of independence is not acceptable in many economic and financial models...». Зависимость наблюдений сильно усложняет анализ свойств оценок, поэтому в данной работе мы отказались от рекуррентной структуры оценок с масштабированием по каждой компоненте, положив $h_{lk}\equiv h_n$. Далее будут использоваться обозначения, введенные в [1].

Будем считать наблюдения $Z_l=(X_l,Y_l)$, $l=\overline{1,n}$ строго стационарным эргодическим процессом, удовлетворяющим дополнительно условию сильного перемешивания (α-перемешиванию) с коэффициентом перемешивания

$$\alpha(k)=\sup_t \sup_{A\in F_{1,t}\, B\in F_{t+k,\infty}} \left|P(AB)-P(A)P(B)\right|,$$

где σ-алгебра $F_{a,b}=\sigma(Z_l, a\le l\le b)$ порождена случайными величинами $Z_a,...,Z_b$. Сильное перемешивание (с. п.) означает, что $\alpha(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Асимптотическая среднеквадратическая ошибка (СКО) оценки Надарая-Ватсона функции регрессии для с. п. наблюдений была найдена только в 1999 г. [3]. Заметим, что α-перемешивание относится к слабому типу зависимости наблюдений и следует из других обычно рассматриваемых типов перемешивания: β-перемешивания и ρ-перемешивания [4]. Условию с. п. удовлетворяет устойчивый процесс авторегрессии; оцениванию характеристик процессов такого типа посвящены, например, работы [5, 6].

В качестве непараметрических ядерных оценок базовых функционалов $a(x)=a^{(0j)}(x)$ и их производных $a^{(1j)}(x)$ (формулы (2), (3) в [1]) в точке x возьмем статистики, аналогичные статистикам (6) в [1] при $h_{lk}\equiv h_n$:

$$a_n^{(rj)}(x)=\frac{1}{nh_n^{m+r}}\sum_{l=1}^{n} g(Y_l)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-X_l}{h_n}\right),\quad r=0,1,$$

где последовательность чисел $(h_n)\downarrow 0$,

$$\mathbf{K}^{(0j)}(u)=\mathbf{K}(u)=\prod_{i=1}^{m}K(u_i),$$

$$\mathbf{K}^{(1j)}(u)=\frac{\partial\mathbf{K}(u)}{\partial u_j}=$$

$$=K(u_1)...K(u_{j-1})K^{(1)}(u_j)K(u_{j+1})...K(u_m),$$

$$K^{(1)}(u_j)=\frac{dK(u_j)}{du_j}.$$