

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА РЕЖИМНОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Д.Н. Достовалов, к.т.н., ассистент

Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета

652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26, тел. (38451)7-77-64,

E-mail: ddostovalov@tpu.ru

Введение

Теория гибридных систем (ГС) является современным и универсальным формализмом моделирования сложных динамических процессов в объектах различной физической природы [1]. Такие системы характеризуются совокупным дискретно-непрерывным поведением. В ходе компьютерного эксперимента выполняется расчет траектории глобального поведения системы. Глобальное поведение формируется множеством последовательно сменяющихся режимов функционирования, заданных в классе непрерывных отображений. Дискретные события ГС приводят к разрывам в решении и смене режимов. В настоящей работе рассматриваются ГС, непрерывное поведение которых задано в форме задачи Коши с ограничениями. Для численного анализа выбранного класса задач предложены и реализованы в инструментальной среде ИСМА [2] специальные алгоритмы интегрирования и локализации событий [1].

1. Класс систем

Рассмотрим ГС, режимное поведение которых определяется на решении дифференциально-алгебраических уравнений с некоторыми ограничениями:

$$\begin{aligned}y' &= f(t, x, y), \quad x = \varphi(t, x, y), \\pr &: g(t, x, y) < 0, \\t &\in [t_0, t_k], \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in R^{N_x}$, $y \in R^{N_y}$, $f: R \times R^{N_x} \times R^{N_y} \rightarrow R^{N_y}$, $\varphi: R \times R^{N_x} \times R^{N_y} \rightarrow R^{N_x}$, $g: R \times R^{N_x} \times R^{N_y} \rightarrow R$.

Скалярная функция $g(t, x, y)$ называется событийной функцией или предохранителем [1, 3]. Условие существования системы в соответствующем режиме или состоянии определяет предикат pr . Неравенство $g(t, x, y) < 0$ означает, что фазовая траектория в текущем режиме не должна пересекать границу $g(t, x, y) = 0$. События, происходящие при нарушении этого условия и приводящие к переходу в другой режим без пересечения границы, называют односторонними. Именно такие события практически интересны [4]. Кроме того, большинство задач из класса (1) характеризуются жесткими режимами [5] и высокой размерностью [6], а граница режима $g(t, x, y) = 0$ может иметь острые углы с многократным пересечением фазовой траектории. В этом случае для корректного построения траектории совокупного поведения системы необходимо применять специальные методы численного анализа [5, 7].

2. Исследование устойчивости явных схем

Для решения задач (1) будем использовать явные одношаговые схемы [4], которые имеют вид

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^m p_i k_i, \\k_i &= hf(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j),\end{aligned}\tag{2}$$

где α_i , β_{ij} , p_i , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq i-1$ – числовые коэффициенты, $\alpha_1 = 0$, k_i – стадии метода, m – число стадий. Численные формулы (2) хорошо приспособлены для практических расчетов, поскольку они не требуют вычисления дополнительных начальных значений и позволяют легко изменять шаг интегрирования. Но классические явные схемы обладают малыми областями устойчивости [5, 7], что ограничивает их использование для решения жестких задач.

Если исходная задача обладает малой чувствительностью к малым возмущениям, то и от метода ее решения требуют того же свойства. Такие методы называют устойчивыми. В дальнейшем будем рассматривать абсолютную устойчивость метода, характеризующуюся полиномом [5]

$$Q(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_m z^m,\tag{3}$$

где z – некоторое комплексное число, c_i $1 \leq i \leq m$, – вещественные коэффициенты, m – число стадий численной схемы (2). Совокупность точек комплексной плоскости Z , в которых выполняется условие $|Q(z)| \leq 1$, образует область устойчивости численной схемы [5]. Введение в алгоритм интегрирования контроля устойчивости вычислений позволяет расширить границы применимости явных методов.

В дальнейшем будем использовать понятие интервала устойчивости, который определяется точкой пересечения границы области устойчивости и отрицательного направления вещественной оси плоскости Z . Известно [5], что длина интервала устойчивости D пропорциональна квадрату числа стадий и обратно пропорциональна порядку точности метода. Так, для m -стадийного метода величина D максимальна в случае первого порядка точности и равна $2m^2$.

Вопросы построения полинома устойчивости (3) и соответствующей численной схемы (2) подробно рассмотрены в работе [5]. Показано, что возможно автоматизированное построение методов с заданной областью устойчивости. В частности, расширение областей устойчивости известных численных схем. Для решения этих задач система ИСМА дополнена необходимым инструментарием [8].

3. Алгоритм с адаптивной областью устойчивости

В [5] сформулирован алгоритм переменного порядка и стадий DISPS, основанный на явных схемах Рунге-Кутты (2). Переключение между численными схемами и выбор шага интегрирования осуществляется по критериям точности и устойчивости вычислений. Так, в области с быстро меняющимся решением используются методы высоких порядков, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений. На интервалах расчета, где критическим фактором является устойчивость вычислений, используются многостадийные методы низких порядков точности.

Неравенства для контроля точности и устойчивости методов первого, второго и третьего порядков сформулированы и обоснованы в [5], поэтому здесь приведем только некоторые из них без доказательства. Для контроля точности использованы условия $A'_n \leq \varepsilon$, $A''_n \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений. Оценка ошибки A'_n для методов первого и второго порядков вычисляется по формуле $A'_n = g'_p \|k_2 - k_1\|$, где k_1 и k_2 – стадии численной схемы, p – порядок точности метода. Величина g'_1 для схемы первого порядка вычисляется по формуле $g'_1 = g''_1 / |\beta_{21}|$, где $g''_1 = \max_{m \in M_1} ((1 - 2c_{m2})/2)$, M_1 – множество используемых методов первого порядка, c_{m2} – коэффициент полинома устойчивости при z^2 m -стадийного метода.

Для контроля устойчивости используется неравенство $V_n \leq D$ [5], где V_n – оценка максимального собственного числа матрицы Якоби, а D – длина интервала устойчивости используемого на текущем шаге метода. Величина v_n вычисляется степенным методом. Для методов первого и второго порядка V_n вычисляется по формуле

$$V_n = \frac{1}{|\beta_{32}|} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|, \quad (4)$$

где N – размерность решаемой системы.

В оригинальный алгоритм DISPS [5] внесен ряд изменений. Так, допускается, что число стадий в двух соседних методах одного порядка может отличаться на любую величину. Также возможно изменение порядка точности больше чем на 1. Максимальный порядок точности не ограничен третьим. При наличии методов оценки точности и устойчивости для схем более высоких порядков их также можно включить в алгоритм. Поэтому модифицированный алгоритм получил название DISPS1.

Перейдем к алгоритму интегрирования. Предварительно зададим два числа l_1 и l_2 , определяющие количество шагов без увеличения шага интегрирования и без смены численной схемы, соответственно, после возврата (перевычисления решения из-за невыполнения точности) и после успешного шага. Подсчитывать количество шагов будем в переменных l'_1 и l'_2 соответственно, равных нулю при первом обращении к алгоритму.

Алгоритм DISPS1:

Шаг 1. Вычислить стадии k_i , необходимые для расчета A'_n .

Шаг 2. Вычислить оценку ошибки A'_n .

Шаг 3. Вычислить значение s_n из соотношения $q^{2s_n} A'_n = \varepsilon$.

Шаг 4. Если $s_n < 0$, то $l'_1 = l_1$, $h_n = q^{s_n} h_n$ и перейти на шаг 1.

Шаг 5. Вычислить остальные стадии k_i .

Шаг 6. Вычислить приближение к решению в точке t_{n+1} .

Шаг 7. Вычислить стадию $k_1 = hf(y_{n+1})$.

Шаг 8. Вычислить оценку ошибки A''_n .

Шаг 9. Вычислить значение v_n из соотношения $q^{2v_n} A''_n = \varepsilon$.

Шаг 10. Если $v_n < 0$, то $l'_1 = l_1$, $h_n = q^{v_n} h_n$ и перейти на шаг 1.

Шаг 11. Счетчики l'_1 и l'_2 уменьшить на 1.

Шаг 12. Если $l'_1 \geq 0$ и $l'_2 \geq 0$, то $h_{n+1} = h_n$ и перейти к следующему шагу интегрирования (возврат на шаг 1).

Шаг 13. $l'_2 = l_2$.

Шаг 14. Удвоить значения A'_n и A''_n и заново вычислить параметры s_n и v_n для создания запаса по точности.

Шаг 15. Если используется фиксированная схема без контроля устойчивости, то вычислить значение параметра r_n по формуле $r_n = \max(s_n, v_n)$ и перейти на шаг 21.

Шаг 16. Вычислить оценку V_n по формуле (4).

Шаг 17. Вычислить значение параметра r_n из соотношения $q^{r_n} V_n = D$, где D – интервал устойчивости используемого метода.

Шаг 18. Если используется фиксированная схема, перейти на шаг 21.

Шаг 19. Вычислить значение параметра $q_n = q^{\min(s_n, v_n)}$.

Шаг 20. Определить число стадий для следующего шага интегрирования. Если $q_n V_n > D$ и есть схема того же порядка с большим числом стадий – использовать эту схему на следующем шаге. Если есть схема того же порядка с меньшим числом стадий и интервалом устойчивости, большим чем $q_n V_n$, то использовать ее. В остальных случаях число стадий не меняется.

Шаг 21. Вычислить новый шаг интегрирования: $h_{n+1} = \max\left(h_n, q^{\min(s_n, v_n, r_n)} h_n\right)$.

Шаг 22. Если расчеты ведутся с переменным порядком, текущий метод имеет минимальное число стадий, а среди методов большего порядка имеется метод с интервалом устойчивости, большим чем $q_n V_n$, то использовать этот метод. Если расчеты ведутся с переменным порядком, число стадий достигло максимального значения и $q_n V_n > D$, то найти среди методов меньшего порядка схему с минимальным числом стадий, при котором интервал устойчивости больше D и использовать ее на следующем шаге интегрирования. В противном случае следующий шаг выполняется по текущей схеме.

4. Тестирование

Рассмотрим модель конкуренции Лотки-Вольтерра на основе системы реакции-диффузии в двухмерном пространстве [9]. Здесь имеются два вида переменных, $c^1(x, z, t)$ и $c^2(x, z, t)$, представляющих плотности конкурирующих видов в пространстве среды обитания ($\Omega = \{(x, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1.8\}$) и во времени ($0 \leq t \leq 10$).

Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} = d_i \left(\frac{\partial^2 c^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^i}{\partial z^2} \right) + f^i(c^1, c^2), i = 1, 2, \quad (5)$$

где $d_1 = 0.05$, $d_2 = 1.0$, $f^1(c^1, c^2) = c^1(b_1 - a_{11}c^1 - a_{12}c^2)$, $f^2(c^1, c^2) = c^2(b_2 - a_{21}c^1 - a_{22}c^2)$,
 $a_{11} = 10^6$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 10^6 - 1$, $a_{22} = 10^6$, $b_1 = b_2 = 10^6 - 1 + 10^{-6}$.

Граничные условия $\partial c^i / \partial x = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $\partial c^i / \partial z = 0$ при $z = 0$, $z = 1.8$. Начальные условия: $c^1(x, z, 0) = 500 + 250 \cos(\pi x) \cos(10\pi z / 1.8)$, $c^2(x, z, 0) = 200 + 150 \cos(10\pi x) \cos(\pi z / 1.8)$. Решение этой реакционно-диффузионной системы сходится при $t \rightarrow \infty$ к равновесному решению $c^1 = c_*^1 \equiv 1 - 10^{-6}$, $c^2 = c_*^2 \equiv 10^{-6}$.

Текстовая модель на языке LISMA_PDE [10, 11] представлена на рисунке 1.

```

1 // Параметры
2 const d1 = 0.05, d2 = 1.0,
3     a11 = 1.0e6, a12 = 1.0,
4     a21 = 1.0e6 - 1.0, a22 = 1.0e6,
5     b1 = b2 = 1.0e6 - 1.0 + 1.0e-6;
6
7 // Пространственные переменные
8 var x[0, 1.0] arx 5;
9 var z[0, 1.8] arz 5;
10
11 // Система уравнений
12 c1' = d1 * (D(c1, x, 2) + D(c1, z, 2)) + f1;
13 c2' = d2 * (D(c2, x, 2) + D(c2, z, 2)) + f2;
14
15 f1 = c1 * (b1 - a11*c1 - a12*c2);
16 f2 = c2 * (b2 - a21*c1 - a22*c2);
17
18 // Краевые условия
19 edge D(c1, x) = 0 on x both;
20 edge D(c2, x) = 0 on x both;
21 edge D(c1, z) = 0 on z both;
22 edge D(c2, z) = 0 on z both;
23
24 // Начальные условия
25 c1(t0) = 500.0 + 250.0*cos(pi*x)*cos(10.0*pi*z/1.8);
26 c2(t0) = 200.0 + 150.0*cos(10.0*pi*x)*cos(pi*z/1.8);

```

Рис. 1. Текстовая модель в ИСМА

Система (5) приводилась к конечно-разностной форме. Области значений пространственных переменных x и z разбивались в сетку с шагом M и N соответственно. В результате аппроксимации формировалась задача размерностью $2 * M * N$. Таким образом, система рассчитывалась в размерности от 50 до 1800 уравнений. Результаты расчета в ИСМА представлены на рисунке 2.

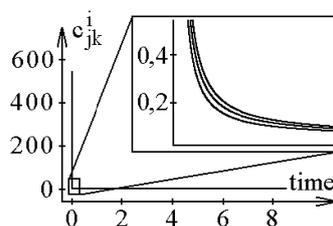


Рис. 2. Результаты решения задачи (5) в ИСМА

Выполнено сравнение эффективности алгоритма DISPS1 с явными методами STEKS и RK2ST, а также с полуявным (m,k)-методом МК22. Алгоритм STEKS [5] построен на основе схемы Мерсона с контролем точности и устойчивости. Метод RK2ST [12] основан на двухстадийной схеме (2) и также имеет контроль точности и устойчивости вычислений. Метод МК22 [13] является L-устойчивым, для повышения эффективности расчета применяется «замораживание» матрицы Якоби. Оценка эффективности алгоритмов выполнялась по трем критериям: количество выполненных шагов, количество расчетов правой части и время, затраченное на вычисления. Полученные результаты представлены в таблице 1.

В приемлемое время решение удалось получить только явными и полужавными (m,k)-схемами [1]. Особенность решения системы (5) состоит в том, что в начале интервала интегрирования оно меняется быстро, а после – очень медленно. Из явных схем переменного порядка с контролем устойчивости наилучшие результаты показал алгоритм DISPS1, который использует метод третьего порядка в начале интегрирования и шестистадийный метод первого порядка на участке с медленно меняющимся решением. Полуявные (m,k)-методы МК22 и МК21 при небольшой размерности задачи (до 1000 уравнений) более эффективны, чем явные схемы. Это обусловлено их L-устойчивостью и замораживанием матрицы Якоби. Однако с ростом размерности задачи они проигрывают в скорости счета явным алгоритмам.

Заключение

В работе сформулирован и реализован алгоритм интегрирования с контролем устойчивости, использующий заданные численные схемы на разных участках решения. Выбор численной схемы осуществляется автоматически по критериям точности и устойчивости. Результаты тестирования подтвердили высокую эффективность адаптивного алгоритма. Особенностью реализации DISPS1 является то, что пользователь может самостоятельно включать в него численные схемы, заранее настроенные на определенный класс задач. Все это позволяет оценить DISPS1 как универсальный, высокоэффективный и надежный алгоритм. Дальнейшим усовершенствованием разработанного алгоритма может быть включение в него неявных и полуявных методов, что позволит решать задачи повышенной жесткости.

Таблица 1

Показатели эффективности алгоритмов при решении задачи (5)

Размерность	Характеристика	DISPS1	STEKS	МК22	RK2ST
5*5 (N=50)	Кол-во шагов	153211	2692086	4506	5015718
	Расчетов пр. части	1067834	13460494	25243	10035587
	Время решения, с	8,25	97,14	0,47	130,3
10*10 (N=200)	Кол-во шагов	151913	2743535	4508	5014709
	Расчетов пр. части	1058623	13717747	74501	10033627
	Время решения, с	18,45	188,8	2,92	228,8
15*15 (N=450)	Кол-во шагов	152833	2757017	4506	-
	Расчетов пр. части	1065196	13785149	154895	-
	Время решения, с	35,89	332,6	16,02	-
20*20 (N=800)	Кол-во шагов	153187	-	4506	-
	Расчетов пр. части	1067666	-	268295	-
	Время решения, с	62,94	-	76,66	-
25*25 (N=1250)	Кол-во шагов	153224	-	4506	-
	Расчетов пр. части	1067874	-	414095	-
	Время решения, с	168,6	-	329,9	-
30*30 (N=1800)	Кол-во шагов	128169	-	-	-
	Расчетов пр. части	892534	-	-	-
	Время решения, с	201,4	-	-	-

Литература.

- Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем: монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 451 с.
- Шорников Ю.В., Дружинин В.С., Макаров Н.А., Омельченко К.В., Томилов И.Н. «Инструментальные средства машинного анализа» // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. – М.: Роспатент, 2005.
- Esposito J., Kumar V., Pappas G.J. «Accurate event detection for simulating hybrid systems». Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC), vol. LNCS 2034. Springer-Verlag, 1998.
- Новиков Е.А., Шорников Ю.В. «Моделирование жестких гибридных систем с односторонними событиями в инструментальной среде ИСМА» // Вычислительные технологии. - 2013. - Том 18, специальный выпуск. - С. 45-51.

5. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. Предпр. РАН, 1997. – 195 с.
6. Nasyrova M.S., Shornikov Yu.V., Dostovalov D.N. «Architecture, implementation and performance optimization in organizing parallel computations for simulation environment» // Lecture Notes in Computer Science. - 2015. - Vol. 9251: (Parallel Computing Technologies: 13 intern. conf., PaCT 2015, Petrozavodsk, 31 Aug. – 4 Sept. 2015). - P. 536-545.
7. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально–алгебраические задачи. – М.: Мир. – 1999.
8. Шорников Ю.В., Новиков Е.А., Достовалов Д.Н. «Алгоритм численного конструирования областей устойчивости одношаговых методов» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009610905. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2009.
9. Brown Peter N., Hindmarsh Alan C. Matrix Free Methods in the Solution of Stiff systems of ODEs, Lawrence Livermore National Laboratory, 1983. – 38 p.
10. Шорников Ю.В., Бессонов А.В. «Компонента спецификации моделей гибридных систем на языке LISMA_PDE» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617191. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – 2015.
11. Бессонов А.В. «Компьютерное моделирование пространственно-временных гибридных систем» // Системы управления и информационные технологии. – 2015. – №3.1(61). – С. 123–129.
12. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. «Применение (2,1)-метода для моделирования гибридных систем» // Приложение к «Вестнику КрасГАУ», Ресурсосберегающие технологии механизации сельского хозяйства – 2010 – №6. – С. 147-151.
13. Новиков А.Е., Новиков Е.А., Шорников Ю.В. «Аппроксимация матрицы Якоби в (2,2)-методе решения жестких систем» // Доклады АН ВШ РФ. – 2008. – №1(10). – С. 31-44.

**СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ (САПР)
РЕНТГЕНОВСКОЙ ТРУБКИ ОТКРЫТОГО И ЗАКРЫТОГО ТИПА
ДЛЯ НУЖД НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ**

С.С. Баус, магистрант

Томский политехнический университет

634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822)-12-34-56

E-mail: ssb@tpu.ru

В наш век информационных технологий, когда каждая минута в жесткой конкурентной борьбе играет решающую роль в успешности разработки, необходимо разрабатывать и осваивать новые способы всестороннего ускорения технологической подготовки производства новых изделий. Эта задача в современных условиях решается путем разработки типовых технологических процессов, использования автоматизированных систем проектирования, а также их техническая и программная реализация, стандартной и обратимой оснастки, которая значительно ускорит и облегчит работу конструкторского отдела по разработке нового продукта.

Данная статья посвящена разработке и формированию методологической основы проектирования, а также структуры самих элементов САПР для рентгеновских трубок 2 типов.

В процессе исследования различных органических и неорганических материалов очень важно правильно подобрать метод исследования, а также основные режимы и мощности, позволяющие проведение опытов по изучения материалов. В частности, для нужд, касающихся анализа структуры неорганических материалов необходимо рассчитать и подобрать необходимые значения мощности, силы тока, размера вокселя, интенсивность и напряжение рентгеновской трубки. Подобранные параметры должны обеспечивать достаточную высокую разрешающую способность, позволять качественно исследовать объекты.

Данная САПР будет базироваться на следующих принципах:

- системного единства;
- совместимости;
- типизации;
- развития.