новесия Джона Нэша открыло многочисленные исследования с целью приближения его к реальной экономической действительности.

Рассмотрим простой пример равновесия Нэша. Два игрока делят 100 рублей. Если два игрока одновременно озвучивают сумму, если их общая сумма получилась меньше ста, то каждый получает то, что хотел. Если же общее количество выходит больше ста, то игрок, который назвал наименьшее количество, получает свой выигрыш, а тот, кто попросил наивысшую сумму, получает то, что осталось. Если два игрока называют одинаковую сумму, то оба получают по 50 рублей.

Таким образом, дополненная теория игр дала экономике мощный математический инструментарий, который помог экономистам освободиться от зависимости от формального математического аппарата физики. Равновесие Нэша - это метод анализа разных конкретных проблем и ситуаций, происходящих на рынках. Теория игр в дальнейшем была использована в исследованиях Томаса Шеллинга и Роберта Оманна.

Пережив популярность в 70-80 гг., теория игр заняла прочные позиции в некоторых областях социального значения. Команда Нэша в свое время наблюдала особенность поведения игроков, в начале 50 г. были расценены как провал. Сегодня же они легли в основу «экспериментальной экономики». «Равновесие Нэша» до сих пор используют в анализе олигополий: поведении небольшого количества конкурентов в отдельной области рынка.

Кроме того, на Западе теория игр активно применяется при выдаче лицензий на вещание или связь: выдающий орган математически высчитывает наиболее оптимальный вариант распределения частот. С теорией игр успешно работают в юриспруденции, социальной психологии, спорте и политике. В политической области благодаря равновесию Нэша является институционализация понятия «оппозиция»

Однако теория игр нашла свое применение не только в социальных науках. Современная эволюционная теория была бы невозможна без «равновесии Нэша», которое математически показывает, почему волки ни когда не съедают всех зайцев (т. к иначе они через поколение умрут от голода) и почему животные с дефектами делают свой вклад в генофонд своего вида (потому что, тогда вид получает новые полезные характеристики).

Литература.

1. Нейман Дж. Фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М: Изд-во: Наука, 1970 г., 983с.
2. http://bourabai.ru (Частное Боровское исследовательское учреждение по внедрению новых технологий).
3. http://gilbo.ru (Школа эффективных лидеров)
4. http://economicportal.ru/index.html (Экономический портал)
5. Авинаш К. Диксит, Барри Дж. Нейлбафф., Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. М, Изд-во: Манн, Иванов и Фербер , 2014 г. 494с.
6. Шеллинг К. Шеллинг. Стратегия конфликта, М, Изд-во: ИРИСЭН, 2007 г. 376с.
7. http://ecsocman.hse.ru (Федеральный образовательный портал)
8. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций. Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2006.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ В ЭКОНОМИКЕ

Н.Е. Альберг, студентка группы 17Б51,
научный руководитель: Лазарева А.Н.
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-maiL: nadia.102@yandex.ru

Современному экономисту необходима серьезная математическая подготовка – это положение общепризнано. Линейная алгебра и в особенности матричная алгебра относятся к числу наиболее важных для экономистов областей математики. Дело в том, что широко применяющиеся сейчас в исследовательской и плановой работе экономико-математические модели часто предназначены для описания зависимости от ряда факторов, взаимосвязи экономических структур, их динамики во времени и т. д. Один из наиболее компактных способов описания таких зачастую сложных и крупных структур заключается, как известно, в матричном отображении. Применение матриц не только позволяет «экономно» формализовать поставленную проблему, но и, что гораздо важнее, использовать многие достижения матричной алгебры в экономических расчетах.

Для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений в математике широко применяются матрицы. В этом случае, количество столбцов матрицы соответствует числу неизвестных, а количество строк – количеству уравнений. В результате, решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами [1].

Рассмотрим использования матриц в экономике. Для этого нам необходимо будет проанализировать решения экономической задачи и сделать определенные выводы.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица 1 «Распределение ресурсов по отдельным отраслям экономики» может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям [2]:

Таблица 1

Распределение ресурсов по отдельным отраслям экономики

Ресурсы, усл. ед.	Отрасли экономики	
	Промышленность	Сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

$$A=\begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}$$

В данной записи, например, матричный элемент $a_{12} = 4,1$ показывает, сколько электроэнергии употребляет сельское хозяйство, а элемент $a_{31} = 4,8$ - сколько водных ресурсов потребляет промышленность [3].

Рассмотрим следующую задачу: пусть предприятие выпускает продукцию трех видов: P1, P2, P3 и использует сырье двух типов: S1 и S2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

где каждый элемент a_{ij} ($i = 1,2,3$; $j = 1,2$) показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой C = (100 80 130), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) - матрицей столбцом:

B

Рассмотрев задачу, получили: затраты первого сырья составляют $S1 = 2\cdot100 + 5\cdot80 + 1\cdot130 = 730$ ед. и второго - $S2 = 3\cdot100 + 2\cdot80 + 4\cdot130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение:

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}$$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730\cdot30 + 980\cdot50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде: $Q = S\cdot B = (CA)B = (70900)$.

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу:

$$R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$$

а затем общую стоимость сырья:

$$Q = C \cdot R = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900)$$

На этом примере мы убедились в выполнении ассоциативного закона произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$.

Матрицы также нашли своё применение при решении задач о прогнозах выпуска продукции исходя из запасов сырья.

Рассмотрим пример. На предприятии выпускается три вида продукции, используя сырье трех типов. Характеристики производства указаны в таблице 2. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Задачи такого рода типичны для экспертных оценок проектов освоения месторождений полезных ископаемых, оценок и прогнозов функционирования предприятий, а также для планирования микроэкономики предприятий.

Таблица 2

Характеристики производства

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес ед./изд.			Запас сырья, вес ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Через x_1, x_2 и x_3 $_о$бозначим неизвестные объемы выпуска продукции. Тогда можно записать балансовые соотношения при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}$$

Решая полученную систему матричным методом, находим, что п объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах) x_1=150, x_2=250, x_3=100.

Одним из ярких примеров применения матриц в экономике является матричная интерпретация Венгерского алгоритма, решающего задачу о назначениях. Для n работ и работников дана матрица размером n×n, отражающая стоимость выполнения каждым работником соответствующей работы. Необходимо выбрать каждому работнику такую работу, чтобы общая сумма затрат была наименьшей.

Далее под назначением будем понимать соответствие между работами и работниками, имеющее нулевую стоимость.

Запишем задачу в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{pmatrix}$$

где a, b, c, d — работники, которые должны выполнить работы 1, 2, 3, 4. Коэффициенты a1, a2, a3, a4 обозначают стоимость выполнения работником «a» работ 1, 2, 3, 4 соответственно. Аналогичный смысл имеют остальные символы. Матрица квадратная, поэтому каждый работник может выполнить только одну работу [4].

Уменьшаем элементы построчно. Вычитаем из всех элементов первой строки наименьший из них, при этом обнулится хотя бы один из элементов первой строки. Аналогичные действия производим для других строк. В каждой строке матрицы появится хотя бы один ноль. Иногда нулей уже достаточно, чтобы найти назначение. Красным обозначены нули для назначенных работ.

$$\begin{pmatrix} 0 & a2' & 0 & a4' \\ b1' & b2' & b3' & 0 \\ 0 & c2' & c3' & c4' \\ d1' & 0 & d3' & d4' \end{pmatrix}$$

При большом количестве нулей для поиска назначения можно использовать алгоритмы нахождения максимального паросочетания двудольных графов. Если хотя бы в одном столбце нет нулевых элементов, то назначение невозможно.

Проанализировав применение матричной алгебры в экономике, можно прийти к выводу, что достоинства матриц состоят в том, что они указывают направление движения ресурсов; используют широкий набор стратегически значимых переменных. Среди недостатков этого инструмента можно отметить следующее: не обеспечивает реальных рекомендаций по разработке специфических стратегий; по матрицам невозможно определить сферы бизнеса, которые готовы стать победителями. Роль матриц в экономике велика, так как благодаря им многие экономические задачи можно проще решить, чем при использовании какого-нибудь другого математического аппарата.

Литература.

1. http://www.rusnauka.com/33_DWS_2010/33_DWS_2010/Matemathics/74680.doc.htm
2. http://window.edu.ru/resource/758/18758/files/MtdHiMth3.pdf
3. http://dlib.rsl.ru/01002830603
4. Венгерский алгоритм. Режим доступа [https://ru.wikipedia.org/]