УДК 621.833

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

В.С. Янгулов

Томский политехнический университет E-mail: dtps@lcg.tpu.ru

Представлен алгоритм расчёта ошибок углового положения выходного вала волновой передачи с промежуточными телами качения. В основу расчёта положены известные принципы векторного и вероятностного представления погрешностей изготовления и монтажа деталей и узлов передачи. Суммирования векторов ведется с учётом частот их проявления.

Ключевые слова:

Кинематическая погрешность, вектор, домонтажная погрешность, монтажная погрешность, частота проявления, вероятность.

Ошибка углового положения выходного вала зубчатых передач складывается из трех составляющих: кинематической погрешности, свободной и упругой угловых погрешностей (мертвых ходов) [1]:

$$\Delta \varphi = F_{ior} + a_{\Sigma},$$

где F'_{ior} — кинематическая погрешность передачи; a_{Σ} — суммарная погрешность за счет упругих деформаций и мёртвого хода.

В этой работе остановимся на кинематической погрешности.

Особенность волновых передач — большое передаточное отношение в одной ступени (паре зубчатых колес). Входное звено передачи — генератор волн, вращающийся с высокой угловой скоростью, непосредственно взаимодействует с тихоходным выходным звеном. Это приводит к тому, что кинематическая погрешность передачи проявляется в основном на частотах, близких к частоте вращения входного вала.

Для расчета ошибки углового положения выходного вала передачи применим известные принципы векторного и вероятностного представления погрешностей изготовления и монтажа деталей и узлов передачи. Суммирование векторов производится с учетом частот их проявления.

Кинематическая погрешность зубчатых передач является результатом взаимодействия погрешностей зубчатых колес и деталей, составляющих передачу. Погрешности зубчатых колес связаны с ошибками изготовления (домонтажные погрешности) и сборки деталей передачи (монтажные погрешности).

Погрешности отдельных деталей — первичные погрешности приводят к возникновению радиальных и торцовых биений, которые характеризуются величиной и направлением, т. е. могут быть представлены в виде векторов. Модули векторов в пределах поля допуска на изготовление подчинены вероятностным законам распределения, параметры которых зависит от технологического процесса, а фазы углового положения подчинены закону равной вероятности. В процессе работы передачи суммирование векторов погрешностей происходит в зависимости от того, вращаются ли они относительно друг друга или же остаются неподвижными.

Кинематическая погрешность передачи определяется как разность между действительным и номинальным (расчётным) углами поворота выходного колеса передачи и является непрерывной функцией погрешности угла поворота зубчатого колеса за полный его оборот:

$$F_{ior}' = (\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{H}}),$$

где $\phi_{\rm H}$, $\phi_{\rm H}$ – действительный и номинальный углы поворота ведомого колеса.

Числовое значение допуска на кинематическую погрешность передачи устанавливают равным сумме допусков на кинематическую погрешность зубчатых колес, составляющих данную передачу. Допуск на кинематическую погрешность колеса F_i равен сумме допусков на накопленную погрешность шага зубчатого колеса F_p и на погрешность f_f профиля зуба.

Для волновой передачи, учитывая многопарность зацепления, погрешность профиля можно не рассматривать [2].

Зубчатые колеса в передаче вращаются вокруг осей, которые называют рабочими осями. Как правило, допуски на все показатели точности зубчатого колеса задаются относительно его рабочей оси. Показатели точности зубчатого венца у отдельного зубчатого колеса и его же, смонтированного в передаче, одни и те же. Однако числовые значения ряда этих показателей, могут не совпадать. Это обусловлено возможностью несовпадения базовой и рабочей осей. Базовой осью зубчатого колеса является ось посадочного отверстия в корпусе.

С целью разделения показателей точности отдельно взятого зубчатого колеса относительно его рабочей оси целесообразно иметь различные условные обозначения. В работе [3] индексы погрешностей для отдельно взятого зубчатого колеса дополняются буквой и. Например, накопленную погрешность шага отдельно взятого колеса обозначают \overline{F}_{our} .

Погрешности зубчатого колеса, т. е. погрешности, измеренные относительно его рабочей оси, называют домонтажными погрешностями. К ним можно отнести геометрический эксцентриситет, обусловленный только погрешностью базирования зубчатого колеса при зубообработке и кинематический эксцентриситет, вызывающие в сумме погрешность окружного шага колеса. Приближенно эту погрешность можно представить вектором эксцентриситета зубчатого венца относительно базовой оси при соблюдении условия, что этот вектор оказывает влияние на точность перемещения ведомого колеса, что и погрешность шага [4].

Погрешности монтажа определяются в основном биением валов, подшипников, втулок и других деталей. Эти погрешности приводят к возникновению монтажного радиального биения зубчатого колеса F_{mr}, вследствие смещения оси вращения колеса О_в относительно базовой оси. Погрешности монтажа характеризуются величиной и направлением и могут быть представлены в виде векторов. При сборке на подшипниковых опорах зубчатое колесо за счет погрешностей сопрягаемых деталей устанавливается с некоторым эксцентриситетом F_{mr} относительно базовой оси. Разделим F_{mr} на две составляющие: — тангенциальную $F_{mr}^{\tau} = F_{m} \sin(\varphi + \alpha)$, направленную параллельно нормали к точке контакта шарика с профилем зуба жесткого колеса и радиальную $F_{mr}^{R} = F_{mr} \cos(\varphi + \alpha)$, направленную перпендикулярно нормали (рис. 1), где ϕ – угол поворота входного звена (генератора); *α* – угол передачи движения профилю жесткого колеса, определяется по зависимостям, приведённым в [5].

При вращении колеса составляющая вектора эксцентриситета F_{mr}^{R} не смещает центр шарика относительно оси паза обоймы. Составляющая же F_{mr}^{r} стремится сообщить шарику смещение вдоль линии зацепления. Смещение центра шарика O_{μ} при данном положении вектора эксцентриситета составит

$\Delta \tau = F_{mr}^{\tau} \sin(\varphi + \alpha) / \cos \alpha.$

Текущее значение смещения центра шарика относительно оси паза обоймы определяет угол поворота выходного звена передачи. Неравномерность перемещения центра шарика $\Delta \tau$ от погрешности ведущего звена будет полностью восприниматься ведомым звеном. Аналогичным образом оказывает влияние на кинематическую погрешность передачи и монтажный эксцентриситет ведомого звена. Величина монтажной погрешности может быть определена размерным анализом.

Разделение первичных погрешностей на домонтажную и монтажную представляется особенно целесообразным применительно к волновым зубчатым передачам. Это объясняется сложностью их структуры и кинематики Например, гибкое зубчатое колесо состоит из двух узлов: из обоймы, в пазах которой размещены тела качения, и генератора волн, которые установлены на различных валах. В этом случае контроль точности гибкого колеса относительно рабочей оси становится практически неосуществимым. Одно из зубчатых колес передачи является неподвижным, что также затрудняет контроль точности этого колеса.



Рис. 1. Схема перевода монтажного эксцентриситета в перемещения центра шарика

На рис. 2 изображены примерные графики влияния на кинематическую погрешность зубчатого колеса домонтажных погрешностей (кривая 1), вызванных в основном погрешностью шага зубчатого колеса относительно базовой оси, и монтажных погрешностей (кривая 2).



Рис. 2. Графики погрешностей зубчатого колеса: 1) шага; 2) монтажа; 3) теоретическая кривая

Закон изменения погрешности шага по зубчатому колесу представлен синусоидой, амплитуда которой приближенно равна вектору погрешности шага \overline{F}_{pur} (кривая 3). Сдвиг фаз между обеими синусоидами φ_0 является случайной величиной.

Из теории колебаний [6] известно, что при сложении любого числа синусоидальных колебаний одного периода с различными сдвигами фаз суммарное колебание будет также синусоидальным. Так как эти векторы погрешностей не меняют своего взаимного положения относительно друг друга, то, применяя правило сложения случайных величин, можно определить суммарный вероятный вектор погрешности зубчатого колеса.

На рис. 3 изображены векторы \overline{F}_{pur} и \overline{F}_{mr} соответственно домонтажной и монтажной погрешностей, а также суммарный вектор зубчатого колеса

$$F_{ir} = F_{pur} + F_{mr}$$



Рис. 3. Определение суммарного вектора погрешности зубчатого колеса

Замена кинематической погрешности зубчатого колеса, измеряемого по дуге делительной окружности, на эквивалентный по действию вектор эксцентриситета позволяет все первичные погрешности представить одинаково – в векторной форме. Это необходимо для определения расчетным путем с заданной вероятностью величин суммарных погрешностей звеньев и передачи в целом. Единообразие представления погрешностей позволяет в дальнейшем автоматизировать процесс суммирования.

Для всех узлов передачи можно выделить две основные группы погрешностей: векторы неподвижные, связанные с корпусом, и векторы, вращающиеся относительно корпуса. Неподвижные векторы погрешностей определяют положение рабочей оси узла в пространстве относительно номинальной оси, за которую обычно принимают ось расточки корпусной детали.

Вращающиеся векторы погрешностей вызывают биение узла относительно его рабочей оси, причем в одном узле, детали и звенья которого совершают движение, их может быть несколько с различными частотами вращения.

Неподвижные векторы каждого из узлов образуют один суммарный неподвижный вектор погрешностей $\overline{a}_{\Sigma H}$, которым определяется положение рабочей оси для всех узлов передачи.

Суммарный неподвижный вектор погрешностей складывается из первичных погрешностей изготовления и монтажа остановленного зубчатого колеса и корпусных деталей, поддерживающих вращающиеся зубчатое колесо и генератор волн. Эти погрешности относятся к различным узлам передачи, они не меняют своего взаимного положения, их суммирование рассмотрим ниже.

Вращающиеся вектора погрешностей генератора волн $\overline{a}_{\Sigma_{r}}$ и выходного звена $\overline{a}_{\Sigma_{B3}}$ состоят из первичных погрешностей изготовления и монтажа их вращающихся деталей.

При определении предельной вероятной кинематической погрешности суммарные неподвижный и вращающийся векторы выходного звена складываются алгебраически. Это объясняется тем, что за один оборот выходного звена, на котором реализуется полная кинематическая погрешность передачи, вращающийся вектор пройдет положение неподвижного вектора. Ошибка при алгебраическом суммировании этих погрешностей не превышает 1 %.

Сложение суммарного вращающегося вектора генератора волн с векторами других узлов также производится алгебраически, так как в пределах зоны несовпадения векторов он совершит один полный оборот.

Таким образом, максимальная суммарная погрешность, действующая в зоне зацепления, в общем виде может быть представлена как сумма модулей составляющих векторов погрешностей узлов передачи, т. е.

$$\overline{a}_{\Sigma max} = \overline{a}_{\Sigma H} + \overline{a}_{\Sigma \Gamma} + \overline{a}_{\Sigma B3}$$

Определение вероятных значений погрешностей узлов и звеньев, состоящих из деталей, первичные погрешности которых не меняют своих положений относительно друг друга при работе передачи, производят методами теории вероятностей.

Для определения значения суммарного вращающегося вектора эксцентриситета выходного звена, характеризующего его биение относительно рабочей оси, нужно составить размерную цепь, в которую входят погрешности деталей, влияющие на $\overline{a}_{\Sigma_{B3}}$. Основой при составлении размерной цепи является реальная конструкция передачи. Звеньями размерной цепи могут быть отклонения от номинальных значений положений рабочих поверхностей (несоосности, неперпендикулярности и т. п.) и зазоры в сопряжениях деталей. Погрешность замыкающего звена цепи и будет суммарным вращающимся вектором эксцентриситета выходного звена.

Как отмечалось, в суммарные вращающиеся векторы могут входить погрешности узлов и звеньев, которые проявляются с различными частотами: например, подшипник относится к одному узлу, однако частоты проявления погрешности наружного и внутреннего колец различны. Поэтому при составлении размерных цепей для расчёта вероятных значений суммарных векторов эксцентриситета необходимо группировать первичные погрешности отдельных деталей с учетом частот их проявления.

В процессе работы передачи векторы эксцентриситетов составляющих звеньев меняют свое угловое положение. Для оценки их влияния на величину суммарного вектора эксцентриситета выберем систему координат, оси которой совпадают с осью жесткого колеса О, одна из них *ОХ* проходит через ось генератора О_г (рис. 4). По аналогии с волновыми передачами с гибкими колёсами с двухволновым генератором назовём ось *ОХ* большой осью генератора.

Проявление погрешности звена определяется проекцией его вектора эксцентриситета на большую ось генератора волн при его вращении.

Текущее значение суммарного вектора эксцентриситета какого-либо узла, состоящего из нескольких звеньев, можно записать в виде выражения

$$a_{\Sigma}(\omega_i t) = \sum_j \sum_i a_{\Sigma_j} \cos(\omega_i t),$$

где a_{zj} – суммарный вектор эксцентриситета звена, вызванный первичными погрешностями группы деталей, ошибки которых проявляются с одной частотой; *j* – число групп деталей, погрешности которых проявляются с разными частотами; ω_i – частота проявления вектора погрешности *j*-го звена; *i* – число гармонических составляющих.



Рис. 4. Система координат для определения проекций эксцентриситетов вращающихся векторов

Рассмотрим частоты проявления погрешностей звеньев. Предположим, что какое-либо неподвижное звено имеет вектор эксцентриситета $\overline{a}_{\Sigma hi}$ направленный в данный момент времени по большой оси генератора воли (рис. 5). При повороте генератора волн на угол φ проекция вектора на ось *OX* составит



Рис. 5. Определение частоты проявления погрешности неподвижного зубчатого колеса

В процессе работы передачи в установившемся режиме генератор волн вращается с постоянной угловой частотой ω ; угол поворота генератора φ является функцией частоты вращения и времени *t*. Следовательно, можно записать

$$a'_{\Sigma_{\mathrm{H}i}} = a_{\Sigma_{\mathrm{H}i}} \cos \omega t.$$

Частота проявления погрешностей неподвижных звеньев ω_1 , соответствует угловой частоте вращения вала генератора волн ω , т. е. является высокочастотной.

Отметим также, что в отличие от обычных зубчатых передач, для которых погрешности неподвижных деталей не приводят к заметному увеличению кинематической погрешности, в волновых передачах эти погрешности проявляются полностью.

Выходное звено имеет вектор эксцентриситета $\overline{a}_{\Sigma B3}$, направленный по большой оси (рис. 6). Возможны два варианта направления его вращения: по направлению вращения генератора волн и против него.



Рис. 6. Определение частоты проявления погрешности вращающегося зубчатого колеса

Рассмотрим случай, когда выходное звено вращается по направлению вращения генератора волн. При повороте генератора на угол $\varphi = \omega t$ ведомое колесо повернется на угол $\psi = \varphi/u$, где u – передаточное отношение. Проекция вектора эксцентриситета выходного звена на новое положение оси *OX* составит

$$a'_{\Sigma_{B3}} = a_{\Sigma_{B3}} \cos[(1-1/u)\omega t].$$

Следовательно, частота проявления этой погрешности

$$\omega_{\rm BB} = (1 - 1/u)\omega.$$

Так как передаточное отношение волновой передачи достаточно велико, то отношение 1/u мало, и, следовательно, частота проявления погрешности вращающегося зубчатого колеса близка к частоте вращения генератора волн и лежит в высокочастотном диапазоне.

Угловую скорость наружного кольца ω_{κ} генератора примем равной той, которая определяется при силовом расчёте передачи [7].

Биение генератора волн не вызывает переменной составляющей кинематической погрешности

волновой передачи, создавая лишь однократное изменение эксцентриситета a_{ω} . В процессе работы передачи вектор биения генератора волн не меняет своего положения относительно большой оси. Поэтому частота проявления этой погрешности равна нулю.

При нахождении суммарных векторов первичных погрешностей необходимо применение аппарата теории вероятностей, так как на величину погрешности влияет большое число случайных факторов.

Для расчета точностных параметров изделий машиностроения используют линейную функцию

$$Y_{\Sigma} = \sum_{i} C_{i} Y_{i},$$

где Y_{Σ} , Y_i — показатели точности сборочной единицы и детали; C_i — постоянная при случайной величине, называемая коэффициентом приведения. Математическое ожидание и дисперсию функции Y_{Σ} определяют соответственно по формулам

$$M |Y_{\Sigma}| = \sum_{i} C_{i}M |Y_{i}|;$$
$$D |Y_{\Sigma}| = \sum_{i} C_{i}^{2}D |Y_{i}|.$$

В технической документации случайную величину (показатель точности изделия) задают двумя предельными отклонениями: верхним *es* (*ES*) и нижним *ei* (*EI*). В общем случае будем задаваться величинами *es* и *ei*. Тогда среднее отклонение *em* и допуск *t* размера определим по формулам em=0,5(es+ei); t=es-ei. Для характеристики случайной величины этих значений недостаточно. В общем виде, как следует из рис. 7, математическое ожидание случайной величины равно

$$M_x = N + em + \alpha t$$
,

где N — номинальное значение случайной величины; αt — величина асимметрии размера; α — коэффициент относительной асимметрии размера.

Поскольку рассматриваются не сами случайные величины, а их отклонения, то математическое ожидание можно записать в виде

$$M_x = em + \alpha t.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины, характеризующее рассеяние ее около математического ожидания, $\sigma_x = \sqrt{D}$. Связь между σ_x и *t* определяется соотношением $\sigma_x = 0.167 Kt$, где K – коэффициент относительного рассеяния размера. Для проектных расчетов рекомендуется принимать коэффициент:

- относительного рассеяния для всех размеров *K*=1,2;
- относительной асимметрии для размеров охватывающих поверхностей α=-0,1; охватываемых α=0,1; прочих α=0.

Показатель точности сборочной единицы связан с отклонениями размеров отдельных деталей линейной функцией. Подставляя в выражение для *М_x* числовые значения, характеризующие поле, распределения отклонений размеров, получим

$$em_{\Sigma} + \alpha_{\Sigma}t_{\Sigma} = \sum C_i(em_i + \alpha_i t_i),$$

откуда среднее отклонение суммарного размера

$$em_{\Sigma} = \sum C_i (em_i + \alpha_i t_i) - \alpha_{\Sigma} t_{\Sigma},$$

а допуск замыкающего звена



Рис. 7. Кривая распределения размеров

В данных формулах *ет*_i и *t*_i – среднее отклонение и допуск *i*-го влияющего размера; α_i и *K*_i – коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеяния *i*-го влияющего размера; α_{Σ} и *K*_{Σ} – коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеяния суммарного размера. При большом числе составляющих размеров суммарное распределение конечного размера стремится к симметричному распределению по закону Гаусса. Поэтому для проектных расчетов принимают *K*_{Σ}=1, α_{Σ} =0, что соответствует риску выхода конечного размера за пределы поля допуска, β =0,27 %.

Для векторных величин можно записать (рис. 8)

$$Y = t_{X} \cos \theta,$$

где t_x и θ – случайные величины (соответственно модуль и аргумент функции). Математическое ожидание и дисперсия случайной величины соответственно описываются формулами

$$MY = Mt_X M(\cos\theta),$$

$$DY = Dt_{X}D(\cos\theta) + Dt_{X} |M(\cos\theta)|^{2} + D(\cos\theta) |Mt_{X}|^{2}$$

Значения угла θ равновероятны в пределах от 0 до 2 π . Тогда $M(\cos\theta)=0$; $D(\cos\theta)=0,5$. С учетом это-го получим

$$MY = 0;$$

$$DY = 0,5(Dt_x + |Mt_x|^2);$$

$$Dt_x = \frac{1}{36}K_x^2 t_x^2;$$

$$Mt_x = em + \alpha_x t_x.$$

Кроме того, для векторных ошибок *ет_x*=0,5*t_x*. Тогда

é

$$K_Y^2 t_Y^2 = 0,5[K_X^2 + 36(0,5 + \alpha_X)^2]t_X^2 = K_X^2 t_X^2,$$

где t_{γ} – биение осей; t_{χ} – модуль векторного смещения осей. $t_{\gamma} = 2t_{\chi}$.



Рис. 8. Пример детали со смещёнными осями

Примем для векторных величин индекс V. Для получения t_{γ} в виде смещения осей уменьшим в 2 раза коэффициент K. Тогда

$$K_{Y}^{2}t_{Y}^{2}=K_{V}^{2}t_{V}^{2},$$

где

$$K_V^2 = 0,125[K_V^2 + 36(0,5 + 6_V)^2].$$

Для суммы векторных величин

$$K_{\Sigma V}^2 t_{\Sigma V}^2 = \sum_V C_V^2 K_V^2 t_V^2$$

Для случая, когда в размерной цепи имеются детали, равновероятно соприкасающиеся в пределах зазоров, можно записать

$$K_{\Sigma Z}^2 t_{\Sigma Z}^2 = \sum_{V} C_Z^2 K_{X Z}^2 t_Z^2,$$

где K_{XZ} — приведенный коэффициент относительного рассеяния, который определяют из формулы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Машины и стенды для испытания деталей. / Под ред. Д.Н. Решетова. М.: Машиностроение, 1979. 343 с.
- Истомин С.Н., Шувалов С.А., Попов П.К., Борисов С.Г., Фирсаев А.Ф. Кинематическая точность приборных волновых передач. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
- Марков А.Л. Измерение зубчатых колёс. Допуски. Методы и средства контроля. – Л.: Машиностроение, 1977. – 279 с.
- Тищенко О.Ф., Валеданский А.С. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения. – М.: Машиностроение, 1977. – 358 с.
- Янгулов В.С. Геометрические и конструктивные соотношения в волновых передачах с промежуточными телами качения. //

$$K_{XZ}^2 = 0.5 \left[1 + 36 \left(\frac{em_Z}{t_Z} \right)^2 \right].$$

Значения *ет*_{*z*} и *t*_{*z*} вычисляют по формулам

$$em_{Z} = 0,5[(d_{a} - d_{b}) + (em_{a} - em_{b}) + (\alpha_{a} t_{a} - \alpha_{b} t_{b}) - \alpha_{Z} t_{Z}];$$

$$t_{Z} = \frac{1}{2K_{Z}} \sqrt{K_{a}^{2} t_{a}^{2} + K_{b}^{2} t_{b}^{2}},$$

где d_a и d_b номинальные значения диаметров отверстия и вала; em_a и em_b средние отклонения размеров отверстия и вала; t_a и t_b – допуски отверстия и вала.

Распределение зазоров обычно близко к нормальному, поэтому для практических расчетов принимают $\alpha_7=0$; $K_7=1,0$.

Окончательно формула для расчета вероятных значений суммарных векторов за счет погрешностей изготовления и сборки имеет вид.

$$t_{\Sigma V} = \frac{1}{K_{\Sigma V}} \sqrt{\sum_{V} C_{V}^{2} K_{V}^{2} t_{V}^{2}} + \sum_{Z} C_{Z}^{2} K_{XZ}^{2} t_{Z}^{2}}.$$

Коэффициент относительного рассеяния $K_{\Sigma V}$ суммарной погрешности для векторных величин зависит от процента риска выхода размеров изделий за пределы поля допуска. Анализ приведенных данных показывает, что при значениях процента риска $\beta \le 1$ % коэффициент $K_{\Sigma V}$ изменяется существенно. При дальнейшем увеличении процента риска коэффициент $K_{\Sigma V}$ изменяется медленнее, достигая величины 1,25 при $\beta \approx 5,6$.

Следовательно, допуск замыкающего звена от суммарных погрешностей при увеличении процента риска свыше 1 % должен быть примерно в 1,5 раза меньше, чем при малых значениях β . Таким образом, в этих случаях должны повышаться технологические требования к точности изготовления деталей передачи и ее сборки в целом.

Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 24–27.

- Мэнли Р. Анализ и обработка записей колебаний. М.: Машиностроение, 1972. – 367 с.
- Янгулов В.С. Силовой расчёт волновых передач с промежуточными телами качения с адаптивным генератором // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 28–31.

Поступила 16.10.2008 г.