

## КОНСТРУИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ БИРЖЕВЫХ ОПЦИОНОВ

М.Э. Фатьянова

Научные руководители: д.т.н., профессор А.А. Мицель, к. ф.-м. н., доцент М.Е. Семёнов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: mefl@tpu.ru

## DESIGN OF COMPLEX PORTFOLIOS OF EXCHANGE OPTIONS

M.E. Fatyanova

Scientific Supervisor: Dr., Professor A.A. Mitsel, PhD, Associate Professor M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: margarett13@tpu.ru

**Abstract.** *In the paper mathematically describes principles of the portfolio formation based on exchange options. The task of linear programming was formulated, and then this task was solved by two methods: simplex-method and Monte-Carlo method. These methods have been realized in MATLAB.*

Интерес к рынку финансовых продуктов неуклонно растет. При этом брокерские компании стремятся учитывать инвестиционные цели клиентов – получить максимальный доход при заранее определенной величине убытков. Наиболее часто брокеры создают финансовые продукты с одиночными опционными контрактами либо стандартными опционными стратегиями. Однако ввиду этого бывает сложно реализовать различные запросы инвестора. В работе описан подход конструирования сложных диверсифицированных портфелей биржевых опционов. Целью данной работы является конструирование и практическая реализация сложных портфелей биржевых опционов. Банк взаимодействует с клиентами (инвесторами), удовлетворяя их пожелания относительно различных финансовых продуктов на российском рынке. Предполагается, что он обеспечивает клиента всеми необходимыми аналитическими материалами с прогнозами интересующих цен активов. При этом инвестор стремится максимизировать будущую прибыль, допуская определенный уровень риска.

**Основные определения.** *Опционный продукт* (опционный портфель, ОП) – инвестиционная стратегия на основе купли/продажи опционных контрактов, сконструированная индивидуально для клиента исходя из его целей и запросов, включает следующие производные ценные бумаги. *Опцион «call» (колл)* дает право покупателю опциона купить базисный актив у продавца опциона по цене исполнения в установленные сроки или отказаться от этой покупки. Инвестор приобретает опцион «call», если ожидает повышения стоимости базового актива [1,2]. *Опцион «put» (пут)* предоставляет покупателю опциона право продать базисный актив по цене исполнения в установленные сроки продавцу опциона или отказаться от его продажи. Инвестор приобретает опцион «put», если ожидает падения стоимости базового актива. *Фьючерс* – производный финансовый инструмент, стандартный срочный биржевой контракт купли-продажи базового актива, при заключении которого стороны (продавец и покупатель) договариваются только об уровне цены и сроке поставки. *Страйк* – фиксированная в опционном контракте цена (цена исполнения), по которой может быть куплен или

продан базовый актив в случае исполнения опциона. Цена  $Ask(Bid)$  цена продажи (покупки) базового актива. При этом *спредом* называется разность цен Ask и Bid [3].

**Входные параметры и обозначения.**  $M$  – рыночная цена базового актива на момент экспирации продукта (цена спот);  $M_{now}$  – цена базового актива на момент конструирования продукта;  $M_E$  – ожидаемая инвестором цена базового актива;  $E$  – количество купленных (проданных) опционов с одним страйком, определяется исходя из ликвидности на рынке, в данном исследовании  $E=10$ ;  $X = (X_1, X_2, \dots, X_6)$ , причем  $|X_i| \leq E$  – вектор количества купленных (проданных) опционов колл на фьючерс; аналогично  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_6)$ , причем  $|Y_i| \leq E$  – вектор количества купленных (проданных) опционов колл на фьючерс;  $S_C = (S_{C1}, S_{C2}, \dots, S_{C6})$ , где  $S_{C1} < \dots < S_{C6}$  – цена страйк опционов колл на фьючерсный контракт;  $S_P = (S_{P1}, S_{P2}, \dots, S_{P6})$ ,  $S_{P1} < \dots < S_{P6}$  – цена страйк опционов пут на фьючерсный контракт;  $\max(M - S_{Ck}; 0)$  – выплата по опциону колл в момент экспирации продукта;  $\max(S_{Pk} - M; 0)$  – выплата по опциону пут в момент экспирации продукта;  $\sum_{k=1..6} (X_k \cdot \max(M - S_{Ck}; 0))$  – суммарная общая колл-выплата в момент экспирации продукта;  $\sum_{k=1..6} (Y_k \cdot \max(S_{Pk} - M; 0))$  – суммарная общая пут-выплата в момент экспирации продукта;  $P = (P_1, \dots, P_6)$  – средневзвешенные цены опционов колл в соответствии с ценой страйк;  $Q = (Q_1, \dots, Q_6)$  – средневзвешенные цены опционов пут в соответствии с ценой страйк; средневзвешенные цены покупки опционов: колл  $P_{Bid} = (P_{Bid(1)}, P_{Bid(2)}, \dots, P_{Bid(6)})$ , где  $P_{Bid(k)} = 0,9 \cdot P_k$  и пут  $Q_{Bid} = (Q_{Bid(1)}, Q_{Bid(2)}, \dots, Q_{Bid(6)})$ , где  $Q_{Bid(k)} = 0,9 \cdot Q_k$ ; средневзвешенные цены продажи опционов: колл  $P_{Ask} = (P_{Ask(1)}, P_{Ask(2)}, \dots, P_{Ask(6)})$ , где  $P_{Ask(k)} = 1,1 \cdot P_k$  и пут  $Q_{Ask} = (Q_{Ask(1)}, Q_{Ask(2)}, \dots, Q_{Ask(6)})$ , где  $Q_{Ask(k)} = 1,1 \cdot Q_k, k=1, 2, \dots, 6$ . Тогда суммарную прибыль, получаемую в момент экспирации продукта, можно представить в следующем виде [4]:

$$F(P, Q, X, Y, M) = \sum_{k=1..n} (X_k \cdot (-P_{Bid(k)} \vee P_{Ask(k)}) + \max(M - S_{Ck}, 0)) + \sum_{k=1..n} (Y_k \cdot (-Q_{Bid(k)} \vee Q_{Ask(k)}) + \max(S_{Pk} - M, 0)). \quad (1)$$

#### Принципы формирования портфеля

1. Величина выплат портфеля на промежутке  $[0; \min(S_{C1}, S_{P1})]$  должна быть ограничена, а также должно выполняться условие горизонтальности графика:

$$F(P, Q, X, Y, M) = \min(S_{C1}, S_{P1}) = -L \text{ и } \sum_{k=1..n} Y_k = 0. \quad (2)$$

2. Для обеспечения горизонтальности выплат на промежутке цены  $[\max(S_{Cn}, S_{Pn}); +\infty]$ , должно выполняться условие:  $\sum_{k=1..n} X_k = 0$ .

3. Растущий тренд графика функции на промежутке между двумя любыми соседними страйками

$$\text{создается из условия [4,5]: } D_q = \sum_{S_{C_i} \leq S_q} X_i - \sum_{S_{P_j} \geq S_{q+1}} Y_j \geq 0, \quad (4)$$

$$(S_q; S_{q+1}) \in [\min(S_{C1}, S_{P1}); \max(S_{Cn}, S_{Pn})], \text{ где } q=1, 2, \dots, 7.$$

4. Отрицательная стоимость продукта, выражается следующим ограничением-равенством:

$$\text{Mon} = \sum_{k=1..n} [X_k \cdot (-P_{Bid(k)} \vee P_{Ask(k)}) + Y_k \cdot (-Q_{Bid(k)} \vee Q_{Ask(k)})] = \text{const} < 0. \quad (5)$$

**Постановка задачи и реализация.** Пусть инвестор 22.02.16 выдвигает прогноз движения цен акций ПАО «Газпром» (GAZP) от текущего значения  $M_{now}=138,8$ руб. до ожидаемого значения на 15.06.16  $M_E=155$ руб., в котором он желает получить максимальный доход. При этом инвестор хочет получить 1000 руб. наличными в момент приобретения продукта и ограничить максимальный убыток величиной  $L=10\,000$  руб.

Для удовлетворения предпочтений инвестора следует сформировать портфель из 6 опционов «call» (колл) на фьючерсный контракт на обыкновенные акции ПАО «Газпром» и 6 опционов «put» (пут) с одним сроком исполнения 17.06.16 и различными страйками. Введем вектор страйков опционов колл и

пут:  $S_C = (13500, 14000, 14500, 15000, 15500, 16000)$  и  $S_P = (12000, 12500, 13000, 13500, 14000, 14500)$ ,  $P=(1187,894,647,448,295,184)$ ,  $Q=(186, 276,399, 562, 769, 1022)$ .

Процесс формирования портфеля сводится к нахождению оптимального числа опционных контрактов колл и пут  $(X_{opt}, Y_{opt})$ , путем решения задачи линейной оптимизации (линейного программирования, ЗЛП), состоящей из 12 переменных (по 6 опционов колл и пут с различными страйками) при заданном ряде ограничений в виде неравенств и равенств. В результате решения задачи находится вектор оптимальных долей опционов колл и пут:  $(X_{opt}, Y_{opt})=(X_{opt(1)}, \dots, X_{opt(n)}, Y_{opt(1)}, \dots, Y_{opt(n)})$ .

Таким образом, полученное оптимальное количество опционов  $(X_{opt}, Y_{opt})$  необходимо купить (продать) при формировании продукта для достижения максимального значения функции прибыли  $F_{opt}(P, Q, X_{opt}, Y_{opt}, M)$  в момент экспирации.

В данном исследовании ЗЛП была решена симплекс-методом и методом Монте-Карло. Идея симплекс-метода состоит в монотонном изменении величины целевой функции при переходе к следующему плану. Функция  $F(P, Q, X, Y, M)$  содержит 6 значений  $X_i$  и  $Y_i$ , т.е. всего 12 значений, ввиду того, что у нас имеется вариация bid или ask, в общем комплексе получается 4096 комбинаций. Таким образом, путем создания цикла из 4096 итераций и использования формул (1-5) были получены результаты: оптимальное значение целевой функции:  $\max F(P, Q, X_{opt}, Y_{opt}, M_{E=15500})=8795,2$  руб.; оптимальный план:  $X_{opt}=(-0,67; -1,2; 10; 1,87; -10; 0)$  и  $Y_{opt}=(0; 0,67; 10; -10; 9,33; -10)$ .

Основной недостаток симплекс-метод – оптимальный план является нецелочисленным и приходится прибегать к округлению. Для устранения указанного недостатка использован метод – Монте-Карло, который позволяет получить целочисленный оптимальный план. Основная идея решения ЗЛП методом Монте-Карло состоит генерации случайных чисел  $(X, Y) \sim U(0, 1)$ , которые каждый раз необходимо проверять на выполнение всех ограничений ЗЛП, а также рассчитывать максимум целевой функции. Точность решения зависит напрямую от количества сгенерированных значений  $(X, Y)$ .

В исследовании было проведено 409 600 000 итераций, т.е. в каждой из 4096 комбинаций было проведено  $10^5$  генераций значений  $(X, Y)$ . В результате были получены:

оптимальное значение целевой функции:  $\max F(P, Q, X_{opt}, Y_{opt}, M_{E=15500})=14346$  руб. и

оптимальный план:  $X_{opt}=(0,8,-3,7,-8,-4)$  и  $Y_{opt}=(0,9,-7,1,6,-9)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайн С. Опционы: Полный курс. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 466 с.
2. Буренин А.Н. Фьючерсные, Форвардные и Опционные рынки: Учебное пособие 2-е издание - М.: Научно-техническое общество имени академика С.И. Вавилова, 2002.
3. Фельдман А.Б. Производные финансовые и товарные инструменты: Учебник. – Финансы и статистика, 2005. – 304 с.
4. Курочкин С.В, Пичугин И.С. Структурированный коллар: построение сложных опционных продуктов // Рынок Ценных Бумаг. 2005. № 14 (293). С. 64-68.
5. Курочкин С.В. Функции выплат, реализуемые с помощью опционных стратегий // Экономика и математические методы. 2005. – Т. 41. – № 3.