7. Petruccelly J.D., Woolford S.W. A threshold AR(1) model // J. Appl. Prob. – 1984. – V. 21. – P. 270–286.
8. Борисов В.З., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – Т. 5. – № 10. – С. 58–64.
9. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. – 2nd edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 994 p.
10. Feigin P.D., Tweedie R.L. Random coefficient autoregressive processes: A Markov Chain analysis of stationary and finiteness of moments // Journal of Time Series Analysis. – 1985. – V. 6. – № 1. – P. 1–14.
11. Lai T.L., Siegmund D. Fixed-Accuracy Estimation of an Autoregressive Parameter // The Annals of Statistics. – 1983. – V. 11. – № 2. – P. 478–485.

Поступила 26.01.2009 г.

УДК 519.2

ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

А.В. Китаева*, Г.М. Кошкин

*Томский политехнический университет
Томский государственный университет
Отдел проблем информатизации ТНЦ СО РАН, г. Томск
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассматриваются свойства оценок базовых функционалов, построенных по наблюдениям, удовлетворяющим условию сильного перемешивания. Показано, что порядок скорости сходимости в среднеквадратическом оптимальных ядерных оценок базовых функционалов для слабозависимых наблюдений такой же, как и для независимых. Определен также порядок скорости сходимости в среднеквадратическом четвертых моментов отклонений оценок базовых функционалов.

Ключевые слова:
Функционалы от плотности распределения, процессы сильного перемешивания, ядерное оценивание, сходимость в среднеквадратическом.

1. Постановка задачи

Статья продолжает работу [1], где поставлена задача оценивания характеризационного функционала (1) [1], являющегося функцией от базовых функционалов, и предлагается оценка подстановки, элементами которой являются рекуррентные ядерные оценки базовых функционалов с векторным параметром размытости, построенные по независимым наблюдениям. Предположение о независимости наблюдений существенно сужает область приложения модели, поскольку в стохастических динамических системах выходные переменные являются, как правило, стохастически связанными. Как отмечено, к примеру в [2. С. 102], «...the assumption of independence is not acceptable in many economic and financial models...». Зависимость наблюдений сильно усложняет анализ свойств оценок, поэтому в данной работе мы отказались от рекуррентной структуры оценок с масштабированием по каждой компоненте, положив $h_{lk}\equiv h_n$. Далее будут использоваться обозначения, введенные в [1].

Будем считать наблюдения $Z_l=(X_l,Y_l)$, $l=\overline{1,n}$ строго стационарным эргодическим процессом, удовлетворяющим дополнительно условию сильного перемешивания (α-перемешиванию) с коэффициентом перемешивания

$$\alpha(k)=\sup_t \sup_{A\in F_{1,t},\, B\in F_{t+k,\infty}} \left|P(AB)-P(A)P(B)\right|,$$

где σ-алгебра $F_{a,b}=\sigma(Z_l,a\le l\le b)$ порождена случайными величинами $Z_a,\ldots,Z_b$. Сильное перемешивание (с. п.) означает, что $\alpha(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Асимптотическая среднеквадратическая ошибка (СКО) оценки Надарая-Ватсона функции регрессии для с. п. наблюдений была найдена только в 1999 г. [3]. Заметим, что α-перемешивание относится к слабому типу зависимости наблюдений и следует из других обычно рассматриваемых типов перемешивания: β-перемешивания и ρ-перемешивания [4]. Условию с. п. удовлетворяет устойчивый процесс авторегрессии; оцениванию характеристик процессов такого типа посвящены, например, работы [5, 6].

В качестве непараметрических ядерных оценок базовых функционалов $a(x)=a^{(0j)}(x)$ и их производных $a^{(1j)}(x)$ (формулы (2), (3) в [1]) в точке x возьмем статистики, аналогичные статистикам (6) в [1] при $h_{lk}\equiv h_n$:

$$a_n^{(rj)}(x)=\frac{1}{nh_n^{m+r}}\sum_{l=1}^{n} g(Y_l)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-X_l}{h_n}\right),\quad r=0,1,$$

где последовательность чисел $(h_n)\downarrow 0$,

$$\mathbf{K}^{(0j)}(u)=\mathbf{K}(u)=\prod_{i=1}^{m}K(u_i),$$

$$\mathbf{K}^{(1j)}(u)=\frac{\partial \mathbf{K}(u)}{\partial u_j}=$$

$$=K(u_1)\ldots K(u_{j-1})K^{(1)}(u_j)K(u_{j+1})\ldots K(u_m),$$

$$K^{(1)}(u_j)=\frac{dK(u_j)}{du_j}.$$

2. Асимптотические свойства ядерных оценок базовых функционалов для зависимых наблюдений

Нетрудно видеть, что при доказательстве лемм 1–3 из [1] зависимость выборочных значений не играет роли, поэтому результаты, связанные с несмещенностью оценок $a_n^{(rj)}(x)$ и скоростью сходимости смещений, остаются справедливыми и в нашем случае. Заметим только, что при $h_{lk} \equiv h_n$ соотношение (12) в [1] будет тривиально выполняться при $S(\nu)=1$, и для скорости сходимости смещений в лемме 3 [1] будет справедливо равенство

$$\left| b(a_n^{(rj)}(x)) - \omega_\nu^{(rj)}(x) h_n^\nu \right| = o(h_n^\nu). \qquad (1)$$

Все асимптотические результаты получены, очевидно, при $n \to \infty$, и далее это подразумевается.

Найдем главную часть ковариаций оценок $a_n^{(rj)}(x)$ для с. п. наблюдений.

Обозначим

$$a^{+}_{1(1+\tau),tp}(x,y) = \int_{R^2} | g_t(v) g_p(q) | \, f_{1(1+\tau)}(x,v,y,q)\, dv\, dq,$$

где $f_{1(1+\tau)}(z,p)$ – $2(m+1)$-мерная плотность распределения выборочных величин $(Z_1, Z_{1+\tau})$, $\tau \geq 1$. Заметим, что для любого $j,k=\overline{1,m}$

$$\int_{R^m} \mathbf{K}^{(1j)}(u)\, du = \int_{R^m} \mathbf{K}^{(1k)}(u)\, du = \int_{R^m} \mathbf{K}^{(1)}(u)\, du$$

в силу мультипликативности ядра.

Нумерация лемм продолжает нумерацию статьи [1].

Лемма 5 (ковариация оценок $a_{tn}^{(rj)}(x)$ и $a_{pn}^{(qk)}(x)$ для с.п. наблюдений). Пусть для $\beta=t,p$, $\gamma=r,q$:

1) (Z_j) – с. п. последовательность, $\int_0^\infty [\alpha(\tau)]^\lambda d\tau < \infty$ для некоторого $\lambda \in (0,1)$;
2) функции $a_{t,p}(z)$, $a_\beta(z)$, $a_\beta^{\frac{2}{1-\lambda}+}(z)$ – непрерывны в точке x;
3) $\sup\limits_x a_\beta^{1+}(x) < \infty, \quad \sup\limits_x a_\beta^{\frac{2}{1-\lambda}+}(x) < \infty;$
4) $\int \left| K^{(\gamma)}(u) \right| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1, \ \sup\limits_{u \in R^1} | K^{(\gamma)}(u) | < \infty;$
   $\sup\limits_{u \in R^1} | K(u) | < \infty, \quad$ при $m > 1$, $r = 1$ или $q = 1$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n + 1/(n h_n^{m+r+q})) = 0.$

Тогда

$$\left| \operatorname{cov}(a_{tn}^{(rj)}(x), a_{pn}^{(qk)}(x)) \right| \leq$$

$$\leq \frac{24}{n h_n^{m(1+\lambda)+r+q}} [a_t^{\frac{2}{1-\lambda}+}(x)\, a_p^{\frac{2}{1-\lambda}+}(x)]^{\frac{1-\lambda}{2}} \times$$

$$\times [\int_{R^m} \left| \mathbf{K}^{(r)}(u) \right|^{\frac{2}{1-\lambda}} du \int_{R^m} \left| \mathbf{K}^{(q)}(u) \right|^{\frac{2}{1-\lambda}} du]^{\frac{1-\lambda}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty [\alpha(\tau)]^\lambda \, d\tau + o\left(\frac{1}{n h_n^{m(1+\lambda)+r+q}} \right). \qquad (2)$$

Если дополнительно

6) $\lambda < 1/2$;
7) $\sup\limits_{x,y} a^{+}_{1(1+\tau),tp}(x,y) < \infty$, $a_\beta^{\frac{2}{1-2\lambda}+}(z)$ – непрерывна в точке x,
   $\sup\limits_x a_\beta^{\frac{2}{1-2\lambda}+}(x) < \infty, \quad$ то

$$\left| \operatorname{cov}(a_{tn}^{(rj)}(x), a_{pn}^{(qk)}(x)) - \frac{1}{n h_n^{m+r+q}} B_{t,p}^{(r,q)}(x) \right| =$$

$$= o\left(\frac{1}{n h_n^{m+r+q}} \right), \qquad (3)$$

и, в частности, при $t=p$

$$D a_{tn}^{(rj)}(x) \sim \frac{1}{n h_n^{m+2r}} B_{t,t}^{(r,r)}(x).$$

Теорема 1 (СКО оптимальных оценок базовых функционалов для с. п. наблюдений). Если выполнены условия леммы 3 [1], условия 1–4 и 6, 7 леммы 5 при $q=r$, $\beta=t=p=i$ и дополнительно $\omega_{i\nu}^{(rj)}(x) \neq 0$, то имеют место формулы (14) [1].

Теорема 1 следует из теоремы [1] и леммы 5.

Согласно теореме 1 порядок скорости сходимости оптимальных непараметрических оценок базовых функционалов для с. п. наблюдений, равный $\dfrac{2\nu}{m+2(\nu+r)}$, при больших ν как и для независимых наблюдений, приближается к обычному порядку скорости сходимости параметрических оценок, равному 1. Напомним, что целочисленный параметр $\nu \geq 0$ вводится в лемме 3 [1]; он связан со свойствами ядра $K(u)$: показывает минимальный порядок момента ядра, отличного от нуля: $\int u^j K(u) du = \begin{cases} 0, & j < \nu, \\ \text{const} \neq 0, & j = \nu \end{cases}$; и отвечает за скорость сходимости смещения оценок $a_n^{(rj)}(x)$ (см. (1)).

При доказательстве сходимости в среднеквадратическом оценок подстановки функции (1) [1] нам будут нужны следующие результаты, связанные со сходимостью четвертых моментов оценок $a_n^{(rj)}(x)$. Сформулируем и докажем эти результаты сразу для с. п. последовательностей.

Введем обозначения: $f_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1)}(z,s,u,w)$ – плотность распределения выборочных величин

$$\left(Z_1, Z_{i+1}, Z_{i+j+1}, Z_{i+j+k+1} \right), \quad a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,y,x',y') =$$

$$= \int_{R^4} | g_t(v) g_t(s) g_t(v') g_t(s') | \times$$

$$\times f_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1)}(x,v,y,s,x',v',y',s') dv ds dv' ds',$$

$$a^{(2+\delta)+}_{1(1+j)(1+j+k),t}(x,y,x') =$$

$$= \int_{R^3} | g_t(v) g_t(s) g_t(v') |^{2+\delta} f_{1(1+j)(1+j+k)}(x,v,y,s,x',v') dv ds dv',$$

$$a^{(2+\delta)+}_{1(i+1),t}(x,x') = \int_{R^2} | g_t(v) g_t(s) |^{2+\delta} f_{1(1+j)}(x,v,x',s) dv ds,$$

$$1 \leq i,j,k < n, \quad i+j+k \leq n-1;$$

$$M_4(a_{tn}^{(rj)}) = E[a_{tn}^{(rj)}(x) - a_t^{(rj)}(x)]^4,$$

$$S_{tn}^{(rj)} = a_{tn}^{(rj)}(x) - E a_{tn}^{(rj)}(x).$$

Лемма 6 (порядок сходимости четвертых центральных моментов оценок $a_{tn}^{(rj)}(x)$ для с. п. наблюдений). Пусть для r=0 (или 1):

1) (Z_j) – с. п. последовательность, и

$$\int_0^\infty \tau^2[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\,d\tau<\infty \text{ для некоторого } 0<\delta<2;$$

2) $\sup\limits_{u\in R^1}|K^{(r)}(u)|<\infty,\quad \int|K^{(r)}(u)|\,du<\infty;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n+1/(nh_n^{m+2r}))=0;$

4) $\sup\limits_x a_t^{\beta+}(x)<\infty, \beta=0,4;$

5) $\sup\limits_x a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,x,x,x)<\infty,$

$\sup\limits_x a^{(2+\delta)+}_{1(1+j)(1+j+k),t}(x,x,x)<\infty,$

$\sup\limits_x a^{(2+\delta)+}_{1(i+1),t}(x,x)<\infty.$

Тогда для r=0 (или 1)

$$E(S_{tn}^{(rj)})^4=O\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right). \qquad (4)$$

Лемма 7 (порядок сходимости четвертых моментов отклонений $M_4(a_{in}^{(rj)})$ для с. п. наблюдений). Если для r=0 (или 1) выполняются условия лемм 3 [1] и 6, то

$$M_4(a_{tn}^{(rj)})=O\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}+h_n^{4\nu}\right). \qquad (5)$$

3. Доказательства лемм 5–7

Нам понадобится один из результатов работы [7]. Пусть

$$\|X\|_p=(E\,|X|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Утверждение. Если случайные величины X и Y измеримы относительно σ-алгебр F_0^i, и $F_{t+\tau}^\infty$, τ>0 соответственно, для них выполняется условие с. п., $1\le p,q,r<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}=1$, то

$$|\,E\,XY-EX\,EY|\le 12\,\alpha^{\frac{1}{r}}(\tau)\,\|X\|_p\,\|Y\|_q\,.$$

Доказательство леммы 5. Обозначим

$$\xi_{ti}^{(rj)}(x)=\frac{1}{h_n^{m+r}}\,g_t(Y_i)\,\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right).$$

Воспользуемся методикой доказательства теоремы 3 из [8]. Представим ковариацию в виде

$$\mathrm{cov}(a_{tn}^{(rj)}(x),a_{pn}^{(qk)}(x))=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^n \mathrm{cov}(\xi_{ti}^{(rj)}(x),\xi_{pl}^{(qk)}(x))=$$

$$=\frac{1}{n}\mathrm{cov}(\xi_{t1}^{(rj)}(x),\xi_{pl}^{(qk)}(x))+$$

$$+\frac{2}{n^2}\sum_{\tau=1}^{n-1}(n-\tau)\,\mathrm{cov}(\xi_{tl}^{(rj)}(x),\xi_{p(\tau+1)}^{(qk)}(x))=$$

$$=A_n(x)+R_n(x). \qquad (6)$$

По лемме 4 [1] для слагаемого $A_n(x)$ имеем

$$\left|A_n(x)-\frac{1}{nh_n^{m+r+q}}\,B_{t,p}^{(r,q)}(x)\right|=o\left(\frac{1}{nh_n^{m+r+q}}\right). \qquad (7)$$

Обозначив $U=\xi_{t1}^{(rj)}(x)$, $V=\xi_{p(\tau+1)}^{(qk)}(x)$ оценим слагаемое $R_n(x)$. Применив утверждение при $r=(1+\delta)/\delta$, $p=q=2+\delta$, где δ>0 – любое, получим

$$\left|\mathrm{cov}(U,V)\right|\le 12[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}[E\,|U|^{2+\delta}\;E\,|V|^{2+\delta}]^{\frac{1}{2+\delta}}. \qquad (8)$$

Так как

$$E\,|U|^{2+\delta}=$$

$$=\frac{1}{h_n^{(m+r)(2+\delta)}}\int_{R^{m+1}}\left|g_t(z)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-t}{h_n}\right)\right|^{2+\delta}f(t,z)\,dt\,dz,$$

то, выписав неравенство, аналогичное последнему неравенству в лемме 1 [1], и рассуждая, как при завершении доказательства леммы 1 [1], получаем при $2+\delta=2/(1-\lambda)$

$$E\,|U|^{2+\delta}=\frac{1}{h_n^{(m+r)(2+\delta)-m}}\,a_t^{(2+\delta)+}(x)\times$$

$$\times\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(z)\right|^{2+\delta}dz+o\left(\frac{1}{h_n^{(m+r)(2+\delta)-m}}\right),$$

$$E\,|V|^{2+\delta}=\frac{1}{h_n^{(m+q)(2+\delta)-m}}\,a_p^{(2+\delta)+}(x)\times$$

$$\times\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(z)\right|^{2+\delta}dz+o\left(\frac{1}{h_n^{(m+q)(2+\delta)-m}}\right). \qquad (9)$$

Принимая во внимание, что $\alpha(\tau)\downarrow 0$ и $\lambda=\delta/(2+\delta)$, $0<\lambda<1$, имеем:

$$\sum_{\tau=1}^\infty[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\le\int_0^1[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}d\tau+\int_1^2[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}d\tau+\cdots=$$

$$=\int_0^\infty[\alpha(\tau)]^\lambda\,d\tau<\infty. \qquad (10)$$

Привлекая соотношения (8)–(10), выражая δ через λ, получаем

$$|R_n(x)|=\frac{2}{n^2}\left|\sum_{\tau=1}^{n-1}(n-\tau)\,\mathrm{cov}(\xi_{t1}^{(rj)}(x),\xi_{p(\tau+1)}^{(qk)}(x))\right|\le$$

$$\le\frac{24}{nh_n^{[(2m+r+q)(2+\delta)-2m]/(2+\delta)}}[a_t^{(2+\delta)+}(x)\,a_p^{(2+\delta)+}(x)]^{\frac{1}{2+\delta}}\times$$

$$\times[\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(z)\right|^{2+\delta}dz\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(z)\right|^{2+\delta}dz]^{\frac{1}{2+\delta}}\sum_{\tau=1}^\infty[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}+$$

$$+o\left(\frac{1}{nh_n^{[(2m+r+q)(2+\delta)-2m]/(2+\delta)}}\right)\le$$

$$\times\frac{24}{nh_n^{m(1+\lambda)+r+q}}[a_t^{\frac{2}{1-\lambda}+}(x)\,a_p^{\frac{2}{1-\lambda}+}(x)]^{\frac{1-\lambda}{2}}\times$$

$$\times\left[\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(u)\right|^{\frac{2}{1-\lambda}}du\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(u)\right|^{\frac{2}{1-\lambda}}du\right]^{\frac{1-\lambda}{2}}\times$$

$$\times\int_0^\infty[\alpha(\tau)]^\lambda\,d\tau+o\left(\frac{1}{nh_n^{m(1+\lambda)+r+q}}\right). \qquad (11)$$

Неравенство (2) доказано.

Докажем (3). Из (6) следует

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{2}{n}\sum_{\tau=1}^{c(n)}\left|\operatorname{cov}(\xi_{t1}^{(rj)}(x), \xi_{p(\tau+1)}^{(qk)}(x))\right| +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{\tau=c(n)}^{\infty}\left|\operatorname{cov}(\xi_{t1}^{(rj)}(x), \xi_{p(\tau+1)}^{(qk)}(x))\right| = J_1 + J_2.$$

Пусть $c(n)$ – положительные целые числа такие, что $c(n)h_n^m \to 0$, $c(n)h_n^{2m\lambda} \to \infty$ (например, можно взять $c(n) \sim h_n^{m(\varepsilon-1)}$, $0<\varepsilon<1-2\lambda$, $0<\lambda<1/2$). Тогда

$$J_1 \le \frac{2}{nh_n^{2m+r+q}}\sum_{\tau=1}^{c(n)}\int_{R^{2(m+1)}}\left|g_t(z)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-u}{h_n}\right)\times\right.$$

$$\left.\times g_p(y)\mathbf{K}^{(qk)}\left(\frac{x-v}{h_n}\right)\right|\left|f_{1(1+\tau)}(u,z,v,y)-\right.$$

$$\left.-f(u,z)f(v,y)\right| du\,dz\,dv\,dy \le$$

$$\le \frac{2}{nh_n^{2m+r+q}}\sum_{\tau=1}^{c(n)}[\sup_x a_{1(1+\tau),tp}^{+}(x,x) + \sup_x a_t^{1+}(x)\sup_x a_p^{1+}(x)]\times$$

$$\times\int_{R^{2m}}\left|\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-u}{h_n}\right)\mathbf{K}^{(qk)}\left(\frac{x-v}{h_n}\right)\right| du\,dv \le$$

$$\le \frac{2C}{nh_n^{r+q}}\sum_{\tau=1}^{c(n)}\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(u)\right|du\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(u)\right|du =$$

$$= \frac{Cc(n)}{nh_n^{r+q}} = O\left(\frac{h_n^m c(n)}{nh_n^{m+r+q}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n^{m+r+q}}\right).$$

Здесь и далее через C будем обозначать константы, не обязательно одинаковые даже в пределах одного рассуждения.

Возьмем $\delta=4\lambda/(1-2\lambda)$, $0<\lambda<1/2$. Тогда аналогично (11) получаем

$$J_2 \le \frac{24}{nh_n^{[(2m+r+q)(2+\delta)-2m]/(2+\delta)}}[a_t^{(2+\delta)+}(x)\,a_p^{(2+\delta)+}(x)]^{\frac{1}{2+\delta}}\times$$

$$\times[\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(z)\right|^{2+\delta}dz\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(z)\right|^{2+\delta}dz]^{\frac{1}{2+\delta}}\times$$

$$\times\sum_{\tau=c(n)}^{\infty}[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + o\left(\frac{1}{nh_n^{[(2m+r+q)(2+\delta)-2m]/(2+\delta)}}\right) =$$

$$= \frac{24}{nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}[a_t^{\frac{2}{1-2\lambda}+}(x)\,a_p^{\frac{2}{1-2\lambda}+}(x)]^{\frac{1-2\lambda}{2}}\times$$

$$\times[\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(z)\right|^{\frac{2}{1-2\lambda}}dz\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(q)}(z)\right|^{\frac{2}{1-2\lambda}}dz]^{\frac{1-2\lambda}{2}}\times$$

$$\times\sum_{\tau=c(n)}^{\infty}[\alpha(\tau)]^{2\lambda} + o\left(\frac{1}{nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}\right).$$

Далее, $$J_2 \le \frac{C}{c(n)nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}\sum_{\tau=c(n)}^{\infty}c(n)[\alpha(\tau)]^{2\lambda} \le$$

$$\le \frac{C}{c(n)nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}\sum_{\tau=c(n)}^{\infty}\tau[\alpha(\tau)]^{2\lambda} \le$$

$$\le \frac{C}{c(n)nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}\sum_{\tau=1}^{\infty}\tau[\alpha(\tau)]^{2\lambda}.$$

Так как $\alpha(\tau)$ не возрастает, т. е. $1\ge\alpha(1)\ge\alpha(2)\ge\ldots$, то из

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}[\alpha(\tau)]^{\lambda} < \infty, 0<\lambda<\frac{1}{2},$$

следует, что

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}\tau[\alpha(\tau)]^{2\lambda} =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{t=\gamma}^{\infty}[\alpha(t)]^{2\lambda} \le \sum_{\gamma=1}^{\infty}[\alpha(\gamma)]^{\lambda}\sum_{t=\gamma}^{\infty}[\alpha(t)]^{\lambda} \le$$

$$\le [\sum_{\tau=1}^{\infty}[\alpha(\tau)]^{\lambda}]^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$J_2 = O\left(\frac{1}{c(n)nh_n^{m(1+2\lambda)+r+q}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{nh_n^{m+r+q}c(n)h_n^{2m\lambda}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n^{m+r+q}}\right).$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Воспользуемся приемами из доказательств леммы 4 [9. С. 239] и леммы 1 [9. С. 270]. Обозначим

$$\eta_{ti} = g_t(Y_i)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) - E\left[g_t(Y_i)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\right].$$

Последовательность (Z_j) является стационарной, поэтому

$$E\left(S_{tn}^{(rj)}\right)^4 = \frac{1}{n^4h_n^{4(m+r)}}E\left(\sum_{i=1}\eta_{ir}\right)^4 \le$$

$$\le \frac{4!n}{n^4h_n^{4(m+r)}}\sum_{i,j,k}\left|E\eta_{1r}\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r}\right|, \quad (12)$$

где сумма берется по $i,j,k\ge1$, $i+j+k\le n-1$. По утверждению при $r=(2+\delta)/\delta$, $p=q=2+\delta$, с учетом условия 2 леммы и того, что $E\eta_{1r}=0$, после замены переменных в интегралах получаем неравенства

$$\left|E\{\eta_{1r}(\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}\right| \le$$

$$\le 12[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}[E\left|\eta_{1r}\right|^{2+\delta}E\left|\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r}\right|^{2+\delta}]^{\frac{1}{2+\delta}} \le$$

$$\le C[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}h_n^{\frac{4m}{2+\delta}}(\int_{R^m}\left|\mathbf{K}^{(r)}(u)\right|^{2+\delta}du)^{\frac{4}{2+\delta}}\times$$

$$\times\sup_x[a_t^{(2+\delta)+}(x)\,a_{1(1+j)(1+j+k),t}^{(2+\delta)+}(x,x,x)]^{\frac{1}{2+\delta}} \le Ch_n^{\frac{4m}{2+\delta}}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}$$

и $$\left|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r})\eta_{(i+j+k+1)r}\}\right| \le Ch_n^{\frac{4m}{2+\delta}}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}.$$

Аналогично находим

$$\left|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}\right| =$$

$$=\left|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}-\right.$$

$$-E(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})E(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})+$$

$$\left.+E(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})E(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\right| \le$$

$$\le Ch_n^{\frac{4m}{2+\delta}}[\alpha(j)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + \left|E(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})E(\eta_{2r}\eta_{(k+2)r})\right|,$$

$$\left|E(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})\right| \le Ch_n^{\frac{2m}{2+\delta}}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \left|E(\eta_{2r}\eta_{(k+2)r})\right| \le$$

$$\le \left|Ch_n^{\frac{2m}{2+\delta}}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right.. \quad (13)$$

Подставляя последние два неравенства в (13), имеем

$$|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}| \le$$
$$\le Ch_n^{\frac{4m}{2+\delta}}\left([\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}+[\alpha(j)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right).$$

Итак,

$$\sum_{i,j,k}|E\eta_{1r}\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r}| \le$$
$$\le 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{i}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n}i^2[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}+n\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty}i^2[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}+n\left(\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2 \le$$
$$\le \int_1^{\infty}\tau^2[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}d\tau+n\left(\int_1^{\infty}[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}d\tau\right)^2, \qquad (14)$$

где учтено, что $1\ge\alpha(0)\ge\alpha(1)\ge\alpha(2)\ge\ldots$.

Из (12) и (14) вытекает

$$E\left(S_{tn}^{(rj)}\right)^4 \le$$
$$\le \frac{4!nCh_n^{\frac{4m}{2+\delta}}}{n^4h_n^{4(m+r)}}\left[n\left(\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2+3\sum_{k=1}^{\infty}k^2[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right] \le$$
$$\le \frac{Ch_n^{-\frac{2m\delta}{2+\delta}}}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2+$$
$$+\frac{Ch_n^{\frac{m(2-\delta)}{2+\delta}}}{n^2h_n^{2(m+2r)}nh_n^m}\sum_{k=1}^{\infty}k^2[\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}. \qquad (15)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части неравенства (15). Возьмем последовательность целых положительных чисел $c(n)$: $c(n)=o(n)$, $c(n)=O(h_n^{-m})$. В этом случае, учитывая $c^2(n)h_n^{\frac{2m\delta}{2+\delta}}\to\infty$, получаем

$$\frac{h_n^{-\frac{2m\delta}{2+\delta}}}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\left(\sum_{i=c(n)}^{\infty}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2=$$
$$=\frac{h_n^{-\frac{2m\delta}{2+\delta}}}{n^2h_n^{2(m+2r)}c^2(n)}\left(\sum_{i=c(n)}^{\infty}c(n)[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2 \le$$
$$\le \frac{C}{n^2h_n^{2(m+2r)}c^2(n)h_n^{\frac{2m\delta}{2+\delta}}}\left(\sum_{\tau=1}^{\infty}\tau[\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2=o\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right).$$

Теперь покажем, что

$$\frac{Ch_n^{-\frac{2m\delta}{2+\delta}}}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\left(\sum_{i=1}^{c(n)}[\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right)^2 \le O\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right).$$

Учитывая условия 2 и 5 леммы, находим

$$\left|E\{\eta_{1r}(\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}\right| \le$$
$$\le Ch_n^{4m}\left(\int\left|\mathbf{K}^{(r)}(u)\right|du\right)^4\times$$
$$\times\sup_x a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,x,x,x)\le Ch_n^{4m}\bar{a}_{i(\cdot\cdot),t},$$
$$\left|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r})\eta_{(i+j+k+1)r}\}\right|\le Ch_n^{4m}\bar{a}_{(\cdot\cdot)k,t},$$
$$\left|E\{(\eta_{1r}\eta_{(i+1)r})(\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r})\}\right|\le Ch_n^{4m}\bar{a}_{(\cdot)j(\cdot),t},$$

где

$$\bar{a}_{i(\cdot\cdot),t}=\max_{j,k}\sup_x a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,x,x,x),$$
$$\bar{a}_{(\cdot\cdot)k,t}=\max_{i,j}\sup_x a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,x,x,x),$$
$$\bar{a}_{(\cdot)j(\cdot),t}=\max_{i,k}\sup_x a^{+}_{1(i+1)(i+j+1)(i+j+k+1),t}(x,x,x,x).$$

Аналогично неравенствам (14)

$$\sum_{i,j,k}|E\eta_{1r}\eta_{(i+1)r}\eta_{(i+j+1)r}\eta_{(i+j+k+1)r}| \le$$
$$\le 3Ch_n^{4m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{i}\bar{a}_{i,t} \le$$
$$\le 3Ch_n^{4m}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\bar{a}_{k,t}=$$
$$=3Ch_n^{4m}\left(\sum_{k=1}^{c(n)-1}k^2\bar{a}_{k,t}+\sum_{k=c(n)}^{\infty}k^2\bar{a}_{k,t}\right), \qquad (16)$$

где $\bar{a}_{i,t}=\max(\bar{a}_{i(\cdot\cdot),t},\bar{a}_{(\cdot\cdot)i,t},\bar{a}_{(\cdot)i(\cdot),t})$.

Второе слагаемое в правой части равенства (16) имеет порядок $o\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right)$, а для первого слагаемого справедливо неравенство $\sum_{k=1}^{c(n)-1}k^2\bar{a}_{k,t}\le Cnc^2(n)$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty}c(n)h_n=o(1)$, то

$$E\left(S_{nr}^{(rj)}\right)^4\le\frac{n^2Cc^2(n)h_n^4}{n^4h_n^{4(m+r)}}+o\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right)=$$
$$=O\left(\frac{1}{n^2h_n^{2(m+2r)}}\right).$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 7. Привлекая при $p=4$ и $m=2$ неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|\right)^p\le m^{p-1}\sum_{i=1}^{m}|a_i|^p,\ p>1,$$

получаем

$$M_4(a_n^{(rj)})=E[S_n^{(rj)}+b(a_n^{(rj)})]^4\le$$
$$\le 8[E\left(S_n^{(rj)}\right)^4+b^4\left(a_n^{(rj)}\right)].$$

Лемма 7 доказана.

В следующей (завершающей) работе будут рассмотрены оценки подстановки $J_n(x)=H(a_n^{(rj)}(x))$ и их кусочно-гладкие аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Полурекуррентные ядерные оценки базовых функционалов по независимым наблюдениям // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 8–12.
2. Chen G., Choi Y.K., Zhou Y. Nonparametric estimation of structural change points in volatility models for time series // Journal of Econometrics. – 2005. – V. 126. – P. 79–114.
3. Bosq D., Cheze-Payaud N. Optimal Asymptotic Quadratic Error of Nonparametric Regression Function Estimates for a Continuous-Time Process from Sampled-Data // Statistics. – 1999. – V. 32. – P. 229–247.
4. Bosq D. Non-parametric statistics for stochastic processes. (Lecture Notes in Statistics. V. 110). – N.Y.: Springer-Verlag, 1996. – 184 p.
5. Huang J.Z., Yang L. Identification of non-linear additive autoregressive models // J. R. Statist. Soc. – 2004. – V. 66. – Part 2. – P. 463–477.
6. Wang L., Yang L. Spline-backfitted kernel smoothing of nonlinear additive autoregression model // Ann. Statist. – 2007. – V. 35. – № 6. – P. 2474–2503.
7. Давыдов Ю.А. О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 730–737.
8. Masry E. Probability density estimation from sampled data // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1983. – V. IT-29. – № 5. – P. 696–709.
9. Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Поступила 16.01.2009 г.

УДК 621.01

К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ МЕХАНИЗМОВ

Л.Т. Дворников, А.В. Степанов

ГОУ ВПО «Сибирский государственный индустриальный университет», г. Новокузнецк
E-mail: stepanov@sibsiu.ru

Описан вариант развития структурной классификации кинематических цепей, предложенной академиком И.И. Артоболевским. Рассмотрен механизм разбиения пяти семейств механизмов на подсемейства, основанный на применении в качестве отличительного признака подсемейств совокупности используемых кинематических пар.

Ключевые слова:
Структурная классификация, семейства механизмов, кинематические цепи, кинематические пары,

Введение

Известно [1], что механизмом называют кинематическую цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения.

В общем случае степень подвижности механизма W определяет число его степеней свободы и может быть найдена по формуле, предложенной профессором Томского технологического института А.П. Малышевым. Впервые эта формула была опубликована в 1923 г. в его статье «Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры» [2]. В современных обозначениях формула Малышева имеет вид

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \qquad (1)$$

где n – число подвижных звеньев механизма; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – число кинематических пар первого, второго, третьего, четвертого и пятого классов.

Применение этой формулы возможно лишь в том случае, если на движение звеньев механизма не наложено никаких общих ограничений. При наложении ограничений на движения звеньев, образующих механизм, используется универсальная формула подвижности кинематической цепи, предложенная профессором В.В. Добровольским [3]. Эта формула имеет следующий вид

$$W = (6-m)n - \sum_{5}^{m+1}(k-m)p_k. \qquad (2)$$

В формуле (2) параметр m определяет число общих связей, наложенных на движение всех звеньев кинематической цепи, m может принимать значения m=0,1,2,3 и 4; k – класс кинематических пар, определяемый числом связей, накладываемых на относительное движение соединяемых звеньев. Как следует из (1), класс пар может принимать значения k=5,4,3,2,1.

Семейства механизмов

В зависимости от числа общих связей m, накладываемых на кинематическую цепь, академиком И.И. Артоболевским было предложено относить все цепи к одному из пяти семейств: нулевому, первому, второму, третьему и четвертому. Если на кинематическую цепь не накладывается никаких общих связей, то она относится к нулевому семейству. Формула подвижности для цепей нулевого семейства записывается в виде (1) при подстановке в формулу (2) значения m равного нулю.

Первое семейство описывается формулой, в которой коэффициенты всех членов (1) уменьшаются на единицу