Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 519.2

ЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ УСЛОВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

А.В. Китаева

Томский политехнический университет
E-mail: kit1157@yandex.ru

Предложены оценки подстановки функций функционалов от условных распределений (условных функционалов) и их производных. В качестве элементов подстановки взяты локальные линейные оценки, построенные по независимым наблюдениям. Рассмотрены их асимптотические свойства: найдены условные смещения и дисперсии. Определен также порядок скорости сходимости в среднеквадратическом четвертых условных моментов отклонений оценок.

Ключевые слова:
Функционалы от условного распределения, линейная локальная аппроксимация, условные асимптотические моменты.

1. Введение. Постановка задачи

В условиях недостаточности априорной информации об объекте, что, как правило, и имеет место на практике при моделировании сложных систем, можно воспользоваться непараметрическими методами. В этом случае для всестороннего исследования объекта проводится идентификация в широком смысле [1, 2], т. е., например, определяется степень связи между входными и выходными переменными, что можно сделать с помощью функций чувствительности в регрессионной модели, находится остаточная дисперсия и т. д.

Данная работа посвящена развитию идеи единого подхода к идентификации в широком смысле стохастических систем в условиях априорной неопределенности [3]. В качестве модели берется функция регрессии, минимизирующая среднеквадратическое отклонение истинных выходов объекта и модели. Регрессионный анализ является одним из самых распространенных методов изучения зависимостей, к примеру, практически вся эконометрика основана на исследовании регрессии [4].

В [5] отмечена важная роль условных функционалов в практических приложениях, более того, все примеры, приведенные в статье (функция регрессии, функция чувствительности, условная дисперсия, куртическая и скедастическая кривые), либо прямо являются условными функционалами и их производными, либо представляют собой функции от них. Поэтому с содержательной точки зрения вместо оценок базовых функционалов $a_i(x)=\int g_i(y)f(y,x)dy$, $i=\overline{1,s+1}$, $g_{s+1}\equiv 1$ и их производных, введенных в [5], представляется целесообразным сразу же рассматривать оценки условных функционалов

$$b_i(x) = a_i(x)/p(x) = a_i(x)/a_{s+1}(x) = \\ = \int g_i(y) f(y \mid x)dy, \quad i = \overline{1,s} \qquad (1)$$

и их производных, которые в [5] рассматривались как характеризационные.

Здесь применяются без дополнительных пояснений обозначения, введенные в [5].

Таким образом, взяв за основу условные функционалы, в дальнейшем будем рассматривать функции

$$J(x) = Q(\{b_i(x)\}, \quad \{b_i^{(1)}(x)\}, \quad i = \overline{1,s}), \qquad (2)$$

где $b_i^{(1)}(x) = \dfrac{db_i(x)}{dx}$.

Заметим, что отказ от рассмотрения оценок функции регрессии и функций чувствительности, как оценок подстановки в рамках идеологии работ [3,5], позволяет получить более естественные оценки, обладающие лучшими асимптотическими свойствами в среднеквадратическом смысле.

Приведем еще два важных примера применения выражений вида (1) и (2): при $g_i(y)=I(Y<y)$, где $I(\cdot)$ – функция-индикатор, соответствующий условный функционал представляет собой условную функцию распределения; отношение $\dfrac{\int y^{-1}f(y\,|\,x)dy}{\int y^{-2}f(y\,|\,x)dy}$ минимизирует среднеквадратическое относительное отклонение [6].

Будем рассматривать одномерный случай (m=1).

Классические ядерные оценки типа Надарая-Ватсона функционалов (1) (оценки подстановки базовых функционалов, рекуррентный аналог которых использован в [5], формула (7) при $h_{lk}\equiv h_n$) имеют вид

$$b_{jn}(x)=\frac{\sum_{l=1}^{n} g_j(Y_l)K\left(\frac{x-X_l}{h_n}\right)}{\sum_{l=1}^{n} K\left(\frac{x-X_l}{h_n}\right)}=\frac{a_{jn}(x)}{p_n(x)},\quad j=\overline{1,s},\quad (3)$$

для оценивания $b_j^{(1)}(x)$ в [5] предлагается брать оценку подстановки производной $b_j(x)$.

Оценки $b_{jn}(x)$ можно рассматривать как частный случай оценок α_{jn} (при $\widehat{\alpha}_j^{(1)}=\ldots=\widehat{\alpha}_j^{(p)}=0$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} g_j(Y_i)-\widehat{\alpha}_j- \\ -\sum_{k=1}^{p}\widehat{\alpha}_j^{(k)}(X_i-x)^k\end{pmatrix}^2 K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\Rightarrow \min_{(\widehat{\alpha}_j,\widehat{\alpha}_j^{(k)})}.\quad (4)$$

Заметим, чтобы оценить $b_j^{(1)}(x)$, $j=\overline{1,s}$ следует взять коэффициент при (X_i-x), полученный по критерию (4), – $\alpha_{jn}^{(1)}$, и, вообще, чтобы оценить производную k-го порядка $(k\le p)\,b_j^{(k)}(x)$ следует взять $\alpha_{jn}^{(k)}k!$. Таким образом, мы получаем единый естественный подход к оцениванию условных функционалов и их производных любого порядка.

Оценки функции регрессии ($g_j(x)\equiv x$) вида (4) впервые были рассмотрены в [7], (до этого они использовались в анализе временных рядов) и изучались в [8–10]. Обсуждение достоинств этих оценок можно найти также, например, в [11, 12].

2. Асимптотические свойства оценок условных функционалов и их производных

Введем обозначения

$$G_j=\begin{pmatrix} g_j(y_1)\\ \vdots \\ g_j(y_n)\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1 & X_1-x & \cdots & (X_1-x)^p\\ 1 & X_2-x & \cdots & (X_2-x)^p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_n-x & \cdots & (X_n-x)^p\end{pmatrix},\ \alpha_{jn}=\begin{pmatrix}\alpha_{jn}\\ \alpha_{jn}^{(1)}\\ \vdots\\ \alpha_{jn}^{(p)}\end{pmatrix},$$

$e_{(k)}$ – вектор размерности $(p+1)\times 1$, состоящий из нулей, кроме k+1-ой компоненты, равной 1, $h_nK=diag\left(K\left(\frac{x-X_1}{h_n}\right),\ldots,K\left(\frac{x-X_n}{h_n}\right)\right)$, $D=A^TKA$.

Заметим, что если ядро $K(\cdot)$ задано на компакте, что и будем предполагать, то матрица D не вырождена с вероятностью, стремящейся к единице при $nh_n\to\infty$. Теоретически проблема может быть решена и для ядра, заданного на R, например, гауссовского, однако с практической точки зрения выбор финитного ядра оправдан [13].

Из (4) следует

$$\alpha_{jn}=e_{(0)}{}^TD^{-1}A^TKG_j,$$
$$\alpha_{jn}^{(k)}=e_{(k)}^TD^{-1}A^TKG_j,\quad k=\overline{1,p}.\quad (5)$$

Рассмотрим случай p=1 (линейная локальная аппроксимация). Тогда из (5) следует

$$\alpha_{jn}=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)g_j(y_i)\frac{s^{(2)}-s^{(1)}(X_i-x)}{s^{(2)}s^{(0)}-(s^{(1)})^2},\quad (6)$$

где $s^{(j)}=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)(X_i-x)^j$.

Воспользуемся методологией, предложенной в [9], и найдем условные смещение и дисперсию оценок α_{jn} (при условии $X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n$), т. к. при усреднении по переменной X возникают проблемы, связанные с возможностью обращения в нуль знаменателя в (6), которые можно решать различными способами, в частности, при помощи кусочно-гладкой аппроксимации [14] или, просто добавляя к знаменателю слагаемое n^{-2} [15].

Введем определение. Пусть (ξ_n) и (η_n) – последовательности случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω,F,P).

Определение. Будем говорить, что последовательность (ξ_n) бесконечно мала по сравнению с последовательностью (η_n) по вероятности (обозначение: $\xi_n=o_p(\eta_n)$), если для $\forall\,\varepsilon>0\quad P\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}\right|>\varepsilon\right)\to 0$ при $n\to\infty$; последовательность (ξ_n) ограничена по сравнению с последовательностью (η_n) по вероятности ($\xi_n=O_p(\eta_n)$), если $\forall\varepsilon>0\,\exists\gamma,N:P\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}\right|>\gamma\right)<\varepsilon$ для $\forall n>N$.

В леммах 1–5 будем считать, что весовая функция $K(\cdot)$ – ограниченное ядро-плотность, заданное на компакте, причем все его начальные моменты нечетного порядка (нам будет достаточно моментов первого и третьего порядков) обращаются в нуль. Заметим, что для выполнения последнего условия достаточно взять симметричное ядро, что является вполне естественным для задач ядерного оценивания. Существование всех моментов ядра (как и интегралов $\int_{-\infty}^{\infty}K^2(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty}x^2K^2(x)dx$, рассматриваемых далее) следует из ограниченности ядра, заданного на компактном носителе.

Лемма 1. Пусть функция $b_j(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, функция плотности распределения $p(x)$ непрерывно дифференцируема в точке x, $p(x)\neq 0$, последовательность $(h_n)\to 0$. Тогда при $n\to\infty$

$$bias_j = E(\alpha_{jn}(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) - b_j(x) = = \frac{1}{2}b_j''(x)h_n^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx + o_p(h_n^2). \quad (7)$$

Доказательство. Из (6) следует

$$E(\alpha_n(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) = = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)(x_i - x)b_j(x_i)\frac{s^{(2)} - s^{(1)}}{s^{(2)}s^{(0)} - (s^{(1)})^2}.$$

Разложим функцию $b_j(\cdot)$ в ряд:

$$b_j(x_i) = b_j(x) + (x_i - x)b_j'(x) + \frac{1}{2}(x_i - x)^2 b_j''(x) + ...$$

Тогда

$$bias_j = = e_{(0)}{}^T D^{-1}A^T K\left[A\begin{pmatrix} b_j(x)\\ b_j'(x)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(x_1-x)^2\\ \vdots\\ (x_n-x)^2\end{pmatrix}b_j''(x) + ...\right] - $$

$$-b_j(x) = \frac{1}{2}b_j''(x)e_{(0)}{}^T D^{-1}A^T K\begin{pmatrix}(x_1-x)^2\\ \vdots\\ (x_n-x)^2\end{pmatrix} + ... \quad (8)$$

При $p=1$

$$\frac{1}{n}D = \begin{pmatrix} s^{(0)} & s^{(1)}\\ s^{(1)} & s^{(2)}\end{pmatrix},\ \frac{1}{n}A^T K\begin{pmatrix}(x_1-x)^2\\ \vdots\\ (x_n-x)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{(2)}\\ s^{(3)}\end{pmatrix}.$$

Для j=0,1,2,3

$$s^{(j)} = \begin{cases} h_n^j\int_{-\infty}^{\infty} x^jK(x)dxp(x) + o_p(h_n^j) \ \text{при}\ j = 0,2;\\ h_n^{j+1}\int_{-\infty}^{\infty} x^{j+1}K(x)dxp'(x) + o_p(h_n^{j+1}) \ \text{при}\ j = 1,3. \end{cases} \quad (9)$$

Отсюда, при $p(x)\neq 0$, следует

$$nD^{-1} = = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p(x)} + o_p(1) & -\dfrac{p'(x)}{p^2(x)} + o_p(1)\\ -\dfrac{p'(x)}{p^2(x)} + o_p(1) & \dfrac{1}{h_n^2 p(x)\int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx} + o_p(h_n^{-2})\end{pmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя полученные результаты в (8), получаем то, что и требовалось доказать.

Обратим внимание на то, что смещение оценки $\alpha_{jn}(x)$ в отличие от $b_{jn}(x)$ [14] не зависит от $b_j'(x)$, в частности, если функция $b_j(\cdot)$ линейна ($b_j''(x)$=0), то скорость сходимости смещения увеличивается.

Обозначим

$$\varphi_{jk}(x) = E(g_j(Y)g_k(Y)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) - -b_j(x)b_k(x),$$

$$\Phi_{jk} = diag(\varphi_{jk}(x_1),...,\varphi_{jk}(x_n)).$$

Найдем условные ковариации

$$\operatorname{cov}(\alpha_{jn}(x),\alpha_{kn}(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n),\ k, j = \overline{1,s}.$$

Лемма 2. Пусть функция $\varphi_{jk}(x)$ непрерывна в точке x, $p(x)$ непрерывно дифференцируема в точке x, $p(x)\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n + 1/(nh_n)) = 0$. Тогда при $n\to\infty$

$$\operatorname{cov}(\alpha_{jn}(x),\alpha_{kn}(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) = = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)dx\varphi_{jk}(x)}{nh_n p(x)} + o_p\left(\frac{1}{nh_n}\right). \quad (11)$$

Доказательство. Из (5) следует

$$\operatorname{cov}(\alpha_{jn}(x),\alpha_{kn}(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) = = e_{(0)}{}^T D^{-1}A^T K\Phi_{jk}KAD^{-1}e_{(0)}. \quad (12)$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{n}A^T K\Phi_{jk}KA = = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K^2\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)\begin{pmatrix} 1 & x_i - x\\ x_i - x & (x_i - x)^2\end{pmatrix}\varphi_{jk}(x_i) = = p(x)\varphi_{jk}(x)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} h_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)dx + o_p(h_n^{-1}) & \int_{-\infty}^{\infty} xK^2(x)dx + O_p(h_n)\\ \int_{-\infty}^{\infty} xK^2(x)dx + O_p(h_n) & h_n\int_{-\infty}^{\infty} x^2K^2(x)dx + O_p(n^{-1})\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Подставив (10) и (13) в (12), получаем при $(h_n+1/(nh_n))\to 0$ то, что и требовалось доказать.

Рассмотрим свойства оценки $\alpha_{jn}^{(1)}(x)$ производной $b_j'(x)$ в линейной локальной аппроксимации.

Лемма 3. Пусть функция $b_j(x)$ имеет непрерывную третью производную, функция плотности распределения $p(x)$ непрерывно дифференцируема в точке x, последовательность $(h_n)\to 0$. Тогда

$$bias_j^{(1)} = E(\alpha_{jn}^{(1)}(x)\big| X_1 = x_1,...,X_n = x_n) - b_j'(x) = = \left[\frac{b_j'''(x)}{6}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^4K(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx} + + \frac{b_j''p'(x)}{2p(x)}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^4K(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx} - \int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx\right]\right]h_n^2 + +o_p(h_n^2). \quad (14)$$

Доказательство. Из (5) следует (p=1, k=1)

$$E(\alpha_{jn}^{(1)}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=e_{(1)}^T D^{-1}A^T KB_j, \quad (15)$$

где $B_j=\begin{pmatrix} b_j(x_1)\\ \vdots \\ b_j(x_n)\end{pmatrix}$. Разложим $b_j(x_i)$ в ряд

$$b_j(x_i)=b_j(x)+(x_i-x)b_j'(x)+\frac{1}{2}(x_i-x)^2 b_j''(x)+$$

$$+\frac{1}{6}(x_i-x)^3 b_j'''(x)+... \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), учитывая (10), получим

$$bias_j^{(1)}=$$

$$=e_{(1)}{}^T D^{-1}A^T K\begin{bmatrix} A\begin{pmatrix} b_j(x)\\ b_j'(x)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(x_1-x)^2\\ \vdots\\ (x_n-x)^2\end{pmatrix}b_j''(x)+\\ +\frac{1}{6}\begin{pmatrix}(x_1-x)^3\\ \vdots\\ (x_n-x)^3\end{pmatrix}b_j'''(x)+...\end{bmatrix}-$$

$$-b_j'(x)=$$

$$=e_{(1)}{}^T D^{-1}A^T K\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(x_1-x)^2\\ \vdots\\ (x_n-x)^2\end{pmatrix}b_j''(x)+\\ +\frac{1}{6}\begin{pmatrix}(x_1-x)^3\\ \vdots\\ (x_n-x)^3\end{pmatrix}b_j'''(x)+....\end{bmatrix}=e_{(1)}{}^T\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{1}{p(x)}+o_p(1) & -\frac{p'(x)}{p(x)^2}+o_p(1)\\ -\frac{p'(x)}{p(x)^2}+o_p(1) & \frac{1}{h_n^2 p(x)\int_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)dx}+o_p(h_n^{-2})\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{s^{(2)}}{2}b_j''(x)+\frac{s^{(3)}}{6}b_j'''(x)+...\\ \frac{s^{(3)}}{2}b_j''(x)+\frac{s^{(4)}}{6}b_j'''(x)+...\end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание (9), получаем при $(h_n)\to 0$ то, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть функция $\varphi_{jk}(x)$ непрерывна в точке x, $p(x)$ непрерывно дифференцируема в точке x, $p(x)\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n+1/(nh_n^3))=0$. Тогда

$$\mathrm{cov}(\alpha_{jn}^{(1)}(x),\alpha_{kn}^{(1)}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=$$

$$=\frac{1}{nh_n^3\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)dx\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2K^2(x)dx\frac{\varphi_{jk}(x)}{p(x)}+o_p\left(\frac{1}{nh_n^3}\right). \quad (17)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Найдем

$$\mathrm{cov}(\alpha_{jn}^{(1)}(x),\alpha_{kn}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)$$

(будем считать выполненными условия леммы 2 и дополнительно $\lim\limits_{n\to\infty}1/(nh_n^2)=0$):

$$n\,\mathrm{cov}(\alpha_{jn}^{(1)}(x),\alpha_{kn}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=$$

$$=ne_{(1)}{}^T D^{-1}A^T K\Phi_{jk}KAD^{-1}e_{(0)}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{p'(x)}{p(x)^2}+o_p(1) & \frac{1}{h_n^2 p(x)\int_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)dx}+o_p(h_n^{-2})\end{pmatrix}\times$$

$$\times p(x)\varphi_{jk}(x)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} h_n^{-1}\int_{-\infty}^{-\infty}K^2(x)dx+o_p(h_n^{-1}) & \int_{-\infty}^{\infty}xK^2(x)dx+O_p(h_n)\\ \int_{-\infty}^{\infty}xK^2(x)dx+O_p(h_n) & h_n\int_{-\infty}^{\infty}x^2K^2(x)dx+O_p(n^{-1})\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{1}{p(x)}+o_p(1)\\ -\frac{p'(x)}{p^2(x)}+o_p(1)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\varphi_{jk}(x)}{h_n^2 p(x)}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}xK^2(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)dx}\right]+o_p(h_n^{-2}).$$

Заметим, что если $K(\cdot)$ – симметричная функция, то

$$\mathrm{cov}(\alpha_{jn}^{(1)}(x),\alpha_{kn}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=o_p(n^{-1}h_n^{-2}).$$

Рассмотрим поведение условных четвертых моментов статистик $\alpha_{jn}(x)=\alpha_{jn}^{(0)}(x)$ и $\alpha_{jn}^{(1)}(x)$, что надо для исследования свойств оценок подстановки функций (2). Обозначим

$$S_{jn}^{(t)}=\alpha_{jn}^{(t)}(x)-E(\alpha_{jn}^{(t)}(x)\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n),Q^{(t)}=$$

$$=KAD^{-1}e_{(t)}e_{(t)}{}^T D^{-1}A^T K=(q_{ij},i,j=\overline{1,n}),$$

$$t=0,1,\ (G_j-B_j)(G_j-B_j)^T=C=$$

$$=(c_{ik}=(g_j(y_i)-b_j(y_i))(g_j(y_k)-b_j(y_k)),\,i,k=\overline{1,n}).$$

Лемма 5. Пусть

$$E((g_j(Y)-b_j(x))^4\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)<\infty,$$

$p(x)$ непрерывно дифференцируема в точке x, $p(x)\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n+1/(nh_n^{t+1}))=0$. Тогда при $n\to\infty$

$$E(S_{jn}^{(t)^4}\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=O_p(n^{-2}h_n^{-2(t+1)}).$$

Доказательство. Из (5) следует

$$E(S_{jn}^{(t)^4}\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=$$

$$=E(e_{(t)}{}^T D^{-1}A^T KCQ^{(t)}CKAD^{-1}e_{(t)}\big|X_1=x_1,...,X_n=x_n).$$

Пусть t=0. Учитывая (10), получаем

$$n^2Q^{(0)}=\frac{1}{h_n^2}\begin{pmatrix} K\left(\frac{x_1-x}{h_n}\right) & (x_1-x)K\left(\frac{x_1-x}{h_n}\right)\\ \vdots & \vdots \\ K\left(\frac{x_n-x}{h_n}\right) & (x_n-x)K\left(\frac{x_n-x}{h_n}\right)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{1}{p^2(x)}+o_p(1) & \frac{p'(x)}{p^3(x)}+o_p(1)\\ \frac{p'(x)}{p^3(x)}+o_p(1) & \frac{(p'(x))^2}{p^4(x)}+o_p(1)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} K\left(\frac{x_1-x}{h_n}\right) & \cdots & K\left(\frac{x_n-x}{h_n}\right)\\ (x_1-x)K\left(\frac{x_1-x}{h_n}\right) & \cdots & (x_n-x)K\left(\frac{x_n-x}{h_n}\right)\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$A^TKE(CQ^{(0)}C\,|X_1=x_1,...,X_n=x_n)KA=$$

$$=\frac{1}{n^2h_n^4}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum\limits_{p,\gamma,k,m=1}^{n}a_{p\gamma km} & \sum\limits_{p,\gamma,k,m=1}^{n}(x_\gamma-x)a_{p\gamma km}\\ \sum\limits_{p,\gamma,k,m=1}^{n}(x_p-x)a_{p\gamma km} & \sum\limits_{p,\gamma,k,m=1}^{n}(x_\gamma-x)(x_p-x)a_{p\gamma km}\end{pmatrix},$$

$$a_{p\gamma km}=K\left(\frac{x_p-x}{h_n}\right)K\left(\frac{x_\gamma-x}{h_n}\right)\times$$

$$\times E(c_{pm}q_{km}c_{k\gamma}\,|X_1=x_1,...,X_n=x_n). \qquad (18)$$

Если среди индексов i, γ, k, m есть хотя бы один отличный от остальных, то $E(c_{im}q_{km}c_{k\gamma}|X_1=x_1,...,X_n=x_n)=0$ в силу независимости выборочных значений, и главные члены в матрице (18) дают попарные совпадения индексов, при этом все суммы превращаются в двойные. Выделяя главные части, аналогично (9), получим при $n\to\infty$

$$h_n^2A^TKE(CQ^{(0)}C\,|X_1=x_1,...,X_n=x_n)KA=$$

$$=\begin{pmatrix} c+o_p(1) & O_p(h_n)\\ O_p(h_n) & O_p(h_n^2)\end{pmatrix},$$

где $c\neq0$. Учитывая (10), получаем

$$E(S_{jn}^{(0)}\,|X_1=x_1,...,X_n=x_n)^4=O_p(n^{-2}h_n^{-2}).$$

Случай t=1 рассматривается аналогично. Доказательство леммы 5 закончено.

Порядок сходимости условных четвертых моментов отклонений, равный

$$O(n^{-2}h_n^{-2(1+t)}+h_n^4),$$

показывается аналогично доказательству леммы 7 [16].

Интересно отметить, что степень полинома p оказывает такое же влияние на скорость сходимости смещения оценки α_{jn} функции регрессии ($g_j(y)=y$), как и параметр ν в [5], показывающий минимальный порядок момента ядра, отличного от нуля: $bias_j=O_p(h_n^{p+1})$ для нечетных p и $bias_j=O_p(h_n^{p+2})$ для четных p [11]. Этот результат может быть распространен и на условные функционалы общего вида (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райбман Н.С. Что такое идентификация. – М.: Наука, 1970. – 119 с.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
3. Китаева А.В., Кошкин Г.М., Пивен И.Г. Непараметрическая идентификация в экономических системах // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15. – Вып. 4. – С. 588–612.
4. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
5. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Полурекуррентные ядерные оценки базовых функционалов по независимым наблюдениям // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 8–12.
6. Jones M.C., Heungsun Park, Key-Il Shin, Vines S.K., Seok-Oh Jeong. Relative error prediction via kernel regression smoothers // J. Statist. Planning and Inference. – 2008. – V. 138. – № 10. – P. 2887–2898.
7. Stone C.J. Consistent nonparametric regression // Ann. Statist. – 1977. – V. 5. – № 4. – P. 595–645.
8. Cleveland W.S. Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots // J. Amer. Statist. Assoc. – 1979. – V. 74. – № 368. – P. 829–836.
9. Fan J. Design-adaptive nonparametric regression // J. Amer. Statist. Assoc. – 1992. – V. 87. – № 420. – P. 998–1004.
10. Ruppert D., Wand M. P. Multivariate Locally Weighted Least Squares Regression // Ann. Statist. – 1994. – V. 22. – № 3. – P. 1346–1370.
11. Fan J., Gasser T., Gijbels I., Brockmann M. Engel J. Local polynomial regression: optimal kernels and asymptotic minimax efficiency // Ann. Inst. Statist. Math. – 1997. – V. 49. – № 1. – P. 79–99.
12. Fan J., Gijbels I. Local Polynomial Modeling and Its Applications. – London: Chapmen and Hall, 1996. – 341 p.
13. Seifert B., Gasser T. Finite sample variance of local polynomials: analysis and solutions // J. Amer. Statist. Assoc. – 1996. – V. 91. – № 433. – P. 267–275.
14. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 336 с.
15. Fan J. Local linear regression smoothers and their minimax efficiency // Ann. Statist. – 1993. – V. 21. – № 1. – P. 196–216.
16. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Ядерные оценки базовых функционалов по зависимым наблюдениям // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 26–31.

Поступила 24.03.2009 г.