

Конечно же, направление будет развиваться и не только в ближайшем, но и отдаленном будущем! Уже сейчас многие учебные центры переходят к электронному контенту, создают видеокурсы и интерактивные учебники. Все это - составляющие самообучения, которое с помощью мобильных устройств, становится все более доступным!

Если говорить в целом, то приложений связанных с учебой довольно много. К сожалению, многие из таких программ относятся к категории «поставить и стереть», но встречаются и довольно хорошо проработанные и удобные в использовании, за полные версии которых и заплатить не жалко. В любом случае с современными тенденциями поспорить сложно – смартфоны и планшеты появляются все у большего числа студентов и школьников, соответственно растет спрос и на мобильные приложения связанные с учебой. И это вполне логично. Главное, чтобы одновременно с количеством, росло и качество таких приложений, а сами учащиеся не подменяли мобильной программой умение работать собственной головой.

Литература.

1. Рынок мобильных приложений в России: перспективы и проблемы. // SmartInsight. URL: <https://smartinsight.ru/analytics/tynok-mobilnykh-prilozheniy-v-rossii-p.html>. 2015г. – Дата обращения 18.02.16
2. Обучение на мобильных устройствах: прошлое, настоящее и будущее// Apptractor. URL: [http://apptractor.ru/mLearning/\\_2015г.](http://apptractor.ru/mLearning/_2015г.) – Дата обращения 18.02.16
3. Math 4 Mobile - пять мобильных приложений для изучения // Web in Math. URL: <http://web-in-math.blogspot.ru/2011/07/math-4-mobile.html?m=0> 2015г. – Дата обращения 18.02.16

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

*И.В. Грасмик, студент гр.17В41,*

*научный руководитель: Соколова С.В.*

*Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского*

*Томского политехнического университета*

*652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26*

Дифференциальным биномом или биномиальным дифференциалом называют выражение вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

где  $a$  и  $b$  – любые константы, а показатели степеней  $m$ ,  $n$  и  $p$  – рациональные числа. Выясним случаи, когда эти выражения интегрируются в конечном виде. Рассмотрим случаи интегрирования этих выражений. Интегралы от дифференциальных биномов называют *интегралами Чебышева*.

1. *Первому случаю* соответствует целое  $p$ . Дифференциальный бином представляет собой дробно-линейную иррациональность вида  $R(x, \sqrt[r]{x}) dx$ , где  $r$  – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел  $m$  и  $n$ . Таким образом, интеграл от дифференциального бинома в этом случае рационализируется подстановкой

$$t = \sqrt[r]{x}.$$

2. *Второму случаю* соответствует целое число  $\frac{m+1}{n}$ . Сделаем подстановку  $z = x^n$  и положим

для краткости  $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ , получим

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^q dz.$$

Подынтегральная функция в правой части является дробно-линейной иррациональностью следующего вида  $R(z, \sqrt[s]{a + bz})$ , где  $s$  - знаменатель рационального числа  $p$ . Таким образом, для второго случая дифференциальный бином приводим к рациональному виду подстановкой

$$t = \sqrt[s]{a + bz}$$

3. Третьему случаю соответствует целому число  $(\frac{m+1}{n} + p)$ . Подынтегральная функция в правой части является дробно-линейной иррациональностью вида  $R(z, \sqrt[n]{\frac{a+bz}{z}})$ , поэтому интеграл от дифференциального бинома рационализируется подстановкой вида

$$t = \sqrt[n]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[n]{\frac{a}{x^n} + b}.$$

В середине 19-го века русский математик П.Л. Чебышев доказал, что указанными выше тремя случаями исчерпываются все случаи, когда дифференциальный бином интегрируется в элементарных функциях. (Мемуар 1853 года «Об интегрировании иррациональных дифференциалов»).

Рассмотрим некоторые примеры.

*Пример №1.* Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx.$$

Здесь  $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = -2$ . Так как  $p$  - целое, значит, используем подстановку из первого случая

$$x = t^6, dx = 6t^5 dt, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2.$$

Подставив в интеграл, получили:

$$I = 6 \int \frac{t^8}{(t^2+1)^2} dt = 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}\right) dt =$$

$$\frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 2 \operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{6}}) + C.$$

*Пример №2.* Вычислить интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} dx.$$

Здесь  $m = 1, n = -\frac{2}{3}, p = -\frac{1}{2}$ . В нашем случае  $\frac{m+1}{n} = 3$  - целое (относится ко второму случаю). Тогда

$$t^2 = 1 + x^{\frac{2}{3}}, x = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, dx = 3t(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt$$

подставим в интеграл:

$$I = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt = \frac{3}{5} t^6 - 2t^3 + 3t + C, \text{ где } t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}.$$

*Пример №3.* Вычислить интеграл

$$\int x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Здесь  $m = 5, n = 2, p = -\frac{1}{2}$ , так что  $\frac{m+1}{n} = 3$  (второй случай). Используя подстановку

$$t = \sqrt{1-x^2}, x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

будем иметь

$$-\int (1-t^2)^2 dt = -\int dt + 2\int t^2 dt - \int t^4 dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$-\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + C.$$

Пример №4. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2} (a+bx^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Здесь  $m = -2, n = 2, p = -\frac{1}{2}$ , так что  $\frac{m+1}{n} + p = -1$  (третий случай). Используя подстановку

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2} + b}, x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2 - d}}, dx = -\frac{\sqrt{a} dt}{\sqrt{(t^2 - d)^3}}$$

будем иметь

$$I = \int \left(-\frac{1}{a}\right) dt = -\frac{t}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2} + b}}{a} + C.$$

Литература.

1. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч.2 – М.: Издательство «Наука». – 1966. – 800 с.
2. В.Е.Шнейдер и др. Краткий курс высшей математики. – М.: Издательство «Высшая школа». – 1972. – 640 с.

### ФРАКТАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

*Н.С. Давлатзода, студент гр. 10А51, Ш.С. Нозирзода, студент гр.10А41,  
научный руководитель: Березовская О.Б.*

*Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского  
Томского политехнического университета  
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26*

Зачастую гениальные открытия, совершенные в науке, способны кардинально изменять нашу жизнь. Так, например, изобретение вакцины может спасти множество людей, а создание нового вооружения приводит к убийству. Однако существуют и такие открытия, которые, что называется, остаются в тени, причем несмотря на то, что они также оказывают то или иное влияние на нашу жизнь. Одним из таких открытий стал фрактал. Большинство людей даже не слышали о таком понятии и не смогут объяснить его значение

Само слово «фрактал» с латыни переводится как "частичный", "разделенный", "раздробленный", а что касается содержания этого термина, то формулировки как таковой не существует. Обычно его трактуют как самоподобное множество, часть целого, которая повторяется своей структурой на микроуровне. Этот термин придумал в семидесятых годах XX века Бенуа Мандельброт, который признан отцом фрактальной геометрии. Сегодня под понятием фрактала подразумевают графическое изображение некой структуры, которая при увеличенном масштабе будет подобна сама себе.

На рубеже 19-20 веков изучение природы фракталов носило эпизодический характер. Это объясняется тем, что математики предпочитали изучать объекты, поддающиеся исследованию, на основе общих теорий и методов. В 1872 году немецким математиком К. Вейерштрассом был построен пример непрерывной функции, нигде не дифференцируемой. Однако это построение оказалась целиком абстрактным и трудным для восприятия. Дальше пошел швед Хельге фон Кох, который в 1904 году построил непрерывную кривую, не имеющую нигде касательной. Ее довольно легко нарисовать, и,