

УДК 681.5

УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ ПОЛЯМИ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.Б. Чернышев

ГОУ ВПО «Северо-Кавказский государственный технический университет»,
филиал в г. Кисловодске
E-mail: chalbor@rambler.ru

Проведено исследование нелинейной системы управления температурным полем. Рассмотрен процесс формирования температурного поля под воздействием тепловых источников, включение которых осуществляется с помощью релейных элементов. Проводится анализ влияния источников в зависимости от их координат и времени включения. Приведена оценка отклонения температуры от заданного значения. Предложена методика оценки шага дискретизации распределённого управляющего воздействия. Исследование проводится на основе метода функций Грина.

Ключевые слова:

Температурное поле, управляющие воздействия, секционный нагреватель, шаг дискретизации, функция Грина.

Многие технологические процессы требуют обеспечения управления температурными полями, поэтому задача разработки методик синтеза регуляторов для систем управления объектами с распределёнными параметрами становится всё более актуальной. Одним из методов описания распределённых объектов является способ на основе импульсных переходных функций или функций Грина [1–3]. В качестве пространственного объекта рассмотрим тонкий однородный цилиндрический стержень длины l , теплоизолированный с боков. На концах стержня поддерживается нулевая температура, в начальный момент времени температура во всех точках равна нулю. Будем полагать, что управляющим воздействием является тепловой поток, создаваемый источниками, равномерно распределёнными по границе боковой поверхности цилиндра. Включение источников осуществляется с помощью релейных элементов. Значение температуры в точке x в момент времени t , вызванной действием мгновенного точечного источника, действующего в момент τ в точке ξ , определяется с помощью функции Грина [1, 2]. Функция Грина для отрезка может быть представлена в виде ряда Фурье [4].

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi.$$

Поставим задачу стабилизации температуры на уровне некоторого значения $T_{зад}$. В начальный момент времени $\tau_0=0$ включаются все источники. Формируется функция «начального нагрева» (рис. 1). Предполагается, что мощность каждого источника равна единице, в этой связи размерности правых и левых частей некоторых уравнений формально могут не совпадать. Каждый из единичных мгновенных точечных источников оказывает воздействие на все точки стержня. Значение температуры в произвольной фиксированной точке x_j может быть представлено в виде соотношения:

$$T(x_j, t, \tau_0) = \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_i,$$

где k – количество составляющих ряда Фурье, d – количество мгновенных точечных источников. При возрастании времени t функция $T(x, t, \tau_0)$ будет убывать. Убывание температуры вызвано нулевыми граничными условиями и свойством дельта-функций, генерируемых источниками (рис. 2).

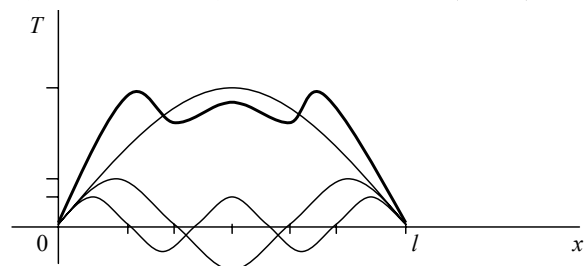


Рис. 1. График функции начального нагрева

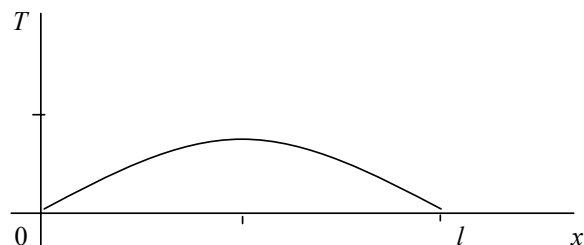


Рис. 2. Вид функции при большом значении времени

При достижении в какой-то точке x_j значения $T_{зад}$, в момент времени τ_1 включается источник, соответствующий датчику с номером j , и оказывает влияние на все точки (рис. 3). При этом продолжается действие всех источников, включённых при значении $\tau_0=0$.

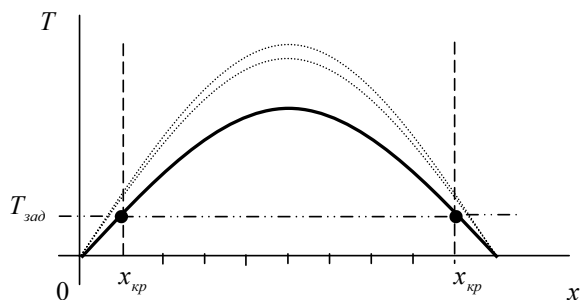


Рис. 3. Достижение функцией заданного значения

Таким образом, получим общий вид выходной функции:

$$T(x_j, t, \tau) = \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_i + \sum_p \sum_{n=1}^k \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau_p) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_j \sin \frac{\pi n}{l} \xi_{z(p)},$$

где $p=1,2,3,\dots$ – порядковый номер включения источника, $z(p)$ – один из источников, τ_p – момент времени включения источника под номером $z(p)$. Или

$$T(x_j, t, \tau) = T(x_j, t, \tau_0) + \sum_p T(x_j, t - \tau_p).$$

Для определения времени и координат точки первого достижения функцией $T(x, t, \tau)$ значения $T_{3\alpha\delta}$, преобразуя выражение $T(x_j, t, \tau_0)$, получим:

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \left[\exp \left[- \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi}{l} x \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i + \exp \left[- \left(\frac{2\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{2\pi}{l} x \sum_{i=1}^d \sin \frac{2\pi}{l} \xi_i + \exp \left[- \left(\frac{3\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{3\pi}{l} x \sum_{i=1}^d \sin \frac{3\pi}{l} \xi_i + \dots \right].$$

При чётных значениях n положительные и отрицательные составляющие суммы

$$\sum_{i=1}^d \sin \frac{n\pi}{l} \xi_i$$

взаимно исключают друг друга. При нечётных значениях n

$$\sum_{i=1}^d \sin \frac{n\pi}{l} \xi_i = \sum_{i=1}^{d/n} \sin \frac{n\pi}{l} \xi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i.$$

Тогда:

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n-1} \exp \left[- \left(\frac{(2n-1)\pi a}{l} \right)^2 t \right] \times \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i. \quad (1)$$

Преимущество полученной формулы в том, что действие источников выражается с помощью только первой гармоники ряда Фурье. Величина

$\frac{2}{l} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i$ является постоянной относительно x и t . Её значение зависит только от количества источников. При значениях $t=0$, $k=3$ и $\frac{2}{l} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i = 1$ формула (1) примет вид:

$$T(x, 0) = \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{l} x.$$

При увеличении времени t каждое из слагаемых формулы (1) будет убывать. Влияние на итоговую

сумму второго слагаемого будет в $3 \exp \left[8 \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t \right]$

раз меньше первого. С заданной точностью ε можно определить значение t^* , начиная с которого слагаемым с номером n можно пренебречь.

$$t^* \geq \frac{1}{n^2 - 1} \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \frac{1}{n\varepsilon}.$$

Таким образом, в момент времени

$t \geq \frac{1}{8} \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \frac{1}{3\varepsilon}$ функция, определяющая распределение температурного поля, будет выражаться

через одну первую составляющую ряда Фурье.

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \exp \left[- \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi}{l} x \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i. \quad (2)$$

В этом случае функция, убывая, достигнет значения $T_{3\alpha\delta}$ в крайних точках установки датчиков. Пусть x_{kp} – точка установки крайнего датчика, тогда время, при котором датчик впервые зафиксирует значение $T_{3\alpha\delta}$, можно определить по формуле:

$$\tau_1 = \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{l} x_{kp} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i}{l T_{3\alpha\delta}} \right), \quad (3)$$

при выполнении условия:

$$2 \sin \frac{\pi}{l} x_{kp} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i \geq l T_{3\alpha\delta}. \quad (4)$$

Включение источников осуществляется с помощью релейных элементов, поэтому τ_1 – время первого переключения реле, $T_{3\alpha\delta}$ – пороговое значение. В момент времени τ_1 источники, соответствующие крайним датчикам, вырабатывают сигнал

$$T(x, t - \tau_1) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^k \exp \left[- \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 (t - \tau_1) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi_{kp}. \quad (5)$$

Этот сигнал добавляется к имеющемуся значению $T(x, t)$. В результате наложения сигналов, при значении $t > \tau_1$ для середины отрезка, получим:

$$T(x, t, \tau_1) = T(x, t) + 2T(x, t - \tau_1).$$

Импульс, приложенный в момент τ_1 в точке ξ_1 , с течением времени $t > \tau_1$ оказывает воздействие на все точки отрезка. Время «прихода» максимума этого сигнала для всех точек различно. Это время зависит от расстояния между точкой включения источника и точкой наблюдения, а также от близости источника к концу отрезка. От длины отрезка зависит значение максимальной температуры, «дошедшей» от источника до точки наблюдения. В связи с тем, что на концах стержня во время всего

процесса температура поддерживается равной нулю, максимальная температура с течением времени будет стремиться к середине стержня. В качестве точки наблюдения будем рассматривать точку $x=l/2$. Выражение функции источника для неограниченной прямой имеет вид [4]:

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - \tau)}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)} \right].$$

Используя это выражение, получены формулы, выражающие время достижения максимального значения температуры в середине отрезка при воз-

действии источника $\xi \in \left(0; \frac{l}{2}\right)$.

$$t_m = \begin{cases} \frac{\left(\frac{l}{2} - \xi_1\right)^2}{2a^2} + \tau_1; & \text{при } \frac{3l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{\left(\frac{l}{10} - \xi_1\right)^2}{2a^2} + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } \frac{l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{3l}{10} \\ \frac{\left(\frac{l}{10} - \xi_1\right)^2}{4a^2} + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{l}{10} \end{cases} \quad (6)$$

В момент «прихода» максимума сигнала значения температуры в середине отрезка будет определяться формулой

$$T\left(\frac{l}{2}, t_m, \tau_1\right) = T\left(\frac{l}{2}, t_m\right) + 2T\left(\frac{l}{2}, t_m - \tau_1\right).$$

Отклонение температуры от заданного значения можно определить из равенства

$$\Delta_1 = \left| T\left(\frac{l}{2}, t_m, \tau_1\right) - T_{зад} \right|.$$

Полученная погрешность характеризует качество релейного управления. В выражении значение $T(l/2, t_m)$ вычисляется по формуле (2), значение τ_1 — по формуле (3), при выполнении условия (4), $T(l/2, t_m - \tau_1)$ — по формуле (5), t_m — из соотношений (6). Таким образом, получено:

$$\Delta_1 = \left| \frac{2}{l} \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t_m \right] \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i + \frac{4}{l} \sum_{n=1}^k \exp \left[-\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t_m - \tau_1) \right] \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n}{l} \xi_1 - T_{зад} \right|,$$

где

$$\tau_1 = \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{l} x_1 \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i}{l T_{зад}} \right).$$

При условии

$$2 \sin \frac{\pi}{l} x_{кр} \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i \geq l T_{зад}.$$

Время второго включения источника (переключения реле) определяется по формуле:

$$\tau_2 = \frac{2\tau_1}{l - \frac{2T_{зад}l}{\pi \sin \frac{\pi}{l} \xi_1}} + \tau_1.$$

Тогда $\tau_2 - \tau_1$ — временной интервал переключения реле.

Результаты компьютерного моделирования описанного процесса согласуются с выводами и зависимостями, полученными с использованием математического аппарата.

При управлении температурными полями реализация входного воздействия осуществляется путем дискретизации его по пространственным координатам. Физически реализацию поля теплового потока осуществляют с помощью секционного нагревателя, при этом число секций может быть сколь угодно большим. На основе проведенных исследований может быть предложена следующая методика оценки требуемого размера шага дискретизации, определяющего количество секций нагревателя, распределенного управляющего воздействия, исходя из заданной амплитуды колебаний функции выхода:

- Задать значения: Δ_1 — допустимая погрешность, $T_{зад}$ — требуемая температура, l — длина стержня, a — коэффициент температуропроводности материала.
- Изменять значение параметра n — количество секций нагревателя.
- Для каждого значения n вычислять: ξ_1 , τ_1 , τ_2 , t_m .

$$\xi_1 = \frac{l}{2n}; \quad \tau_1 = \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \ln \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{l} x_1 \sum_{i=1}^d \sin \frac{\pi}{l} \xi_i}{l T_{зад}} \right);$$

$$\tau_2 = \frac{2\tau_1}{l - \frac{2T_{зад}l}{\pi \sin \frac{\pi}{l} \xi_1}} + \tau_1;$$

$$t_m = \begin{cases} \frac{\left(\frac{l}{2} - \xi_1\right)^2}{2a^2} + \tau_1; & \text{при } \frac{3l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{\left(\frac{l}{10} - \xi_1\right)^2}{2a^2} + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } \frac{l}{10} \leq \xi_1 \leq \frac{3l}{10} \\ \frac{\left(\frac{l}{10} - \xi_1\right)^2}{4a^2} + \frac{l^2}{25a^2} + \tau_1; & \text{при } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{l}{10} \end{cases}$$

- Проверять выполнение условий:

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi_1 = \frac{\Delta_1 + T_{\text{зад}} - \frac{4}{\pi} \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 t_m \right]}{\frac{4}{l} \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 (t_m - \tau_1) \right]},$$

$$\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \geq T_{\text{зад}}.$$

- При выполнении указанных условий зафиксировать значение n и определить размер секции:

$$r_1 = \frac{l}{n}.$$

- Проверять выполнение условий:

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi_1 = \frac{l}{\pi} \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 (2\tau_1 - \tau_2) \right] \times \\ \times \left[1 - \exp \left[-\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 (\tau_2 - \tau_1) \right] \right];$$

$$\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \geq T_{\text{зад}}.$$

- При выполнении указанных условий зафиксировать значение n и определить размер секции:

$$r_2 = \frac{l}{n}.$$

- Из полученных значений r_1 и r_2 выбрать меньшее:

$$r = \min \{r_1; r_2\}.$$

Если $r_1 > r_2$, т. е. $r = r_2$, то желаемый результат достигнут. Колебания, в пределах допустимой амплитуды, будут совершаться относительно заданного значения выходной функции.

Если $r_1 < r_2$, т. е. $r = r_1$, то амплитуда колебаний будет в пределах допустимой, но функция, совершая колебательные движения, будет медленно убывать и через определённое время выйдет за пределы допустимого интервала относительно заданного значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. — М.: Высшая школа, 2003. — 299 с.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. — М.: Высшая школа, 2001. — 550 с.
3. Першин И.М. Анализ и синтез систем с распределёнными параметрами. — Пятигорск: РИА КМВ, 2007. — 244 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Поступила 06.02.2009 г.

УДК 621.311

АНАЛИЗ ПЕРЕМЕННЫХ РЕЖИМОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО СМЕШИВАЮЩЕГО ПОДОГРЕВАТЕЛЯ

Н.Н. Галашов

Томский политехнический университет
E-mail: gal@tpu.ru

Проведен анализ работы вертикального смешивающего подогревателя в переменных установившихся режимах при изменении давления пара в корпусе; расхода и температуры воды на входе в подогреватель и относительной величины отводимого выпара. Показано, что основные изменения температуры нагреваемой воды в подогревателе при работе в переменном режиме происходят в первом отсеке.

Ключевые слова:

Смешивающий подогреватель, струйный отсек, нагрев, недогрев, выпар.

Подогреватели смешивающего типа нашли широкое применение на тепловых электростанциях, но до сих пор их процессы еще слабо изучены. Наибольшее внимание было уделено вопросам надежности работы подогревателей в переходных режимах при сбросах нагрузки [1, 2]. Вопросы теплообмена в смешивающих подогревателях исследованы в узком диапазоне давлений, всего до 0,13 МПа [3], в то время как существующие подогреватели работают при давлениях до 0,2 МПа, и предполагается

использовать их при более высоких давлениях. Имеются единичные исследования по изменению параметров в этих подогревателях при изменении режимов работы турбоустановки [4], которые не позволяют оценить влияние отдельных факторов на характеристики отсеков подогревателя, что требуется при проектировании подогревателей.

В данной работе рассматриваются вопросы изменения по греющим отсекам подогревателя нагрева воды Δt и ее недогрева до температуры насы-