

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



Институт кибернетики
Направление подготовки Прикладная математика и информатика
Кафедра Прикладной математики

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема работы
Разработка и исследование унифицированного подхода к решению задач геодезии и маркшейдерии

УДК _____

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8БМ41	Сергеева Юлия Сергеевна		

Руководитель

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Рыбалка Сергей Анатольевич	К.Т.Н.		

КОНСУЛЬТАНТЫ:

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент	Конотопский Владимир Юрьевич	К.Э.Н.		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент	Анищенко Юлия Владимировна	К.Т.Н.		

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Зав. кафедрой	Гергет Ольга Михайловна	К.Т.Н.		

Томск – 2016 г.

Планируемые результаты обучения по ООП

Код результата	Результат обучения (выпускник должен быть готов)
P1.1	Применять базовые и специальные естественно-научные и математические знания в области информатики, достаточные для комплексной инженерной деятельности
P1.2	Применять базовые и специальные естественно-научные и математические знания в области экономики, достаточные для комплексной инженерной деятельности
P1.3	Применять базовые и специальные естественно-научные и математические знания в области маркетинга и менеджмента, достаточные для комплексной инженерной деятельности
P2.1	Применять базовые и специальные знания в области современных информационных технологий для решения инженерных задач
P2.2	Применять базовые и специальные знания в области современных информационных технологий для решения прикладных задач
P3.1	Ставить и решать задачи комплексного анализа, связанные с созданием новых информационных технологий и информационных систем в области медицины и социальных исследований, с использованием базовых и специальных знаний, современных аналитических методов и моделей
P3.2	Ставить и решать задачи комплексного анализа, связанные с созданием новых информационных технологий и информационных систем при обработке геофизической информации, с использованием базовых и специальных знаний, современных аналитических методов и моделей

Р3.3	Ставить и решать задачи комплексного анализа, связанные с созданием новых информационных технологий и информационных систем в области моделирования физических процессов, с использованием базовых и специальных знаний, современных аналитических методов и моделей
Р4.1	Разрабатывать новые и модернизировать уже существующие информационные технологии и системы (в медицине и социальной сфере) в соответствии с техническим заданием
Р4.2	Разрабатывать новые и модернизировать уже существующие информационные технологии и системы (в геофизике) в соответствии с техническим заданием
Р4.3	Разрабатывать новые и модернизировать уже существующие информационные технологии и системы (в физических процессах) в соответствии с техническим заданием
Р5.1	Проводить теоретические и экспериментальные исследования, включающие поиск и изучение необходимой научно-технической информации, математическое моделирование, проведение эксперимента, анализ и интерпретация полученных данных, в области прикладной математики. Проводить исследования, связанные с оценкой информационной безопасности проектов
Р6.1	Внедрять, эксплуатировать и обслуживать современные информационные технологии и системы, обеспечивать их высокую эффективность, соблюдать правила охраны здоровья, безопасность труда, выполнить требования по защите окружающей среды
Р7.1	Использовать базовые и специальные знания в области прикладной математики для ведения комплексной инженерной деятельности

P8.1	Владеть иностранным языком на уровне, позволяющем работать в иноязычной среде, разрабатывать документацию, презентовать и защищать результаты комплексной инженерной деятельности
P9.1	Эффективно работать индивидуально в качестве члена группы, состоящей из специалистов различных направлений и квалификаций, демонстрировать ответственность за результаты работы и готовность следовать корпоративной культуре организации
P10.1	Демонстрировать знания правовых, социальных, экономических и культурных аспектов комплексной инженерной деятельности
P11.1	Демонстрировать способность к самостоятельному обучению в течение всей жизни и непрерывному самосовершенствованию в инженерной профессии

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



Институт кибернетики
Направление подготовки Прикладная математика и информатика
Кафедра Прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой

(Подпись)

(Дата)

(Ф.И.О.)

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

В форме:

магистерской диссертации

Студенту:

Группа	ФИО
8БМ41	Сергеевой Юлии Сергеевне

Тема работы:

Разработка и исследование унифицированного подхода к решению задач геодезии и маркшейдерии

Утверждена приказом директора Института кибернетики (дата, номер)

Срок сдачи студентом выполненной работы: (дата)

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:

Исходные данные к работе

Угловые и линейные геодезические измерения на местности; системы линейных алгебраических уравнений.

<p>Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов</p>	<ul style="list-style-type: none"> • обзор по литературным источникам свойств объекта исследования; • постановка задачи исследования и разработки; • математическая структурная модель; • разработка алгоритма решения задачи; • выбор программного обеспечения; • заключение по работе.
<p>Перечень графического материала <i>(с точным указанием обязательных чертежей)</i></p>	
<p>Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы <i>(с указанием разделов)</i></p>	
<p style="text-align: center;">Раздел</p>	<p style="text-align: center;">Консультант</p>
<p>Финансовый менеджмент</p>	<p>Конотопский Владимир Юрьевич</p>
<p>Ресурсоэффективность и ресурсосбережение</p>	<p>Конотопский Владимир Юрьевич</p>
<p>Социальная ответственность</p>	<p>Анищенко Юлия Владимировна</p>
<p>Английский язык</p>	<p>Сидоренко Татьяна Валерьевна</p>
<p>Названия разделов, которые должны быть написаны на русском и иностранном языках:</p>	
<p>Объект и методы исследования</p>	

<p>Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику</p>	
--	--

Задание выдал руководитель:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент	Рыбалка Сергей Анатольевич	к.т.н		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8БМ41	Сергеева Юлия Сергеевна		

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа 121 с., 17 рис., 17 табл., 33 источника, 5 прил.

Ключевые слова: геодезия, маркшейдерия, метод, погрешность, угол, точка, расстояние, координата, обусловленность.

Объектом исследования являются новые подходы к решению классических задач геодезии и их свойства.

Цель работы – разработать единый подход к решению задач по определению координат неизвестных точек по результатам геодезических измерений. Изучить свойства и особенности нового метода решения таких задач. Реализовать полученную методику в виде программного продукта в макетном варианте.

В процессе исследования проводилось изучение методов и инструментов проведения геодезических измерений, стандартных методологий обработки геодезических данных, разработка и реализация новых алгоритмов обработки, разработка и тестирование программного приложения.

В результате исследования разработан новый единый подход к решению геодезических задач. Реализованы и апробированы предложенные методы в математическом пакете, а также написана программа в среде визуального программирования на языке высокого уровня.

Основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики: высокий современный научный уровень, высокая степень новизны и оригинальности, снижение ручного труда.

Степень внедрения: работа выполнена на актуальную тему. Планируется внедрение в организации, выполняющие геодезические и маркшейдерские работы.

Область применения: обработка геодезических данных в промышленных масштабах.

Экономическая эффективность/значимость работы заключается в повышении скорости выполнения работ, повышение точности результата, снижение ручного труда.

В будущем планируется разработка современного программного продукта пригодного для внедрения в промышленную эксплуатацию.

Определения

В данной работе применены следующие термины с соответствующими определениями:

Геодезия – отрасль производства, связанная с определением пространственных характеристик местности и искусственных объектов.

Маркшейдерия – раздел горных наук, изучающий на основе измерений, вычислений, геометрических и графических построений размер, форму и другие параметры залежей полезных ископаемых и пространственное положение горных выработок.

Измерение – процесс сравнения некоторой физической величины с другой одноименной величиной, принятой за единицу меры.

Погрешность измерения – отклонение измеренного значения величины от её истинного (действительного) значения.

Дирекционные измерения – вид геодезических измерений, в которых измеряемой геодезической величиной являются горизонтальные и (или) вертикальные углы.

Дистанционные измерения – измерения физических величин на расстоянии.

СЛАУ – система уравнений, каждое уравнение в котором является линейным – алгебраическим уравнением первой степени.

Вычислительная погрешность – результирующая погрешность (погрешность округления).

Сокращения

СЛАУ – система линейных уравнений;

МНК – метод наименьших квадратов;

БД – база данных;

ГГЗ – главная геодезическая задача;

ЭВМ – электронная вычислительная машина;

ВТ – вычислительная техника;

ВМ – вычислительная машина.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	13
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	17
2 ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ	19
2.1 КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	19
2.2 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ.....	21
2.3 СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ.....	22
2.4 ЧИСЛО ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ КАК ПОКАЗАТЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ.....	22
2.5 РАЗРЕЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ.....	24
3 РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ЕДИНОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	39
3.1 РАСЧЕТ КООРДИНАТ НЕИЗВЕСТНОЙ ТОЧКИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДИРЕКЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	39
3.2 РАСЧЕТ КООРДИНАТ НЕИЗВЕСТНОЙ ТОЧКИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДИСТАНЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	44
3.3 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ	46
3.4 ВЫБОР ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ	50
4 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ	53
5 ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ	58
5.1 ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТ	58
5.1.1 <i>Продолжительность этапов работ</i>	59
5.1.2 <i>Расчет накопления готовности проекта</i>	64
5.2 РАСЧЕТ СМЕТЫ ЗАТРАТ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОЕКТА.....	65
5.2.1 <i>Расчет затрат на материалы</i>	65
5.2.2 <i>Расчет заработной платы</i>	66
5.2.3 <i>Расчет затрат на социальный налог</i>	67
5.2.4 <i>Расчет затрат на электроэнергию</i>	67
5.2.5 <i>Расчет амортизационных расходов</i>	68
5.2.6 <i>Расчет расходов, учитываемых непосредственно на основе платежных (расчетных) документов (кроме суточных)</i>	69
5.2.7 <i>Расчет прочих расходов</i>	69
5.2.8 <i>Расчет общей себестоимости разработки</i>	69
5.2.9 <i>Расчет прибыли</i>	70
5.2.10 <i>Расчет НДС</i>	70
5.2.11 <i>Цена разработки НИР</i>	70
5.3 ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА	70
5.4 ОЦЕНКА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО УРОВНЯ НИР	70
6 СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ	74
6.1 ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ	74
6.1.1 <i>Анализ вредных и опасных факторов, которые могут возникнуть на рабочем месте при проведении исследований</i>	75
6.1.2 <i>Анализ опасных факторов при проведении исследований</i>	78
6.2 ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ	78
6.3 БЕЗОПАСНОСТЬ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ.....	78
6.4 ПРАВОВЫЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ	81

6.4.1 Эргономические требования к рабочему месту.....	81
6.4.2 Режим труда.....	83
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	84
СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ	86
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	87
ПРИЛОЖЕНИЕ А	90
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	105
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	107
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	113
ПРИЛОЖЕНИЕ Д.....	119

Введение

Важный вклад геодезии в технологические процессы заключается в обеспечении координатными основами и системами отсчета различные сферы человеческой деятельности. Методы, используемые в геодезии, опираются на широкий спектр достижений математики и физики, обеспечивающих изучение геометрических, кинематических и динамических свойств Земли в целом и отдельных ее участков [1]. Одним из разделов геодезии является маркшейдерия, в круг задач которой входит определение пространственно-геометрического положения объектов и осуществление необходимых геодезических и маркшейдерских измерений, обработка и интерпретирование их результатов на различных этапах строительства и эксплуатации открытых и подземных объектов.

Важнейшими задачами для горной технологии являются: рациональное использование богатств недр, уменьшение потерь полезных ископаемых, комплексное использование полезных ископаемых при добыче и переработке, а также последующее использование проведенных при разработке месторождений горных выработок.

В связи с этим основными задачами маркшейдерской службы являются:

- маркшейдерско-геодезическое обеспечение работ при разведке, проектировании, строительстве, реконструкции горных предприятий и контроль за правильным проведением горных выработок, разработкой месторождений полезных ископаемых открытым, подземным, подводным и скважинным методами;
- сбор, хранение и оперативная обработка многочисленной исходной информации с применением компьютерной технологии, множительной и копировальной техники, с оценкой точности получаемых результатов, с выявлением закономерностей изменения различных показателей и отражением их на горной графической документации;

- выполнение с участием геологической службы работ, связанных с геометризацией месторождений полезных ископаемых и составление прогнозов горно-геологических условий для планирования развития и эффективного ведения горных работ, нормирования технологических процессов горного производства.

Геодезическо-маркшейдерские работы являются ответственным процессом на всех этапах строительства метрополитенов, тоннельных путепроводов, карьеров по добыче полезного ископаемого и многих других крупных строительных объектов. Залогом качественного и эффективного маркшейдерского обеспечения является использование геодезических приборов, обеспечивающих необходимую точность и оперативность получения результатов измерения, а также качественное выполнение вычислений этих результатов, в том числе и уравнивательных.

Все больше внимания уделяется созданию локальных геодезических построений, автономному развитию геодезических сетей с применением спутниковых, инерциальных и других систем. В ряде случаев строятся, так называемые свободные геодезические сети, в которых имеется минимум исходных данных или их вообще нет, т.е. когда все без исключения пункты являются определяемыми. Такие построения используются, например, в качестве геодезической основы для производства инженерно-геодезических работ на строительных площадках, для выполнения кадастровых съемок, для наблюдения за деформациями и осадками зданий и уникальных сооружений, для наблюдений за современными вертикальными и горизонтальными движениями земной поверхности.

Цель данной работы: разработать единый подход к решению задач по определению координат неизвестных точек по результатам геодезических измерений. Изучить свойства и особенности нового метода решения таких задач. Реализовать полученную методику в виде программного продукта в макетном варианте.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить приемы и методы проведения геодезических работ; изучить виды измерений и типы данных, используемых в геодезии;
- разработать другие способы решения некоторых типовых задач геодезии и реализовать алгоритмы в математических пакетах;
- разработать программу на языке программирования высокого уровня (например, C++) с элементами графического интерфейса.

Измерением называется процесс сравнения некоторой физической величины с другой одноименной величиной, принятой за единицу меры. Единица меры – значение физической величины, принятой для количественной оценки величины того же рода. Результат измерений – это число, равное отношению измеряемой величины к единице меры. Различают следующие виды геодезических измерений:

1. *Линейные*, в результате, которых получают иррациональные расстояния между заданными точками. Для этой цели применяют ленты, рулетки, проволоки, оптические свето- и радиодальномеры.
2. *Угловые*, определяющие величины горизонтальных углов. Для выполнения таких измерений применяют теодолит, буссоли, эклиметры.
3. *Высотные*, в результате, которых получают разности высот отдельных точек [4]. Для этой цели применяют нивелиры, теодолиты-тахеометры, барометры.

Различают два метода геодезических измерений: непосредственные и посредственные (косвенные).

Непосредственные – измерения, при которых определяемые величины получают в результате непосредственного сравнения с единицей измерения.

Косвенные – измерения, при которых определяемые величины получаются как функции других непосредственно измеренных величин.

Процесс измерения включает:

- *Объект* – свойства которого, например, размер характеризуют результат измерения.
- *Техническое средство* – получать результат в заданных единицах.
- *Метод измерений* – обусловлен теорией практических действий и приёмов технических средств.
- *Исполнитель измерений* – регистрирующее устройство.
- *Внешняя среда*, в которой происходит процесс измерений.

Измерения также различают *равноточные* и *неравноточные*. Равноточные – это результаты измерений однородных величин, выполняемые с помощью приборов одного класса, одним и тем же методом, одним исполнителем при одних и тех же условиях. Если хотя бы один из элементов, составляющий совокупность, меняется, то результат измерений неравноточный.

1 Обзор литературы

В настоящее время достаточно большое количество специальной литературы и учебников по геодезии описывает приемы и методы проведения геодезической и маркшейдерской съемки, например [1, 2, 3]. В этих и других источниках описаны типовые задачи, возникающие на основе проведенных измерений. Также показаны методы и технологии решения этих задач [4, 7]. При обработке геодезической информации большое значение имеет решение проблемы устранения невязок. Измерения проводимые с различной степенью точности не позволяют рассчитывать точные координаты, дистанции или углы на геодезические объекты. Для этого разработаны и широко применяются уравнивательные вычисления, которые и устраняют несогласованность данных, полученных при избыточных измерениях с различной степенью точности. Большое количество методов приведено в справочном пособии Маркузе [3].

Увеличение объемов проводимых геодезических работ, усиление требований к сокращению времени их выполнения влечет за собой более жесткие требования к увеличению интенсивности проведения обработки полученных данных. Сократить время выполнения расчетов и упростить операции, выполняемые при обработке, можно только за счет автоматизации. Использование машинных методов обработки геодезических данных требует поиска и реализации новых алгоритмов более точных и лучше подходящих для компьютерных вычислений.

Вопрос решения геодезических задач был предметом специального рассмотрения на Генеральной Ассамблее Международного союза геодезии и геофизики в Торонто. Общий вывод о том, что для каждого конкретного случая следует выбирать соответствующие формулы, был, безусловно, верным при ручных способах счета. При использовании современной вычислительной техники в арсенале практических приложений должно остаться наименьшее число наиболее универсальных методов. Было бы идеальным, при любых расстояниях и с любой точностью решать задачи одним способом. Но, ввиду большого спектра приложений решения ГГЗ и значительного отличия решений

по эффективности, используются разные методы построения их моделей при больших и малых расстояниях.

Повысились требования к общности решений и временным затратам. Так как время является универсальным показателем эффективности любого труда, то эффективность решения задач обеспечивается формулами, которые при любых средствах вычислений требуют наименьших временных затрат [8].

Решение задач геодезии опирается на решение серии задач тригонометрии. Но решение отдельных задач удается свести к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Построение СЛАУ и методы их решения это отдельный большой раздел математики. СЛАУ и методы их решения составляют основную роль во многих прикладных направлениях [9,10].

Решение некоторых задач переводится в СЛАУ путем использования МНК. Метод является нужным и необходимым при обработке наблюдений. На данный момент часто используется при обработке количественных результатов естественнонаучных опытов, технических данных, астрономических и геодезических наблюдений и измерений [11, 12].

2 Объект и методы исследования

Основу геодезических и маркшейдерских работ составляют измерения проводимые от объектов с известными координатами на объекты с неизвестными координатами. Эти непосредственные измерения разделяются на линейные и угловые.

Линейные измерения позволяют определять расстояния между заданными точками.

С помощью угловых измерений определяют величины горизонтальных углов между точками и вертикальных углов, что позволяет определить возвышение одних точек над другими.

Непосредственные измерения не всегда или не в полном объеме могут быть проведены. Недостающие измерения могут быть вычислены через известные непосредственные. Такие измерения называются косвенные.

Независимо от природы измерений, непосредственные или косвенные, они обладают погрешностями.

2.1 Классификация погрешностей геодезических измерений

Любые геодезические измерения, производимые пусть даже в весьма оптимальных условиях, сопровождаются ошибками, т.е. отклонениями конечных измерений L от истинного значения X измеряемой величины:

$$\Delta = L - X. \quad (2.1)$$

Истинное значение – такое значение измеряемой величины, которое идеальным образом отражало бы количественные свойства объекта. Получить истинное значение это скорее понятие гипотетическое, недостижимое условие. Это величина, к которой можно приближаться бесконечно близко, оно не достижимо. Точность измерений – степень приближения его результата к истинному значению. Чем ниже погрешность, тем выше точность.

Абсолютная погрешность выражается разностью значения, полученного в результате измерения и истинного измерения величины

$$E = X_{изм} - X. \quad (2.2)$$

Чтобы получить значение достаточно произвести одно измерение. Его называют необходимым, но чаще одним измерением не ограничиваются, а повторяют не менее двух раз. Измерения, которые делают сверх необходимого, называют избыточными (добавочными), они являются весьма важным средством контроля результата измерения. Абсолютная погрешность не даёт представления о точности полученного результата. Поэтому вычисляют относительную погрешность:

$$C = E / X. \quad (2.3)$$

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности к истинному или измеренному значению.

Погрешности, происходящие от отдельных факторов, называются элементарными. Погрешность обобщенная – это сумма элементарных. Как правило, возникают ошибки следующих видов:

- грубые (Q),
- систематические (O),
- случайные (Δ).

Грубые погрешности измерений возникают в результате грубых промахов, просчётов исполнителя, его невнимательности, незамеченных неисправностях технических средств. Грубые погрешности совершенно недопустимы и должны быть полностью исключены из результатов измерений путем проведения повторных, дополнительных измерений.

Систематические погрешности измерений – постоянная составляющая, связанная с дефектами: зрение, неисправность технических средств, температура. Систематические погрешности могут быть как одностороннего действия, так и переменного (периодические погрешности). Их стремятся по возможности учесть или исключить из результатов измерений при организации и проведении работ.

Случайные погрешности измерений неизбежно сопутствуют всем измерениям. Погрешности случайные исключить нельзя, но можно ослабить их

влияние на искомый результат за счет проведения дополнительных измерений. Это самые коварные погрешности, сопутствующие всем измерениям и могут быть разные как по величине, так и по знаку.

Математически обобщенные ошибки можно выразить как $E = Q + O + \Delta$ [9].

2.2 Источники погрешностей

Погрешность результата решения задачи состоит из трех частей:

- неустранимой погрешности решения, обусловленной неточностью исходных данных;
- погрешности метода решения задачи;
- вычислительной погрешности, являющейся результатом округлений в процессе счета.

Неустраняемая погрешность решения обусловлена неточностью исходных данных, которые возникают в результате неточности измерений (инструментальная ошибка) или из-за невозможности представить необходимую величину конечным числом значащих цифр (ошибка округления).

Погрешности метода решения задач очень часто возникают при использовании численных методов. Действительно, многие математические задачи могут быть решены только приближенно, хотя и возможно со сколь угодно большой точностью, так как любой численный метод предполагает использование конечного числа арифметических операций. Например, при решении задачи обычно производную заменяют разностью, интеграл – суммой, или бесконечный итерационный процесс обрывают после некоторого конечного числа итераций. Так же к погрешностям метода можно отнести неточность отображения реальных процессов, так как рассматривается не сам процесс, а его идеализированная математическая модель.

При решении численных задач на компьютере всегда возникают вычислительные погрешности, обусловленные ошибками округления в процессе счета (так как вычисления на ЭВМ выполняются с конечным числом

значащих цифр, определенных конечностью разрядной сетки ЭВМ). Исключения составляют задачи, в которых операции над данными выполняются точно, например в целочисленной арифметике. Однако в подавляющем большинстве вычислительных задач используются вещественные числа, операции над которыми выполняются с ошибками округления. В зависимости от реализованного в алгоритме метода решения, эти ошибки округления могут либо расти, либо уменьшаться. При расчетах те или иные погрешности могут отсутствовать или их влияние может быть мало [13].

2.3 Свойства оценок погрешности

При проведении измерений или расчетов результаты сопровождаются погрешностями. Поэтому необходимо знать свойства и уметь оценивать сопутствующие погрешности. Существуют следующие критерии оценок погрешности: несмещенность, состоятельность, эффективность.

Величина \hat{y} называется несмещенной оценкой параметра y , если ее выборочное математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра генеральной совокупности: $E(\hat{y}) = y$.

Если оценка \hat{y} сходится к истинному значению y при $n \rightarrow \infty$, то данное свойство называется состоятельностью.

Несмещенные оценки, для которых достигается нижняя граница (т.е. имеющие минимально возможную дисперсию), называются эффективными [14].

2.4 Число обусловленности матрицы как показатель устойчивости при решении прикладных задач

Решения задач опирающиеся на решение СЛАУ зависят и от свойств матрицы коэффициентов.

Из линейной алгебры известно, что решение задачи $Ax = b$ существует и единственно, если детерминант матрицы A отличен от нуля. Если определитель матрицы $A=0$, то система называется вырожденной. Определитель может отличаться от нуля, но быть очень близким к нулю. Такая

матрица называется плохо обусловленной, если определитель A не равен нулю, но число обусловленности очень велико. Обусловленность оценивает в числовом выражении близость матрицы коэффициентов A к вырожденной. Число обусловленности $cond(A)$ является количественной оценкой обусловленности. Заметим, что всегда $cond(A) \geq 1$. Если $cond(A) \geq 10^3$, то матрица A плохо обусловлена. Если $1 \leq cond(A) \leq 100$, то принято считать, что матрица хорошо обусловлена [15].

Формула нахождения числа обусловленности для произвольной квадратной матрицы A :

$$cond(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}, \text{ где } \sigma_i - \text{ сингулярные числа матрицы } A;$$

$$\sigma_i = +\sqrt{\mu_i}, \text{ где } \mu_i - \text{ собственные числа матрицы } A^T A;$$

$A^T A$ – симметричная неотрицательно определенная матрица.

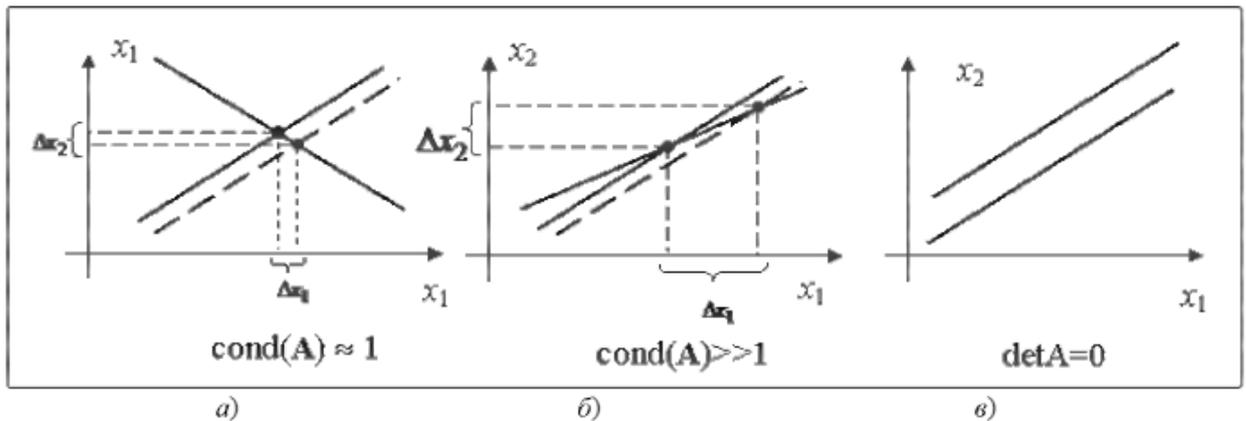


Рисунок 2.1 – Графическое изображение СЛАУ с двумя неизвестными:
 а – хорошо обусловленная; б – плохо обусловленная; в – вырожденная система уравнений

Результатом решения задачи является оценка искомого истинного значения. Погрешность оценки равна произведению погрешности исходных данных на число обусловленности.

2.5 Разреженные матрицы

При решении задач предлагаемыми в данной работе методами получаются разреженные матрицы. Такие матрицы обладают специфическими особенностями.

Матрица, имеющая небольшой процент ненулевых элементов, называется разреженной. Практически матрицу размеров $n \times n$ можно считать разреженной, если количество ее ненулевых элементов имеет порядок n . Матрица A часто связана с системой линейных уравнений $Ax = b$, где x и b являются вектор-столбцами n -го порядка.

Наиболее известным методом решения системы уравнений

$$Ax = b, \quad (2.4)$$

является метод исключения Гаусса. Он состоит из двух частей: прямого исключения, в котором с помощью ряда элементарных преобразований матрица A приводится к верхней треугольной матрице U с единичной диагональю, и так называемой обратной подстановки, которая приводит к обращению U .

Прямое гауссово исключение состоит из n шагов. Пусть $A^{(k)}$ обозначает матрицу в начале k -го шага, причем $A^{(1)} \equiv A$ и $A^{(n+1)} \equiv U$. Пусть $a_{ij}^{(k)}$ является элементом i -й строки и j -го столбца ((i,j) -м элементом) матрицы $A^{(k)}$. Другими словами, пусть $a_{ij}^{(k)} = e_i' A^{(k)} e_j$, где e_i является i -ым столбцом единичной матрицы I_n n -го порядка. Для первых $k-1$ столбцов матрица $A^{(k)}$ уже имеет форму верхней треугольной матрицы. Пример показан на рисунке 2.2.

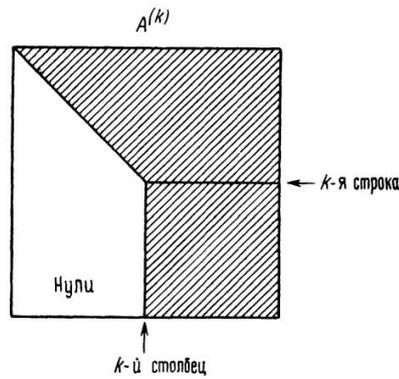


Рисунок 2.2 – Матрица в начале k -го шага.

На k -м шаге k -я строка матрицы $A^{(k)}$ делится на ее (k,k) -й элемент, умножается на различные коэффициенты и вычитается из всех следующих за ней строк так, чтобы все ненулевые элементы k -го столбца, лежащие ниже k -й строки, становились нулями.

Получающаяся в результате матрица обозначается через $A^{(k+1)}$. В матричных обозначениях этот процесс может быть по-другому сформулирован следующим образом.

Прямое гауссово исключение состоит в вычислении

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

где элементарная нижняя треугольная матрица L_k , представленная на рисунке 2.3, задается в виде

$$L_k = I_n + (\eta^{(k)} - e_k) e_k',$$

с элементами вектора-столбца $\eta^{(k)}$, определяемыми следующим образом:

$$\eta_i^{(k)} = 0, \quad i < k;$$

$$\eta_k^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \eta_i^{(k)} = \frac{-a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i > k.$$

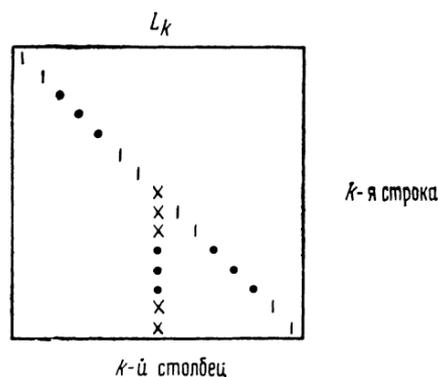


Рисунок 2.3 – Элементарная матрица на k -м шаге.

Таким образом, диагональные элементы матрицы L_k равны единицам во всех столбцах, за исключением k -го, в котором элементы, лежащие на диагонали и под ней, равны $\eta_i^{(k)}$. Все остальные элементы матрицы L_k равны нулю.

Теперь из (2.5) получаем

$$A^{(n+1)} = L_n \dots L_2 L_1 A^{(1)}, \quad (2.6)$$

Если положить

$$L = L_n \dots L_2 L_1, \quad (2.7)$$

и учесть, что $A^{(1)} \equiv A$ и $A^{(n+1)} \equiv U$, то вместо формул (2.6) и (2.7) получим

$$U = LA. \quad (2.8)$$

Таким образом, прямое гауссово исключение состоит в нахождении нижней треугольной матрицы L (произведение нижних треугольных матриц дает также нижнюю треугольную матрицу), которая преобразует матрицу A в верхнюю треугольную матрицу U . Имея в виду уравнение (2.8) и то, что операторы L_k применяются к обеим частям уравнения (2.4), приходим в результате гауссова исключения к уравнению

$$Ux = Lb. \quad (2.9)$$

Обратная подстановка метода Гаусса состоит в решении уравнения (2.9), которое производится следующим образом. Пусть x_i означает i -й элемент вектора x . Тогда последний элемент x_n равен последнему элементу вектора-столбца Lb , так как в последней строке матрицы U равны нулю все элементы, кроме последнего, равного единице. Это значение x_n подставляется в предыдущее уравнение, что позволяет легко вычислить x_{n-1} . Подстановка x_n и x_{n-1} в $(n-2)$ -ю строку уравнения (2.9) дает x_{n-2} и так далее [16].

Для того чтобы описанную выше обратную подстановку выразить в матричных обозначениях, отметим прежде всего, что $a_{ij}^{(i+1)}$ является (i,j) -м элементом матрицы U . Это следует из того факта, что i -я строка матрицы A в

формуле (2.5) видоизменяется только до $k = i$ и затем остается неизменной. Другими словами, i -е строки матриц $A^{(i+1)}$ и U совпадают.

Обратная подстановка метода исключения Гаусса может быть теперь определена следующим образом:

$$U_2 \dots U_{n-1} U_n U = I_n, \quad (2.10)$$

где

$$U_k = I_n + \xi^{(k)} e_k', \quad k = n, n-1, \dots, 2,$$

и элементы вектора-столбца $\xi^{(k)}$ задаются в виде

$$\xi_i^{(k)} = -a_{ik}^{(i+1)}, \quad i < k \quad \text{и} \quad \xi_i^{(k)} = 0, \quad i \geq k. \quad \text{Пример показан на рисунке 2.4.}$$

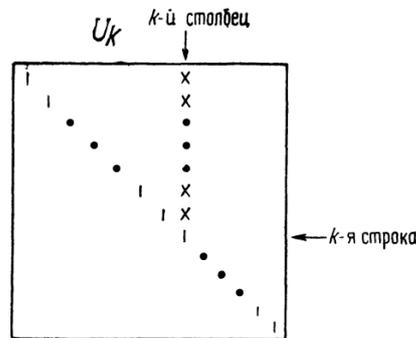


Рисунок 2.4 – Элементарная матрица на k -м шаге обратной подстановки.

Таким образом, все диагональные элементы матрицы U_k равны единице, а в k -м столбце наддиагональные элементы принимают значения $\xi_i^{(k)}$. Все остальные элементы U_k являются нулями.

Теперь можно описать общий результат применения процессов прямого исключения и обратной подстановки к матрице A . Из уравнения (2.10) получим

$$U^{-1} = U_2 \dots U_{n-1} U_n, \quad (2.11)$$

и из (2.7), (2.9) и (2.11) следует

$$x = U^{-1} L b = U_2 \dots U_{n-1} U_n L_n \dots L_2 L_1 b. \quad (2.12)$$

Исключение Гаусса-Жордана

Если на каждом шаге гауссова исключения исключаются не только ненулевые элементы под диагональю, но и те ненулевые элементы, которые

находятся над диагональю, то процесс называется исключением Гаусса-Жордана. Таким образом, заданная матрица коэффициентов A приводится непосредственно к единичной матрице в противоположность методу Гаусса, когда матрица A первоначально преобразуется к верхней треугольной (с единичной диагональю) матрице U , которая затем приводится к единичной матрице.

Основной метод

При исключении Гаусса-Жордана (GJE) к данной матрице A применяется последовательность элементарных преобразований для приведения ее к единичной матрице I_n . Та же последовательность преобразований, примененная к вектору b в правой части системы уравнений $Ax = b$, дает решение.

Пусть $A^{(k)}$ обозначает матрицу в начале k -го шага исключения, причем $k=1, 2, \dots, n$ и $A^{(1)} \equiv A$, а $A^{(n+1)} \equiv I_n$. Обозначим (i,j) -й элемент матрицы $A^{(k)}$ через $a_{ij}^{(k)}$. Матрица $A^{(k)}$ в своих первых $k-1$ столбцах совпадает с единичной матрицей I_n . На k -м шаге k -й столбец матрицы $A^{(k)}$ преобразуется в вектор e_k с помощью элементарных преобразований строк.

$$A^{(k+1)} = T_k A^{(k)}, \quad (2.13)$$

где

$$T_k = I_n + (\zeta^{(k)} - e_k) e_k', \quad (2.14)$$

и элементы вектора-столбца $\zeta^{(k)}$ задаются в виде

$$\zeta_i^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i \neq k \quad \text{и} \quad \zeta_k^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}. \quad (2.15)$$

Теперь из формулы (2.13) и из условий $A^{(1)} \equiv A$ и $A^{(n+1)} \equiv I_n$, имеем

$$T_n \dots T_2 T_1 A = I_n,$$

что дает нам мультипликативную форму обратной матрицы (PFI) в виде

$$A^{-1} = T_n \dots T_2 T_1. \quad (2.16)$$

Если к концу k -го шага исключения Гаусса-Жордана (GJE) вектор-столбец $\zeta^{(k)}$ хранится на месте k -го столбца матрицы $A^{(k+1)}$, тогда нетривиальные элементы

формы PFI будут замещать матрицу A при завершении процесса исключения [16].

Связь между формами PFI и EFI

В процессе обратной подстановки метода Гаусса (GE) для матрицы, обратной к верхней треугольной матрице U с единичной диагональю, разложение на множители получается путем выбора в качестве главных последовательно расположенных элементов диагонали, начиная с нижнего правого угла матрицы. В этом случае заполнения ненулевыми элементами не может происходить и нетривиальные элементы множителей в разложении обратной матрицы U^{-1} получаются только изменением знаков у тех элементов матрицы U , которые лежат над диагональю. Однако для вычисления матрицы U^{-1} таким способом необходимо, чтобы все строки матрицы U были известны. Другими словами, необходимо ждать завершения процесса прямого гауссова исключения.

Другим путем нахождения матрицы U^{-1} является выбор диагональных элементов в качестве главных, начиная с левого верхнего угла матрицы и двигаясь вниз по диагонали. В этом случае некоторое заполнение ненулевыми элементами, вообще говоря, будет происходить. Однако на k -м шаге при любом частном значении k требуются только первые k строк матрицы U . Так как к моменту завершения k -го шага прямого гауссова исключения первые k строк матрицы U известны, то матрица U^{-1} может быть вычислена в процессе прямого гауссова исключения. Это и есть в точности то, что делается при методе исключения Гаусса-Жордана (GJE). Вычисление матрицы U^{-1} в форме разложения на множители сочетается с прямым гауссовым исключением. Мы увидим, что в методе GJE исключение элементов над диагональю эквивалентно вычислению матрицы U^{-1} в соответствии с приведенным выше методом. Этот метод для вычисления матрицы, обратной к верхней треугольной матрице U с единичной диагональю, может быть в математической форме описан следующим образом.

Пусть

$$U^{(k+1)} = \bar{U}_k U^{(k)}, k=1,2,\dots,n, \quad (2.17)$$

где

$$U^{(1)} = U, U^{(n+1)} = I_n \quad (2.18)$$

и

$$\bar{U}_k = I_n + \xi^{(k)} e'_k \quad (2.19)$$

где элементы вектора-столбца $\xi^{(k)}$ задаются в виде

$$\xi_i^{(k)} = 0, i \geq k \text{ и } \xi_i^{(k)} = -u_{ik}^{(k)}, i < k. \quad (2.20)$$

Принимая во внимание формулы (2.19) и (2.20), имеем $\bar{U}_1 = I_n$, и поэтому из формул (2.17) и (2.18) следует, что

$$U^{-1} = \bar{U}_n \dots \bar{U}_3 \bar{U}_2. \quad (2.21)$$

В результате, имеем следующие два уравнения, которые показывают связь между формами PFI и EFI:

$$e'_k T_k e_k = e'_k \bar{U}_k e_k = e'_k U^{-1} e_k, i < k \quad (2.22)$$

и

$$e'_k T_k e_k = e'_k L_k e_k, i \geq k. \quad (2.23)$$

Из формулы (2.22) ясно, что нетривиальные элементы PFI, расположенные над ведущей диагональю, являются элементами матрицы U^{-1} , выраженной в явной форме, где U является верхней треугольной матрицей с единичной диагональю, полученной в конце процесса прямого гауссова исключения. С другой стороны, из формулы (2.23) следует, что нетривиальные элементы в обеих формах PFI и EFI, расположенные на диагонали и под ней, являются идентичными. Таким образом, структура распределения нулей и ненулевых элементов в обеих формах PFI и EFI одинакова для элементов, расположенных на диагонали и под ней. Над диагональю структура распределения нулей и ненулевых элементов у формы PFI такая же, как и у матрицы U^{-1} в то время как у формы EFI она такая, как у матрицы U . Вообще говоря, матрица U^{-1} содержит больше ненулевых элементов, чем матрица U , и поэтому форма PFI обычно не так разрежена, как форма EFI.

Собственные значения и собственные векторы

Имеются два хорошо известных прямых метода для вычисления собственных значений и собственных векторов симметричных матриц: метод Гивенса (GM) и метод Хаусхолдера (НМ). В обоих методах применяется ряд ортогональных преобразований подобия для приведения заданной матрицы к трехдиагональной форме, так как собственные значения и собственные векторы трехдиагональной матрицы легко определяются. В случае несимметричных матриц применяется модификация гауссова исключения для приведения заданной матрицы к форме Хессенберга, в которой все $a_{ij} = 0$ при $i > j + 1$.

Если заданная матрица A симметричная, то во многих случаях можно произвести такую перестановку, при которой верхний левый угол результирующей матрицы будет иметь трехдиагональную форму. Это можно осуществить, если удастся найти строку, в которой не больше одного внедиагонального элемента. Эту строку (и соответствующий столбец) перемещаем так, чтобы она стала первой строкой (первым столбцом). Затем мы исключаем первую строку и первый столбец из дальнейшего рассмотрения и повторяем описанную выше процедуру для оставшихся строк и столбцов. Если на каком-либо шаге нельзя будет найти строку с одним внедиагональным элементом, то процесс прекращается. Ясно, что на этом шаге левый верхний угол преобразованной матрицы будет иметь трехдиагональную форму. Теперь нам остается только преобразовать квадратную матрицу в нижнем правом углу к трехдиагональной форме, применив один из методов GM или НМ. Поэтому в остальной части настоящей главы эту подматрицу без потери общности будем обозначать через A .

Метод Гивенса

Этот метод приводит матрицу A к трехдиагональной форме с помощью вращений Якоби. К началу k -го основного шага первые $k-1$ строк и столбцов матрицы $A^{(k)}$ имеют трехдиагональную форму. Основной k -й шаг состоит не больше чем из $n-k-1$ промежуточных шагов, в процессе которых

последовательно вводятся нули в позиции $k+2, k+3, \dots, n$ k -й строки и k -го столбца. Определим

$$R_{pk} = I_n + (\tau - 1)(e_{k+1}e'_{k+1} + e_p e'_p) + \omega(e_{k+1}e'_p - e_p e'_{k+1}) \quad (2.24)$$

где $a_{pk}^{(k)}$ – первый ненулевой элемент после $(k+1)$ -й строки в k -м столбце. Тогда первый промежуточный шаг в основном k -м шаге может быть представлен в виде

$$A_1^{(k)} = R_{pk}A^{(k)}R'_{pk}. \quad (2.25)$$

Теперь $e'_i R_{pk} = e'_i$ if $i \neq k+1, p$. Поэтому все строки и столбцы матриц $A_1^{(k)}$ и $A^{(k)}$ имеющие индексы, отличные от $k+1$ и p , будут одинаковыми и

$$e'_{k+1} R_{pk} A^{(k)} = (e'_{k+1} + (\tau - 1)e'_{k+1} + \omega e'_p) A^{(k)} = \tau e'_{k+1} A^{(k)} + \omega e'_p A^{(k)}.$$

Аналогично имеем

$$e'_p R_{pk} A^{(k)} = \tau e'_p A^{(k)} - \omega e'_{k+1} A^{(k)}.$$

Таким образом, $(k+1)$ -я и p -я строки матрицы $R_{pk}A^{(k)}$ являются линейными комбинациями соответствующих строк матрицы $A^{(k)}$.

Подобным же образом можно убедиться, что в матрице $R_{pk}A^{(k)}R'_{pk}$ $k+1$ -й и p -й столбцы являются линейными комбинациями соответствующих столбцов матрицы $R_{pk}A^{(k)}$. Более того, если положить

$$\tau = \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{[(a_{pk}^{(k)})^2 + (a_{k+1,k}^{(k)})^2]^{1/2}}$$

и

$$\omega = \frac{a_{pk}^{(k)}}{[(a_{pk}^{(k)})^2 + (a_{k+1,k}^{(k)})^2]^{1/2}},$$

то

$$\begin{aligned} e'_p A_1^{(k)} e_k &= e'_p R_{pk} A^{(k)} R'_{pk} e_k = (\tau e'_p A^{(k)} - \omega e'_{k+1} A^{(k)}) e_k = \\ &= \tau a_{pk}^{(k)} - \omega a_{k+1,k}^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

Интересная модификация метода GM для ленточных матриц дана Шварцем. В этом методе для приведения симметричной ленточной матрицы к

трехдиагональной форме применяется соответствующая последовательность вращений, аналогичных вращению, представленному формулой (2.24). В течение всего процесса преобразований сохраняется свойство ленточности заданной матрицы, графическое отображение которой приведено на рисунке 2.5.

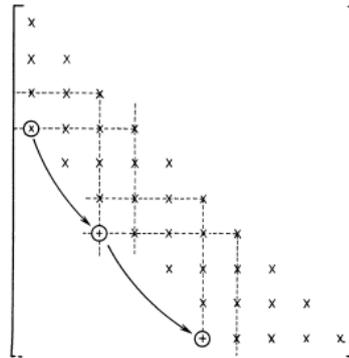


Рисунок 2.5 – Вращения для ленточной матрицы

Исключение двух симметричных элементов внутри ленты создает, вообще говоря, два одинаковых ненулевых элемента в симметричных позициях вне ленты. Эти элементы исключаются последовательностью вращений, которые сдвигают их вниз на λ строк и λ столбцов (λ – ширина ленты заданной матрицы) и в конечном счете за границы матрицы. На рис. 4 показан весь процесс исключения элемента a_{41} при $n = 10$ и $\lambda = 3$, причем ввиду симметрии матрицы A рассматриваются только элементы, лежащие на главной диагонали и под ней. Пусть вращение R_{pq} определяется и τ и ω выбраны из условия преобразования данного элемента в нуль. Например, на рис. 4 сначала применяется вращение R_{34} для того, чтобы сделать a_{41} равным нулю. Это создает ненулевой элемент в (7,3)-й позиции и используется R_{67} для обращения его в нуль. В свою очередь это создает (10, 6)-й ненулевой элемент. Тогда с помощью $R_{9,10}$ обращается в нуль (10, 6)-й элемент.

Подобным же образом с помощью вращений R_{23} (которое оставляет (4,1)-й элемент без изменения) исключается (3,1)-й элемент. Два дополнительных вращения сдвинут ненулевые элементы, созданные в шестой строке и втором столбце, вниз и за границу матрицы. Продолжение этого

процесса для других строк и столбцов преобразует матрицу A к трехдиагональной форме.

Метод Хаусхолдера

Этот метод приводит матрицу A к трехдиагональной форме с помощью элементарных эрмитовых ортогональных матриц. В начале k -го шага матрица $A^{(k)}$ имеет трехдиагональную форму для своих первых $k-1$ строк и столбцов. На k -м шаге вводятся нули в k -ю строку и k -й столбец, причем сохраняются нули, введенные на предыдущих шагах. Другими словами, все элементы в позициях $k+2, k+3, \dots, n$ k -и строки и k -го столбца обращаются в нуль. Данный метод состоит из $n-2$ шагов, таких, что

$$A^{(k+1)} = H_k A^{(k)} H_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad (2.26)$$

где

$$H_k = I_n - \alpha_k^{-1} \hat{\eta}^{(k)} \hat{\eta}^{(k)'}, \quad (2.27)$$

и элементы вектора-столбца $\hat{\eta}^{(k)}$ заданы соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i^{(k)} &= 0, \quad i \leq k; \\ \hat{\eta}_{k+1}^{(k)} &= a_{k+1,k}^{(k)} \pm \beta_k, \quad \hat{\eta}_i^{(k)} = a_{ik}^{(k)}, \quad i > k+1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

причем

$$\beta_k^2 = \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^{(k)})^2, \quad a_k = \beta_k^2 \pm \beta_k a_{k+1,k}^{(k)}. \quad (2.29)$$

Для устойчивости знак β_k должен быть выбран таким же, как и знак $a_{k+1,k}^{(k)}$.

Приведение к форме Хессенберга

Пусть $A^{(k)}$ – матрица, у которой первые $k-1$ столбцов имеют форму Хессенберга, т. е. $a_{ij}^{(k)} = 0$ для всех $i > j+1$ и $j < k$. Тогда на k -м шаге применяются элементарные преобразования подобия для обращения в нуль элементов k -го столбца в позициях $k+2, k+3, \dots, n$. Это осуществляется для $k = 1, 2, \dots, n-2$, в результате чего матрица $A^{(n-1)}$ имеет форму Хессенберга. Таким образом, имеем

$$A^{(k+1)} = L_{k+1} A^{(k)} L_{k+1}^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad (2.30)$$

где

$$L_{k+1} = I_n + \eta^{(k+1)} e'_{k+1}, \quad (2.31)$$

причем элементы вектора-столбца η^k даются в виде

$$\begin{aligned} \eta_i^{(k+1)} &= 0, i \leq k + 1; \\ \eta_i^{(k+1)} &= -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{k+1,k}^{(k)}}, i > k + 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из формул (2.31) и (2.32) следует, что

$$L_{k+1}^{-1} = I_n - \eta^{(k+1)} e'_{k+1}. \quad (2.33)$$

Приведенные выше уравнения означают, что для получения матрицы $A^{(k+1)}$ из матрицы $A^{(k)}$ необходимо вначале добавить ко всем строкам с элементами $a_{ik}^{(k)} \neq 0, i > k + 1$, умноженную на соответствующий коэффициент $(k+1)$ -ю строку и затем добавить к $(k+1)$ -му столбцу умноженные на соответствующие коэффициенты столбцы результирующей матрицы, отвечающие элементам $a_{jk}^{(k)} \neq 0, j > k + 1$. Таким образом, заполнение имеет место во всем $(k+1)$ -м столбце и в последних $n-k-1$ строках и столбцах матрицы $A^{(k)}$. В последних $n-k-1$ компонентах $(k+1)$ -го столбца заполнение имеет место дважды: один раз при умножении слева на матрицу L_{k+1} и один раз при умножении справа на матрицу L_{k+1}^{-1} . Конечно, в первых $(k+1)$ компонентах $(k+1)$ -го столбца заполнение имеет место только в результате умножения справа на матрицу L_{k+1}^{-1} . С другой стороны, для последних $n-k-1$ строк и столбцов заполнение имеет место только при умножении слева на L_{k+1} [16].

Собственные векторы

Собственный вектор x , соответствующий известному собственному значению λ , может быть легко получен потому, что уравнение $Ax = \lambda x$ означает, что

$$(A - \lambda I)x = 0. \quad (2.34)$$

Заметим, что $A - \lambda I$ – особенная матрица, так как $x \neq 0$, и поэтому мы могли бы опустить одно из уравнений системы (2.34) и решить оставшуюся систему неоднородных уравнений для $(n-1)$ отношений компонент вектора x . При решении неоднородной системы уравнений могут быть использованы

различные способы минимизации заполнения и (или) вычислительных затрат, приведенные выше.

Изменение обратной матрицы A^{-1} при изменениях в столбце матрицы A

Предположим, что имеется EFI, PFI или одна из других форм обратной к A матрицы. Пусть \hat{A} обозначает матрицу, полученную из матрицы A путем замены ее q -го столбца новым столбцом, скажем \hat{a}_q . Мы опишем несколько возможных путей решения вопроса построения матрицы \hat{A}^{-1} по известной матрице A^{-1} .

Первый метод.

Если A^{-1} обозначает какую-либо форму обратной к A матрицы, то каждый столбец матрицы $A^{-1}\hat{A}$ совпадает с соответствующим столбцом единичной матрицы I_n , за исключением q -го столбца. Действительно, имеем

$$A^{-1}\hat{A} = I_n + (A^{-1}\hat{a}_q - e_q)e'_q = I_n + (\hat{a}_q^{(n+1)} - e_q)e'_q, \quad (2.35)$$

где $\hat{a}_q^{(n+1)} = A^{-1}\hat{a}_q$. Поэтому

$$\hat{A}^{-1} = (I_n + (\hat{a}_q^{(n+1)} - e_q)e'_q)^{-1}A^{-1} = \check{T}_q A^{-1}, \quad (2.36)$$

где

$$\check{T}_q = I_n + (\xi^{(q)} - e_q)e'_q \quad (2.37)$$

причем

$$\check{v}_i^{(q)} = \frac{-\hat{a}_{iq}^{(n+1)}}{\hat{a}_{qq}^{(n+1)}}, i \neq q \text{ и } \check{v}_q^{(q)} = \frac{1}{\hat{a}_{qq}^{(n+1)}}. \quad (2.38)$$

Таким образом, \hat{A}^{-1} имеет на один множитель больше, чем разложение на множители матрицы A^{-1} . Напомним, что только ненулевые элементы вектора $\check{v}^{(q)}$ должны храниться для вычисления матрицы \check{T}_q .

Другие столбцы матрицы A могут быть заменены подобным же способом. Конечно, каждая такая замена добавляет еще один множитель (подобный матрице \check{T}_q) к обратной матрице. Если требуется изменить только небольшое число столбцов, то разумно пользоваться изложенным здесь методом. С другой стороны, если заменяется ряд столбцов матрицы A , как в

линейном программировании, то было бы желательным избавиться от тех множителей матрицы A^{-1} , которые соответствуют замененным столбцам исходной матрицы A . Каждый из этих столбцов можно представить себе удаленным из «базиса», а новый столбец (которым заменяется исходный) – вставленным на его место. В следующем методе, пригодном только для формы EPI, исключается множитель, соответствующий удаляемому из базиса столбцу. Второй метод.

Этот метод особенно подходит для программ линейного программирования. Как и ранее, пусть a_q , q -й столбец матрицы A , замещается столбцом \hat{a}_q и \hat{A} обозначает измененную матрицу. Если $\hat{A}^{(n+1)} = L_n \dots L_1 \hat{A}$ и $U = L_n \dots L_1 A$, то только q -е столбцы матриц $\hat{A}^{(n+1)}$ и U различны. Теперь определяются элементарные матрицы \hat{U}_q и \check{T}_q , такие, что последние $n-q$ элементов q -й строки матрицы $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ равны нулю и e_q является q -м столбцом матрицы $U^{(q)} = \check{T}_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$. Очевидно, матрица $U^{(q)}$ легко обращается, так как она получается из матрицы U путем замены ее q -й строки и q -го столбца соответственно на e'_q и e_q . Таким образом, $U^{(q)-1}$ получается из матрицы $U_2 \dots U_n$, если исключить матрицу U_q и положить каждое $\zeta_q^{(k)} = 0, k > q$. Ясно, что

$$\hat{A}^{-1} = U^{(q)-1} \check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1. \quad (2.39)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой для вычисления \hat{A}^{-1} нам нужно определить матрицы \hat{U}_q и \check{T}_q . Это может быть осуществлено следующим образом.

Если

$$\hat{U}_q = I_n + e_q \tilde{v}^{(q)}, \quad (2.40)$$

причем

$$e'_q + \tilde{v}^{(q)} = e'_q U_{q+1} \dots U_n, \quad (2.41)$$

то, принимая во внимание условие $\hat{A}^{(n+1)} e_j = U e_j, j \neq q$, имеем

$$e'_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)} e_j = (e'_q + \tilde{v}^{(q)}) U e_j = e'_q U_{q+1} \dots U_n U e_j = e'_q e_j = 0, j \neq q,$$

так как U_{q+1}, \dots, U_n преобразует последние $n-q$ столбцов матрицы U в соответствующие столбцы единичной матрицы I_n . Кроме того, так как $e'_j \hat{U}_q = e'_j, j \neq q$, матрица \hat{U}_q , заданная формулой (2.40), является желаемой матрицей, которая приводит все недиагональные элементы q -й строки матрицы $\hat{A}^{(n+1)}$ к нулю, а остальные строки сохраняет без изменений.

Пусть

$$\hat{a}_q^{(t)} = \hat{U}_q L_n \dots L_1 \hat{a}_q. \quad (2.42)$$

Так как $e'_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)} = \hat{a}_{qq}^{(t)} e'_q$, исключение Гаусса-Жордана, произведенное для q -го столбца матрицы $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$, не окажет влияния на другие столбцы, и матрица \check{T}_q будет определяться той же формулой (2.37) и $\hat{a}_q^{(t)}$ – формулой (2.42).

Рассмотрим, каким образом столбец матрицы \hat{A} , скажем столбец \hat{a}_{q_1} заменить столбцом \acute{a}_{q_1} . Легко проверить, что

$$\check{A}^{-1} = U^{(q,q_1)^{-1}} \check{T}_{q_1} \hat{U}_{q_1} \check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1, \quad (2.43)$$

где матрица $U^{(q,q_1)}$ получена из матрицы $U^{(q)}$ путем замены ее q -й строки и q -го столбца соответственно на e'_{q_1} и e_{q_1} , а матрицы \check{T}_{q_1} и \hat{U}_{q_1} получены из матрицы $\check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1 \check{A}$ тем же способом, каким матрицы \check{T}_q и \hat{U}_q получаются из $\check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1 \check{A}$. Нет необходимости преобразовывать q -й столбец матрицы $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ к единичному вектору e_q , если запомнить, что при обращении матрицы $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ ее q -й столбец должен быть сперва преобразован к единичному вектору. В этом случае матрицы \check{T}_q и \check{T}_{q_1} в формуле (2.43) отсутствуют. Однако при обращении матрицы $U^{(q,q_1)}$ q -й и q_1 -й столбцы (вначале столбец с меньшим индексом) должны быть приведены к единичным векторам ранее, чем другие столбцы матрицы.

3 Разработка и исследование единого подхода к решению геодезических задач

Несмотря на многообразие задач, решаемых в геодезии и маркшейдерии, и уровней их сложности, основополагающей является задача определения координат неизвестной точки по результатам измерения расстояний и направлений на эту точку из точек с известными координатами. Существует большое количество методов решения данной задачи, различающихся трудоемкостью и точностью полученного решения [18].

Измерения, в том числе и геодезические, имеют погрешности. Координаты конечной точки, на которую производились измерения, и выполнялись вычисления определяются с погрешностью. Применение ВТ снижает вопрос трудоемкости и сложности решения. Основное средство повышения точности результата при равной точности выполненных измерений, это увеличение количества измерений, выполненных сверх минимально необходимых для получения решения [3, 7], а также применение эффективных оценок измеряемых величин. [19]. Поэтому представляется целесообразным разработка «универсальных подходов к решению как можно более широкого круга геодезических задач» [8]. Повышение точности измерений и расчетов, развитие новых математических теорий и привлечение вычислительной техники входят в круг научно-технических задач высшей геодезии.

3.1 Расчет координат неизвестной точки по результатам дирекционных измерений

В данной работе предложен метод решения задачи определения координат неизвестной точки по результатам дирекционных измерений, выполненных на эту точку из произвольного множества точек с известными координатами. Решение строится из предположения, что координаты точек и углы заданы в декартовой системе координат и расстояния между точками относительно малы, то есть не учитывается искривление земной поверхности.

Постановка задачи. Пусть для точек с известными координатами X_i , $i=1,2,\dots,n$, определены направления P_i на точку с неизвестными координатами X_z . Требуется определить координаты неизвестной точки.

Для решения этой задачи методами линейной алгебры было предложено несколько вариантов построения СЛАУ.

Вариант 1. Координаты известной точки X_i и измеренный из нее вектор направления P_i на неизвестную точку X_z определяют уравнение прямой, проходящей через точки X_z и X_i :

$$X_z = X_i + d_i \cdot P_i, \quad (3.1)$$

где X_z – координаты произвольной точки, принадлежащей данной прямой, d_i – некоторый скаляр – коэффициент, определяющий расстояние от точки X_i до X_z . Минимально необходимое количество измерений для определения координат неизвестной точки равно двум (это точка пересечения двух лучей, исходящих из X_1 и X_2 на X_z).

Рассмотрим подробнее подход к решению этой задачи. Пусть в выражении (3.1) $i=1,2$. Тогда из уравнений $X_z = X_1 + d_1 \cdot P_1$ и $X_z = X_2 + d_2 \cdot P_2$ следует, равенство:

$$X_1 + d_1 \cdot P_1 = X_2 + d_2 \cdot P_2, \quad (3.2)$$

которое после простых преобразований можно привести к системе линейных уравнений вида:

$$P_{12} \cdot D = X', \quad (3.3)$$

где $P_{12} = (P_1, -P_2)$, матрица с известными коэффициентами, первый столбец которой есть вектор направления P_1 , а второй столбец – вектор P_2 , взятый со знаком минус, $X' = X_2 - X_1$ – вектор правой части, $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ – подлежащий определению вектор D , составленный из искомых коэффициентов. В таком случае возможным решением задачи (3.3) будет оценка:

$$\bar{D} = P_{12}^+ \cdot X', \quad (3.4)$$

где P_{12}^+ – матрица, псевдообратная к P_{12} . Отметим, что \bar{D} (3.4) является оценкой метода наименьших квадратов, а, следовательно, несмещенной, состоятельной и эффективной [19].

Решение задачи построено на предположении (3.2) о существовании пересечения прямых $X_Z = X_1 + d_1 \cdot P_1$ и $X_Z = X_2 + d_2 \cdot P_2$. Но из-за возможных погрешностей определения векторов направлений P_1 и P_2 на неизвестную точку прямые могут не пересекаться, а только скрещиваться. Учитывая это обстоятельство, изменим постановку задачи следующим образом.

Вариант 2. Пусть заданы точки X_1 и X_2 , а также векторы P_1 и P_2 , определяющие прямые вида (3.1). Для решения задачи найдем точки на этих прямых, расстояние между которыми будет минимальным.

Зададим функцию, определяющую это расстояние, в виде:

$$I(d_1, d_2) = (X_1 + d_1 \cdot P_1 - X_2 - d_2 \cdot P_2)^T \cdot (X_1 + d_1 \cdot P_1 - X_2 - d_2 \cdot P_2), \quad (3.5)$$

где неизвестными являются коэффициенты-скаляры d_1 и d_2 . Открывая скобки и выполняя перемножение слагаемых в (3.5), получим:

$$\begin{aligned} I(d_1, d_2) = & X_1^T \cdot X_1 + d_1^2 \cdot P_1^T \cdot P_1 + X_2^T \cdot X_2 + d_2^2 \cdot P_2^T \cdot P_2 + 2d_1 \cdot X_1^T \cdot P_1 - \\ & - 2X_1^T \cdot X_2 - 2d_2 \cdot X_1^T \cdot P_2 - 2d_1 \cdot X_2^T \cdot P_1 - 2d_1 d_2 \cdot P_1^T \cdot P_2 + 2d_2 \cdot X_2^T \cdot P_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поскольку функция (3.5) выпуклая, необходимым и достаточным условием экстремума для нее является равенство нулю частных производных по аргументам [Амосов]. Найдем частные производные этой функции по d_1 и d_2 :

$$\frac{\partial I(d_1, d_2)}{\partial d_1} = 2d_1 P_1^T \cdot P_1 - 2(X_2 - X_1)^T \cdot P_1 - d_2 \cdot P_1^T \cdot P_2$$

и

$$\frac{\partial I(d_1, d_2)}{\partial d_2} = 2d_2 P_2^T \cdot P_2 - 2(X_2 - X_1)^T \cdot P_2 - 2d_1 P_1^T \cdot P_2.$$

Приравнивая их к нулю и, разрешая относительно d_1 и d_2 , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d_1 \cdot P_1^T \cdot P_1 - d_2 \cdot P_1^T \cdot P_2 = (X_2 - X_1)^T \cdot P_1 \\ -d_1 \cdot P_1^T \cdot P_2 + d_2 \cdot P_2^T \cdot P_2 = (X_2 - X_1)^T \cdot P_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Поскольку можно записать $d_i \cdot P_i = (d_i \cdot \gamma) \cdot (1/\gamma \cdot P)_i$, где γ – произвольный множитель, то можно выбрать нормировку, для которой $P_i^T \cdot P_i = 1$, и тогда справедливо $d_1 - d_2 a = B^T \cdot P_1$ и $d_2 - d_1 a = B^T \cdot P_2$, где $a = P_1^T \cdot P_2$ – известная скалярная величина и $B = X_2 - X_1$ – известный вектор. Отсюда следует $d_1 = \frac{B^T \cdot (P_1 - a \cdot P_2)}{1 - a^2}$ и $d_2 = \frac{B^T \cdot (P_2 - a \cdot P_1)}{1 - a^2}$. То есть задача решается аналитически.

При $a = 1$ решения не существует, что случится лишь при параллельности направлений P_1 и P_2 . Здесь решение не зависит от размерности пространства наблюдений, т.е. одинаковый для планарной и пространственной задачи.

Подставляя полученные значения d_1 и d_2 в соответствующие уравнения вида (3.1), получим две оценки вектора искомых координат в виде:

$$\begin{aligned} X_Z^{(1)} &= X_1 + \frac{(X_2 - X_1)^T \cdot (P_1 - P_1^T \cdot P_2 \cdot P_2)}{1 - P_1^T \cdot P_2} \cdot P_1, \\ X_Z^{(2)} &= X_2 + \frac{(X_2 - X_1)^T \cdot (P_2 - P_1^T \cdot P_2 \cdot P_1)}{1 - P_1^T \cdot P_2} \cdot P_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если решения (3.8) совпадают, то прямые пересекаются, в противном случае, из-за погрешностей измерений прямые скрещиваются, и в качестве решения задачи можно принять среднюю точку между $X_Z^{(1)}$ и $X_Z^{(2)}$, т.е. $\bar{X} = (X_Z^{(1)} + X_Z^{(2)}) / 2$.

Случай $N > 2$ измерений. Полученные решения (3.4) и (3.7) легко обобщить на случай произвольного количества известных точек. Если $i = 1, \dots, n$, то из выражения (3.2) получим:

$$X_i + d_i \cdot P_i = X_j + d_j \cdot P_j, \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad i \neq j.$$

Всего таких равенств можно получить $C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, т.е. число сочетаний из n по 2. Каждая пара точек X_i и X_j даст уравнение вида (3.2), соответственно система линейных уравнений (3.3) преобразуется в:

$$\tilde{P} \cdot \tilde{D} = \tilde{X}, \quad (3.9)$$

где матрица системы

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} P_1 & -P_2 & \dots & 0 \\ P_1 & 0 & -P_3 & 0 \\ P_1 & 0 & \dots & -P_n \\ 0 & 0 & P_{n-1} & -P_n \end{vmatrix},$$

вектор правой части

$$\tilde{X} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_1 \\ \dots \\ X_n - X_{n-1} \end{vmatrix},$$

а вычисляемый вектор неизвестных равен:

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{vmatrix}.$$

Оценка вектора неизвестных \tilde{D} также может быть получена в виде $\bar{D} = \tilde{P}^+ \cdot \tilde{X}$.

Аналогично, выражение (3.6) для множества точек с известными координатами можно преобразовать в выражение:

$$I(d_i, d_j) = X_i^T \cdot X_i + d_i^2 \cdot P_i^T \cdot P_i + X_j^T \cdot X_j + d_j^2 \cdot P_j^T \cdot P_j + 2d_i \cdot X_i^T \cdot P_i - \\ - 2X_i^T \cdot X_j - 2d_j \cdot X_i^T \cdot P_j - 2d_i \cdot X_j^T \cdot P_i - 2d_i d_j \cdot P_i^T \cdot P_j + 2d_j \cdot X_j^T \cdot P_j,$$

где $i=1, \dots, n-1$, $j=i+1, \dots, n$. Всего таких функций можно получить C_n^2 .

Вычисляя частные производные от этих выражений, получим:

$$\frac{\partial I(d_i, d_j)}{\partial d_i} = 2d_i P_i^T \cdot P_i - 2(X_j - X_i)^T \cdot P_i - d_j \cdot P_i^T \cdot P_j,$$

а приравнивая их к нулю можем составить систему уравнений вида (3.8), где теперь матрица системы

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_1^T \cdot P_1 & -P_1^T P_2 & \dots & 0 \\ P_1^T \cdot P & 0 & -P_1^T P_3 & 0 \\ P_1^T \cdot P_1 & 0 & \dots & -P_1^T P_n \\ 0 & 0 & P_{n-1}^T P_{n-1} & -P_{n-1}^T P_n \end{pmatrix},$$

вектор правой части

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} (X_2 - X_1)^T \cdot P_1 \\ (X_3 - X_1)^T \cdot P_1 \\ \dots \\ (X_{n-1} - X_n)^T \cdot P_{n-1} \end{pmatrix},$$

а вычисляемый вектор неизвестных так же

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Для решения таких переопределенных систем используются численные методы, например, применение обобщенной обратной или псевдообратной матрицы [20].

3.2 Расчет координат неизвестной точки по результатам дистанционных измерений

Для решения этой задачи методами линейной алгебры также можно построить систему линейных уравнений.

Пусть для точек с известными координатами X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определены расстояния R_i до точки с неизвестными координатами X_z . Требуется определить координаты неизвестной точки.

Для трехмерного пространства необходимо четыре точки и более, чтобы сформировать систему уравнений. По результатам измерений R_i можно записать несколько равенств вида

$$(X_z - X_1)^T (X_z - X_1) = R_1^2$$

$$(X_Z - X_2)^T (X_Z - X_2) = R_2^2$$

...

$$(X_Z - X_N)^T (X_Z - X_N) = R_N^2$$

Найдем попарную разницу между такими уравнениями. Для пары i и j получим следующее соотношение

$$(X_Z - X_i)^T (X_Z - X_i) - (X_Z - X_j)^T (X_Z - X_j) = R_i^2 - R_j^2.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получаем

$$-2X_Z^T X_i + X_i^T X_i + 2X_Z^T X_j - X_j^T X_j = R_i^2 - R_j^2.$$

Перенесем известные величины в правую часть

$$2X_Z^T (X_j - X_i) = R_i^2 - R_j^2 - X_i^T X_i + X_j^T X_j. \quad (3.10)$$

Обозначим правую часть как некую константу B_{ij}

$$B_{ij} = R_i^2 - R_j^2 - X_i^T X_i + X_j^T X_j.$$

С учетом перестановки сомножителей и перестановки транспонирования уравнение (3.10) можно переписать в виде

$$(X_j - X_i)^T X_Z = \frac{1}{2} B_{ij}.$$

Эти отдельные уравнения составляют систему из $C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!}$ уравнений. В общем виде такую систему можно записать как

$$\tilde{P} X_Z = \frac{1}{2} \tilde{B},$$

где векторы следующее поэлементное представление

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} (X_2 - X_1)^T \\ (X_3 - X_1)^T \\ \vdots \\ (X_n - X_{n-1})^T \end{vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{1,2} \\ B_{1,3} \\ \vdots \\ B_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Такая система решается аналогично системам, составленным для задач с дирекционными измерениями.

Независимо от количества дистанционных измерений на точку с неизвестными координатами, такая система уравнений дает единственный

ответ, в отличие от систем, составленных для решения задачи с угловыми измерениями.

Но к сожалению, для точек, лежащих в одной плоскости матрица становится вырожденной. Это объясняется тем, что в таком случае задача имеет два решения – две точки расположенные зеркально относительно плоскости. И для этого случая пока не выработан единый общий подход к решению.

Из анализа структуры матриц для левой части СЛАУ и векторов свободных коэффициентов видно, что они могут формироваться автоматически программными средствами по результатам дирекционных и дистанционных измерений.

3.3 Разработка программы

При анализе и разработке программы было предложено, что программа наполняется объектами следующей природы:

- Точки с известными координатами; координаты этих точек известны заранее; это точки триангуляционной сети или точки, чьи координаты считаются измеренными и выверенными на предыдущих измерениях.
- Неизвестные точки – точки, чьи координаты необходимо установить в результате расчетов на основе проведенных измерений.
- Измерения от известных точек на неизвестные или наоборот. Делятся по нескольким критериям:
 - Виды измерения:
 - Дистанционные измерения
 - Угловые измерения
 - Статистические типы измерения:
 - Однократные – измерение проведено из известной точки на неизвестную однократно.
 - Многократные – измерения проведены на неизвестную точку несколько раз; за одним сеанс измерения или через какой-то промежуток времени.

- Смешанные измерения:
 - Измерения проведены как дистанционные, так и угловые на одну точку; измерения проводились в одном сеансе или в разные сеансы.
- Рассчитанные точки – точки сети с неизвестными координатами, но координаты которых были вычислены на основе известных; их вычисленные координаты являются базисом для определения координат других точек, по результатам измерений.

По результатам этого анализа была построена диаграмма классов (см. Приложение Б, рисунок Б.1). Для реализации программы были предложены файлы следующей структуры.

Перечень файлов с исходными данными:

- Стационарные точки. Точки с известными координатами; координаты не подвергаются корректировке. Например, это узлы триангуляционной сети.
- Рассчитанные точки. Точки, чьи координаты были рассчитаны в ходе выполнения данного цикла работ. Координаты таких точек могут подвергаться корректировке за счет проведения новых расчетов, за счет проведения повторных (новых) измерений.
- Неизвестные точки. Точки, чьи координаты только предстоит определить.
- Проведенные измерения. Файл, содержащий информацию об угловых и дистанционных измерениях проведенных над перечисленными точками. Измерения проводятся не между всеми точками. Между некоторыми точками могут быть проведены многократные измерения.

Структура файлов точек

Структура файла «Стационарные точки», состоящего из набора строк:

- Количество точек в файле – целое число.
- Описание точки – много строк.

Каждая точка описывается (определяется) тремя строками со следующей структурой:

- Наименование точки – придание точке некоторого имени и т.п., как принято в геодезии;
- Комментарий – дополнительная подробная информация, сопроводительная;
- Код X Y Z – набор чисел, разделенных одним или несколькими пробелами: целое, вещественное, вещественное, вещественное

Структура файла «Расчитанные точки», состоящего из набора строк:

- Количество точек в файле – целое число.
- Описание точки – много строк.

Каждая точка описывается (определяется) четырьмя строками со следующей структурой:

- Наименование точки – придание точке некоторого имени и т.п., как принято в геодезии;
- Комментарий – дополнительная подробная информация, сопроводительная;
- Код X Y Z – набор чисел, разделенных одним или несколькими пробелами: целое, вещественное, вещественное, вещественное
- Количество_измерений, код_измерения, код_измерения ... – целые числа обозначающие кол-во и коды измерений, сделанных на эту точку. Отрицательный код означает, что это измерение в расчете не участвовало.

Стационарные и расчитанные точки составляют группу известных точек.

Структура файла «Неизвестные точки», состоящего из набора строк:

- Количество точек в файле – целое число.
- Описание точки – много строк.

Каждая точка описывается (определяется) тремя строками со следующей структурой:

- Наименование точки – придание точке некоторого имени и т.п., как принято в геодезии;
- Комментарий – дополнительная подробная информация, сопроводительная;
- Код – целое число.

- Количество_измерений Код_измерения Код_измерения ... – целые числа обозначающие кол-во и коды измерений, сделанных на эту точку. Отрицательный код означает, что это измерение в расчете не участвовало.

Структура файла «Проведенные измерения», состоящего из набора строк:

- Количество измерений в файле – целое число.
- Описание измерения – строка с описанием измерения.

Каждое измерение описывается (определяется) двумя строками со следующей структурой

- Наименование или комментарий к измерению;
- Код_измерения Код_точки_источника Код_точки_цели Код_типа_измерения Значения_измерения Код_типа_измерения Значения измерения.

Расшифровка элементов строки:

- Код_измерения – код придаваемый измерению, как отдельному объекту, сущности.
- Код_точки_источника, Код_точки_цели – коды точек взятые из файлов Стационарные точки, Рассчитанные точки, Неизвестные точки. Коды сквозные для всех файлов, вероятно должен быть единый реестр точек (пунктов).
- Код_типа_измерения – набор кодов измерений проведенных между двумя точками:
 - Угловое измерение от источника на цель – 001;
 - Отсутствие углового измерения – 002;
 - Дистанционное измерение от источника на цель – 010;
 - Отсутствие дистанционного измерения – 020.
- Значения_измерения – два вещественных значения для угловых измерений; одно вещественное значение для дистанционного измерения.

Вероятно, значения измерения или код измерения как-то должны быть связаны с условиями проведения измерения: видом и точностью прибора, условиями проведения измерения и т.п. Вероятно это отдельный набор таблиц БД.

3.4 Выбор программной среды

Алгоритмы обработки данных были апробированы в математическом пакете Mathcad.

Mathcad – система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается легкостью использования и применения для коллективной работы [27].

Mathcad удобен в использовании. Он обладает понятным интерфейсом для пользователя, что значительно упрощает его работу. Для решения задач имеется возможность пользоваться как клавиатурой, так и особыми панелями инструментов. Невзирая в таком случае, что этот программный продукт, в основном, нацелен на людей, не знающих программирование, Mathcad кроме того применяется в непростых работах. Для того чтобы визуализировать полученные решения математического моделирования посредством применения распределённых вычислений и классических стилей программирования. Mathcad включает огромное количество операторов и интегрированных функций с целью решения всевозможных технических заданий. Данный математический пакет дает возможность осуществлять численные и символьные расчеты, исполнять процедуры со скалярными величинами, векторами и матрицами, автоматически пересчитывать одни единицы измерения в иные.

Из многообразия функций Mathcad необходимо особо отметить:

- решение дифференциальных уравнений, в том числе и численными методами;
- построение двумерных и трёхмерных графиков функций (в разных системах координат, контурные, векторные и т.д.);
- использование греческого алфавита как в уравнениях, так и в тексте;
- Выполнение вычислений в символьном режиме;

- Выполнение операций с векторами и матрицами;
- Символьное решение систем уравнений;
- Аппроксимация кривых;
- Выполнение подпрограмм;
- Поиск корней многочленов и функций [28].

Помимо этого, в данной работе создавалась программа по выполнению обработки геодезических данных в среде визуального программирования на языке C++.

C++ – это универсальный язык программирования. C++ в настоящее время признается основным языком, применяемый с целью создания платных программных продуктов. C++ представляется языком программирования всеобщего назначения. Непосредственная сфера использования – системное программирование. Реализации C++ сейчас существует на всех ВМ, начиная с наиболее скромных микрокомпьютеров – вплоть до наиболее крупных супер-ЭВМ. Основным определением C++ считается класс. Класс – это определяемый пользователем тип. Классы обеспечивают скрытие информации, их инициализацию, неявное преобразование пользовательских типов, динамическое задание типов, контролируемое пользователем управление памятью и средства для перегрузки операций. В языке C++ концепции контроля типов и модульного построения программ реализованы более полно, чем в С. Кроме того, C++ содержит усовершенствования, прямо с классами не связанные: символические константы, функции-подстановки, стандартные значения параметров функций, перегрузка имен функций, операции управления свободной памятью и ссылочный тип. В C++ сохранены все возможности С эффективной работы с основными объектами, отражающими аппаратную "реальность" (разряды, байты, слова, адреса и т.д.). Это позволяет достаточно эффективно реализовывать пользовательские типы.

При разработке программы были построены диаграммы различных типов на унифицированном языке моделирования. Некоторые приведены в приложении Б. Расчеты, проведенные в математическом пакете по построенной

модели, представлены в приложении В. Заголовочные файлы, содержащие интерфейсы классов, предназначенных для решения задач на языке высокого уровня C++, приведены в приложении Г. Интерфейс разработанной программы приведен в приложении Д.

4 Результаты моделирования

По результатам анализа свойств и преимуществ единого подхода к решению геодезических задач, были сделаны следующие выводы.

1. Выработан подход приводящий к единообразному решению классических геодезических задач. Независимо от того, угловые или дистанционные измерения проведены на неизвестную точку. Определение координат такой точки сводится к построению и решению СЛАУ.
2. Были построены способы решения геодезических задач на плоскости (двумерный случай). Но эти подходы не удалось развить на пространственный случай.
 - а. Был разработана технология формирования СЛАУ в случае дистанционных измерений.
 - б. Было разработано две технологии (два подхода) к формированию СЛАУ для угловых измерений.
 - в. Для этих технологий были разработаны документы в системе MathCAD и проведены контрольные расчеты.
 - г. Была разработана программа в среде RAD Studio. Для решения СЛАУ была использована открытая библиотека AlgLib.
 - д. В настоящее время прорабатываются другие подходы к формированию СЛАУ для угловых измерений.
3. При таком подходе легко автоматизировать процесс вычислений координат неизвестной точки.
 - а. В представленных вариантах количество уравнений превышает количество неизвестных.
 - б. Алгоритмы являются устойчивыми и надежными.
 - в. Увеличение количества измерений приводит к минимизации погрешности вычислений.
 - г. Надежность обеспечивается тем, что не возникает аварийных ситуаций. Все нештатные ситуации под контролем, вплоть до вырожденных матриц. То есть можно заранее проверить является ли

система вырожденной, плохо обусловленной. Но и такие системы решаются с наперед заданной точности из-за применения МНК оценок невязки решения СЛАУ.

- д. Устойчивость обеспечивается использованием данных с погрешностями.
 - е. Устойчивость к ошибкам – при увеличении количества измерений снижается погрешность вычисления координат.
4. МНК оценки являются эффективными, состоятельными, несмещенными [18].
5. Разработана макетная программа для выполнения расчетов координат неизвестной точки по угловым и дистанционным измерениям.
- а. Предложена схема работы геодезистов. Создать мини БД для проекта.
 - б. В мини БД внести координаты стационарных точек.
 - в. Внести инфо по неизвестным точкам (маркерам).
 - г. По мере проведения измерений вносить данные по измерениям в БД
 - д. По мере расчетов неизвестные точки переводить в рассчитанные точки.

В ходе анализа разработанного единого подхода к решению геодезических задач и реализации программ были выработаны направления для дальнейших исследований.

1. Матрицы являются прямоугольными, но слабо заполненные. Имеют много нулей. Такие матрицы свои особенности плохой обусловленности.
 - а. Это требует дополнительного изучения свойств таких матриц. Изучения специфичных критериев плохой обусловленности таких матриц. Подбор специальных методов решения таких систем в случае плохой обусловленности.
 - б. Выработка критериев – при каких условиях измерений формируются плохо обусловленные или вырожденные матрицы.
2. Разработка способов построения единой СЛАУ при смешанных измерениях – наличия одновременно и угловых и дистанционных

измерений на одну неизвестную точку. Изучения свойств и особенностей таких матриц.

3. В общем случае измерения не являются неоднородными. Необходимо разработать методики формирования СЛАУ с учетом неоднородности измерений – увеличивать вклад в формирование рассчитываемых координат более точных измерений, и снижать вес менее точных.

Примеры численных расчетов для предложенных методов.

Как численный пример решения задачи с угловыми измерениями приведем следующее. Пусть заданы две известные пространственные точки $X_1 = (100, 0, 100)^T$, $X_2 = (25, -56.699, 8.579)^T$, а измеренные пары углов горизонтальный и вертикальный $(\alpha_1, \beta_1) = (60^\circ, 45^\circ)$ для первой точки X_1 и $(\alpha_2, \beta_2) = (45^\circ, 45^\circ)$. Векторы направлений будут равны¹ $P_1 = (0.354, 0.612, 0.707)^T$, $P_2 = (0.5, 0.5, 0.707)^T$, а матрица системы и вектор правой части, сформированные по *Варианту 1*, будут равны:

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} -0.354 & 0.5 \\ -0.612 & 0.5 \\ 0.707 & 0.707 \end{vmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{vmatrix} 75 \\ 56.699 \\ 91.421 \end{vmatrix}.$$

Решив полученную систему, получим $\bar{D} = (70.711, 200)$.

Составив систему уравнений по формуле (8) (решение по *Варианту 2*), получим матрицу системы и вектор правой части равные:

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} 1 & -0.983 \\ -0.983 & 1 \end{vmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{vmatrix} -125.882 \\ 130.494 \end{vmatrix}.$$

Решение такой системы $\bar{D} = (70.711, 200)$ совпадает с решением по *Варианту 1* с точностью до 10^{-12} .

Подставив эти два значения в выражение (1), для обоих вариантов получили четыре оценки координат неизвестной точки \bar{X}_z :

¹ Значения указаны с точностью до третьего знака.

$X_Z^{(1,2,3,4)} = (125, 43.301, 150)^T$, близкие к координатам тестовой неизвестной точки X_Z . В качестве неизвестной задавалась точка с координатами $X_Z = (125, 43.301, 150)$. Максимальное уклонение найденных оценочных значений от тестовой точки для *Варианта 1* равно $3.22 \cdot 10^{-13}$, а для *Варианта 2* – $3.059 \cdot 10^{-11}$. То есть отклонение сравнимо с машинной точностью вычислений.

В примере решения задачи для более двух известных точек были взяты четыре точки: $X_1 = (100, 0, 100)^T$, $X_2 = (200, 0, 000)^T$, $X_3 = (25, -56.699, 8.579)^T$, $X_4 = (150, 0, 100)^T$, а измеренные пары углов горизонтальный и вертикальный $(\alpha_1, \beta_1) = (60^\circ, 45^\circ)$ для первой точки X_1 , и $(\alpha_2, \beta_2) = (150^\circ, 30^\circ)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (45^\circ, 45^\circ)$, $(\alpha_4, \beta_4) = (120^\circ, 45^\circ)$, соответственно, для остальных точек. В таком случае векторы направлений P_i получились равные: $P_1 = (0.354, 0.612, 0.707)^T$, $P_2 = (-0.75, 0.433, 0.5)^T$, $P_3 = (0.5, 0.5, 0.707)^T$, $P_4 = (-0.354, 0.612, 0.707)^T$. Были также составлены системы уравнений для первого варианта и второго, и найдены оценки \bar{X}_Z для каждого решения близкие к исходной точке X_Z . Длина вектора уклонения решения сравнима с точностью вычислений: $|\bar{X}_Z - X_Z| < 10^{-12}$.

Обусловленность матриц в данных примерах равна 3.2. При внесении погрешности одного из измерений, например, $(\alpha_1, \beta_1) = (60^\circ, 45^\circ 5'')$ получили, что найденное значение искомой точки сместилось на величину $\Delta \approx 0.001$. А уклонение точки на дуге в $5''$ на окружности с радиусом 70.7 равно примерно 0.6. То есть комплексный учет нескольких измерений и хорошо обусловленная матрица снижают погрешность вычислений координат неизвестной точки.

В качестве демонстрационного примера решения задачи с дистанционными измерениями были взяты четыре точки: $X_1 = (0, 0, 0)^T$, $X_2 = (100, 0, 0)^T$, $X_3 = (0, 100, 0)^T$, $X_4 = (0, 0, 100)^T$, а измеренные дистанции $R_1 = 75$, $R_2 = 125$, $R_3 = 125$, $R_4 = 25$ соответственно. Была составлена СЛАУ, и

найденa оценка \bar{X}_z близкая к тестовой искомой точке X_z . Длина вектора уклонения решения сравнима с точностью вычислений: $|\bar{X}_z - X_z| < 10^{-12}$.

5 Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение

Цель раздела – комплексное описание и анализ финансово-экономических аспектов выполненной работы. Необходимо оценить полные денежные затраты на проект, а также дать хотя бы приближенную экономическую оценку результатов ее внедрения. Это в свою очередь позволит с помощью традиционных показателей эффективности инвестиций оценить экономическую целесообразность осуществления работы.

5.1 Организация и планирование работ

При организации процесса реализации конкретного проекта необходимо рационально планировать занятость каждого из его участников и сроки проведения отдельных работ.

Полный перечень проводимых работ, определение их исполнители и рациональная продолжительность приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Перечень работ и продолжительность их выполнения

Этапы работы	Исполнители	Загрузка исполнителей
Постановка целей и задач, получение исходных данных	НР	НР – 100%
Составление и утверждение ТЗ	НР, И	НР – 80% И – 20%
Подбор и изучение материалов по тематике	НР, И	НР – 30% И – 100%

Продолжение таблицы 5.1

Разработка календарного плана	НР, И	НР – 100% И – 20%
Обсуждение литературы	НР, И	НР – 30% И – 100%
Выбор среды реализации системы	НР, И	НР – 100% И – 70%
Выбор методов моделирования экспертной оценки	НР, И	НР – 100% И – 80%
Проведение моделирования методов экспертной оценки и разработка системы	И	И – 100%
Оформление расчетно-пояснительной записки	И	И – 100%
Оформление графического материала	И	И – 100%
Подведение итогов	НР, И	НР – 60% И – 100%

5.1.1 Продолжительность этапов работ

Для того что бы рассчитать продолжительности выполнения работ необходимо для начала определить минимальную и максимальную продолжительность работы в днях. Данные приведены в таблице 5.2.

Для определения ожидаемого (среднего) значения трудоемкости работ $t_{ож}$ используется следующая формула (5.1):

$$t_{ож} = \frac{3*t_{min}+2*t_{max}}{5}, \quad (5.1)$$

где t_{min} – минимальная продолжительность работы, дн.;

t_{max} – максимальная продолжительность работы, дн.;

Для выполнения перечисленных в таблице 5.1 работ требуются специалисты:

- Математик-программист – в его роли действует исполнитель НИР (ВКР);
- научный руководитель.

Для построения линейного графика необходимо рассчитать длительность этапов в рабочих днях, а затем перевести ее в календарные дни. Расчет продолжительности выполнения каждого этапа в рабочих днях ($T_{РД}$) ведется по формуле:

$$T_{РД} = \frac{t_{ож}}{K_{ВН}} \cdot K_{Д} \quad (5.2)$$

где $t_{ож}$ – продолжительность работы, дн.;

$K_{ВН}$ – коэффициент выполнения работ, учитывающий влияние внешних факторов на соблюдение предварительно определенных длительностей ($K_{ВН} = 1$);

$K_{Д}$ – коэффициент, учитывающий дополнительное время на компенсацию непредвиденных задержек и согласование работ ($K_{Д} = 1,2$).

Расчет продолжительности этапа в календарных днях ведется по формуле:

$$T_{КД} = T_{РД} \cdot T_{К} \quad (5.3)$$

где $T_{КД}$ – продолжительность выполнения этапа в календарных днях;

$T_{К}$ – коэффициент календарности, позволяющий перейти от длительности работ в рабочих днях к их аналогам в календарных днях ($T_{К} = 1,205$)

Результаты представим в таблице 5.2. По полученным данным построим линейный график выполнения работ на весь период ВКР, представленный в таблице 5.3.

Таблица 5.2 – Трудозатраты на выполнение проекта

Этап	Исполнители	Продолжительность работ, дни			Трудоемкость работ по исполнителям чел.- дн.			
		t_{min}	t_{max}	$t_{ож}$	$T_{РД}$		$T_{КД}$	
					НР	И	НР	И
Постановка целей и задач, получение исходных данных	НР	2	4	2,8	3.36	-	4.05	-
Составление и утверждение ТЗ	НР, И	2	3	2,4	2.30	0.58	2.78	0.69
Подбор и изучение материалов по тематике	НР, И	8	12	9,6	3.46	11.52	4.16	13.88
Разработка календарного плана	НР, И	2	4	2,8	3.36	0.67	4.05	0.81
Обсуждение литературы	НР, И	3	6	4,2	1.51	5.04	1.82	6.07
Выбор среды реализации программы	НР, И	7	10	8.2	9.84	6.89	11.86	8.30
Выработка единого подхода к решению различных задач геодезии	НР, И	10	15	12	14.4	11.52	17.35	13.88
Разработка программного приложения	И	9	15	11,4	-	13.68	-	16.48

Продолжение таблицы 5 .2

Оформление расчетно- пояснительной записки	И	5	8	6,2	-	7.44	-	8.97
Оформление графического материала	И	4	6	4,8	-	5.76	-	6.94
Подведение итогов	НР, И	3	5	3,8	2.74	4.56	3.3	5.49
Итого:				111.2	40.97	67.66	49.37	81.53

Таблица 5.3 – Линейный график работ

Этап	НР	И	Февраль			Март			Апрель			Май		
			10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
1	4.05	-	■											
2	2.78	0.69	■	■										
3	4.16	13.88		■	■									
4	4.05	0.81			■									
5	1.82	6.07				■	■							
6	11.86	8.30					■	■						
7	17.35	13.88						■	■					
8	-	16.48							■	■				
9	-	8.97									■	■		
10	-	6.94											■	■
11	3.3	5.49												■

НР – ■; И – ■

5.1.2 Расчет накопления готовности проекта

С помощью полученной трудоемкости этапов в календарных днях рассчитаем степень готовности проекта. Показатели трудоемкости и степени завершенности для этапов в процентном соотношении приведем в таблице 5.4.

Введем обозначения:

- $TP_{\text{общ}}$ – общая трудоемкость проекта;
- TP_i (TP_k) – трудоемкость i -го (k -го) этапа проекта, $i = \overline{1, I}$;
- TP_i^H – накопленная трудоемкость i -го этапа проекта по его завершении;
- TP_{ij} (TP_{kj}) – трудоемкость работ, выполняемых j -м участником на i -м этапе,

здесь $j = \overline{1, m}$ – индекс исполнителя, в нашем примере $m = 2$.

Степень готовности определяется формулой (5.3)

$$CG_i = \frac{TP_i^H}{TP_{\text{общ}}} = \frac{\sum_{k=1}^i TP_k}{TP_{\text{общ}}} = \frac{\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^m TP_{km}}{\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^m TP_{km}}. \quad (5.4)$$

Таблица 5.4 – Нарастание технической готовности работы и удельный вес каждого этапа

Этап	TP_i , %	CG_i , %
Постановка задачи	3.09	3.09
Разработка и утверждение технического задания (ТЗ)	2.65	5.74
Подбор и изучение материалов по тематике	13.79	19.53
Разработка календарного плана	3.71	23.24
Обсуждение литературы	6.03	29.28
Выработка технология подбора весовых коэффициентов	15.40	44.68
Поиск единого подхода решения задач	23.86	68.54

Продолжение таблицы 5.4

Разработка программного приложения	12.59	81.13
Оформление расчетно-пояснительной записки	6.85	87.98
Оформление графического материала	5.30	93.28
Подведение итогов	6.72	100

5.2 Расчет сметы затрат на выполнение проекта

В состав затрат на создание проекта включается величина всех расходов, необходимых для реализации комплекса работ, составляющих содержание данной разработки. Расчет сметной стоимости ее выполнения производится по следующим статьям затрат:

- материалы и покупные изделия;
- заработная плата;
- социальный налог;
- расходы на электроэнергию (без освещения);
- амортизационные отчисления;
- командировочные расходы;
- оплата услуг связи;
- арендная плата за пользование имуществом;
- прочие услуги (сторонних организаций);
- прочие (накладные расходы) расходы.

5.2.1 Расчет затрат на материалы

К данной статье расходов относится стоимость материалов, покупных изделий, полуфабрикатов и других материальных ценностей, расходуемых непосредственно в процессе выполнения работ над объектом проектирования. Сюда же относятся специально приобретенное оборудование, инструменты и прочие объекты, относимые к основным средствам, стоимостью до 40 000 руб.

включительно. Цена материальных ресурсов определяется по соответствующим ценникам или договорам поставки. Сведем расходы по данному пункту в таблицу 5.5.

Таблица 5.5 – Расчет затрат на материалы

Наименование материалов	Цена за ед., руб.	Кол-во	Сумма, руб.
Бумага для принтера формата А4	190	1 уп.	190
Картридж для принтера	1550	1 шт.	1550
Итого:			1740

Допустим, что транспортно-заготовительные расходы (ТЗР) составляют 5 % от отпускной цены материалов, тогда расходы на материалы с учетом ТЗР равны $C_{\text{МАТ}} = 1740 * 1,05 = 1827$ руб.

5.2.2 Расчет заработной платы

Расчеты затрат на полную заработную плату приведены в таблице 5.6. Затраты времени по каждому исполнителю в рабочих днях с округлением до целого взяты из таблицы 5.2. Для учета в ее составе премий, дополнительной зарплаты и районной надбавки используется следующий ряд коэффициентов: $K_{\text{ПР}} = 1,1$; $K_{\text{доп.ЗП}} = 1,188$; $K_{\text{р}} = 1,3$. Таким образом, для перехода от тарифной (базовой) суммы заработка исполнителя, связанной с участием в проекте, к соответствующему полному заработку (зарплатной части сметы) необходимо первую умножить на интегральный коэффициент $K_{\text{И}} = 1,1 * 1,188 * 1,3 = 1,699$.

Таблица 5.6 – Затраты на заработную плату

Исполнитель	Оклад, руб./мес.	Среднедневная ставка, руб./раб.день	Затраты времени, раб.дни	Коэффициент	Фонд з/платы, руб.
НР	23 264,86	1124,45	41	1,699	78 328, 06
И	14584,32	704,88	67	1,699	81 029, 02
Итого:					159357,08

5.2.3 Расчет затрат на социальный налог

Затраты на единый социальный налог (ЕСН), включающий в себя отчисления в пенсионный фонд, на социальное и медицинское страхование, составляют 30 % от полной заработной платы по проекту, т.е.

$$C_{\text{соц}} = C_{\text{зп}} * 0,3 \quad (5.5)$$

Итак, в нашем случае $C_{\text{соц}} = 159357,08 * 0,3 = 47\,807,12$ руб.

5.2.4 Расчет затрат на электроэнергию

Данный вид расходов включает в себя затраты на электроэнергию, потраченную в ходе выполнения проекта на работу используемого оборудования, рассчитываемые по формуле:

$$C_{\text{эл.об.}} = P_{\text{об}} * t_{\text{об}} * Ц_{\text{э}} \quad (5.6)$$

где $P_{\text{об}}$ – мощность, потребляемая оборудованием, кВт;

$Ц_{\text{э}}$ – тариф на 1 кВт·час;

$t_{\text{об}}$ – время работы оборудования, час.

Для ТПУ $Ц_{\text{э}} = 5,257$ руб./кВт·час (с НДС).

Время работы оборудования вычисляется на основе итоговых данных таблицы 5.2 для инженера ($T_{\text{рд}}$) из расчета, что продолжительность рабочего дня равна 8 часов.

$$t_{\text{об}} = T_{\text{рд}} * K_t, \quad (5.7)$$

где $K_t = 0,8$.

Мощность, потребляемая оборудованием, определяется по формуле:

$$R_{\text{об}} = R_{\text{ном}} * K_c \quad (5.8)$$

где $R_{\text{ном}}$ – номинальная мощность оборудования, кВт;

$K_c = 1$.

Расчет затраты на электроэнергию для технологических целей приведен в таблице 5.7.

Таблица 5.7 – Затраты на электроэнергию технологическую

Наименование оборудования	Время работы оборудования $t_{ОБ}$, час	Потребляемая мощность $R_{ОБ}$, кВт	Затраты $\Delta_{ОБ}$, руб.
Персональный компьютер	640*0,8	0,4	1 076,63
Струйный принтер	20	0,2	21,028
Итого:			1 097,658

5.2.5 Расчет амортизационных расходов

В статье «Амортизационные отчисления» рассчитывается амортизация используемого оборудования за время выполнения проекта.

Используется формула:

$$C_{AM} = \frac{H_A * C_{ОБ} * t_{рф} * n}{F_D} \quad (5.9)$$

где H_A – годовая норма амортизации единицы оборудования ($H_A = 0,4$);

$C_{ОБ}$ – балансовая стоимость единицы оборудования с учетом ТЗР;

F_D – действительный годовой фонд времени работы соответствующего оборудования, берется из специальных справочников или фактического режима его использования в текущем календарном году ($F_D = 298 * 8 = 2384$ часа);

$t_{рф}$ – фактическое время работы оборудования в ходе выполнения проекта, учитывается исполнителем проекта;

n – число задействованных однотипных единиц оборудования.

Для нашего проекта это:

Стоимость ПК 50000 руб., время использования 640 часа, тогда для него

$$C_{AM}(ПК) = (0,4 * 50000 * 640 * 1) / 2384 = 5\,369,13 \text{ руб.}$$

Стоимость принтера 12000 руб., его $F_D = 500$ час.; $H_A = 0,5$; тогда его

$$C_{AM}(Пр) = (0,5 * 12000 * 30 * 1) / 500 = 360 \text{ руб.}$$

Итого начислено амортизации 5 729,13 руб.

5.2.6 Расчет расходов, учитываемых непосредственно на основе платежных (расчетных) документов (кроме суточных)

За время выполнения ВКР в командировке не находился, помещение не арендовал, звонки не производил, к сторонним организациям не обращался. По этому в этом расчете устанавливаем сумму, равную 0 руб.

5.2.7 Расчет прочих расходов

В статье «Прочие расходы» отражены расходы на выполнение проекта, которые не учтены в предыдущих статьях, их следует принять равными 10% от суммы всех предыдущих расходов, т.е.

$$C_{\text{ПРОЧ}} = (C_{\text{МАТ}} + C_{\text{ЗП}} + C_{\text{СОЦ}} + C_{\text{ЭЛ.ОБ}} + C_{\text{АМ}} + C_{\text{НР}}) \cdot 0,1$$

Для нашего проекта это

$$C_{\text{ПРОЧ}} = (1\ 827 + 159\ 357,08 + 47\ 807,12 + 1\ 097,658 + 5\ 729,13 + 0) \cdot 0,1 = 21\ 581,8 \text{ руб.}$$

5.2.8 Расчет общей себестоимости разработки

Проведя расчет по всем статьям сметы затрат на разработку, можно определить общую себестоимость проекта «Макет демонстрационной модели принципов КТ».

Таблица 5.8 – Смета затрат на разработку проекта

Статья затрат	Условное обозначение	Сумма, руб.
Материалы и покупные изделия	$C_{\text{МАТ}}$	1 827
Основная заработная плата	$C_{\text{ЗП}}$	159 357,08
Отчисления в социальные фонды	$C_{\text{СОЦ}}$	47 807,12
Расходы на электроэнергию	$C_{\text{ЭЛ.ОБ}}$	1 097,66
Амортизационные отчисления	$C_{\text{АМ}}$	5 729,13
Непосредственно учитываемые расходы	$C_{\text{НР}}$	0
Прочие расходы	$C_{\text{ПРОЧ}}$	21 581,8
Итого:		237 399,79

Таким образом, затраты на разработку составили $C = 237\,399,79$ руб.

5.2.9 Расчет прибыли

Рассчитаем прибыль как 20% от полной себестоимости проекта. В нашем случае она составляет 47 479,96 руб. от расходов на разработку проекта.

5.2.10 Расчет НДС

НДС составляет 18% от суммы затрат на разработку и прибыли. В нашем проекте это $(237\,399,79 + 47\,479,96) * 0,18 = 51\,278,36$ руб.

5.2.11 Цена разработки НИР

Цена равна сумме полной себестоимости, прибыли и НДС, в нашем проекте это

$$C_{\text{НИР(КР)}} = 237\,399,79 + 47\,479,96 + 51\,278,36 = 336\,158,11 \text{ руб.}$$

5.3 Оценка экономической эффективности проекта

В зависимости от того, в какой сфере и форме проявляется эффект различают следующие его виды: бюджетный, народнохозяйственный, коммерческий.

Реализуемым проектом является обработка геодезических данных.

Данный проект предполагает получение народнохозяйственного эффекта. Внедрение единого подхода решения задач повысит результативность процесса обработки данных: обеспечивается более высокое качество полученных измерений из-за дополнительной их обработки, называемой уравнительными вычислениями. Ускоряется процесс обработки геодезических данных, уменьшается риск возникновения ошибок при обработке результатов.

5.4 Оценка научно-технического уровня НИР

Научно-технический уровень характеризует влияние проекта на уровень и динамику обеспечения научно-технического прогресса в данной области. Для оценки научной ценности, технической значимости и эффективности, планируемых и выполняемых НИР, используется метод балльных оценок. Балльная оценка заключается в том, что каждому фактору по принятой шкале присваивается определенное количество баллов. Обобщенную оценку проводят

по сумме баллов по всем показателям. На ее основе делается вывод о целесообразности НИР.

Сущность метода заключается в том, что на основе оценок признаков работы определяется интегральный показатель (индекс) ее научно-технического уровня по формуле:

$$I_{НТУ} = \sum_{i=1}^3 R_i \cdot n_i, \quad (5.10)$$

где $I_{НТУ}$ – интегральный индекс научно-технического уровня;

R_i – весовой коэффициент i -го признака научно-технического эффекта;

n_i – количественная оценка i -го признака научно-технического эффекта, в баллах.

Таблица 5.9 – Весовые коэффициенты признаков НТУ

Признаки научно-технического эффекта НИР	Характеристика признака НИР	R_i
Уровень новизны	Систематизируются и обобщаются сведения, определяются пути дальнейших исследований	00,4
Теоретический уровень	Разработка способа (алгоритм, программа мероприятий, устройство, вещество и т.п.)	00,1
Возможность реализации	Время реализации в течение первых лет	00,5

Таблица 5.10 – Баллы для оценки уровня новизны

Уровень новизны	Характеристика уровня новизны – n_1	Баллы
Принципиально новая	Новое направление в науке и технике, новые факты и закономерности, новая теория, вещество, способ	8 – 10
Новая	По-новому объясняются те же факты, закономерности, новые понятия дополняют ранее полученные результаты	5 – 7

Относительно новая	Систематизируются, обобщаются имеющиеся сведения, новые связи между известными факторами	2 – 4
Не обладает новизной	Результат, который ранее был известен	0

Таблица 5.11 – Баллы значимости теоретических уровней

Теоретический уровень полученных результатов – n_2	Баллы
Установка закона, разработка новой теории	10
Глубокая разработка проблемы, многоспектральный анализ взаимодействия между факторами с наличием объяснений	8
Разработка способа (алгоритм, программа и т. д.)	6
Элементарный анализ связей между фактами (наличие гипотезы, объяснения версии, практических рекомендаций)	2
Описание отдельных элементарных факторов, изложение наблюдений, опыта, результатов измерений	0,5

Таблица 5.12 – Возможность реализации результатов по времени

Время реализации – n_3	Баллы
В течение первых лет	10
От 5 до 10 лет	4
Свыше 10 лет	2

В таблице 5.13 указано соответствие качественных уровней НИР значениям показателя, рассчитываемого по формуле 5.10.

Таблица 5.13 – Качественные уровни НИР

Уровень НТЭ	Показатель НТЭ
Низкий	1-4
Средний	4-7
Высокий	8-10

Для используемого в пособии примера частные оценки уровня n_i и их краткое обоснование даны в таблице 5.14.

Таблица 5.14 – Оценки научно-технического уровня НИР

Значимость	Фактор НТУ	Уровень фактора	Выбранный балл	Обоснование выбранного балла
0,4	Уровень новизны	Новая	5	Позволяет реализовать и апробировать новые алгоритмы
0,1	Теоретический уровень	Разработка способа	6	Разработка единого подхода решения задач
0,5	Возможность реализации	В течение первых лет	10	Быстрое внедрение и переход к эксплуатации

Отсюда интегральный показатель научно-технического уровня для нашего проекта составляет:

$$I_{\text{НТУ}} = 0,4 \cdot 5 + 0,1 \cdot 6 + 0,5 \cdot 10 = 7,6$$

Таким образом, исходя из данных таблицы 5.13, данный проект имеет высокий уровень научно-технического эффекта.

6 Социальная ответственность

Выпускная квалификационная работа заключалась в исследовании унификации решения задач геодезии и маркшейдерии. Область применения: обработка геодезических данных в промышленных масштабах.

Основными средствами для выполнения дипломного проекта являлись персональный компьютер, локальная вычислительная сеть с выходом в Интернет.

В ходе работы над разделом произведен комплекс мероприятий технического, организационного, режимного и правового характера, минимизирующих негативные последствия.

6.1 Производственная безопасность

При изучении унификации задач геодезии и маркшейдерии на исследователя оказывают действие следующие вредные и опасные производственные факторы, указанные в таблице 6.1:

Таблица 6.1 – Вредные и опасные факторы при исследовании унификации задач геодезии и маркшейдерии на ЭВМ

Источник фактора, наименование видов работ	Факторы (по ГОСТ 12.003-74) [28]		Нормативные документы
	Вредные	Опасные	
Работа за ПК	1. Отклонение параметров микроклимата; 2. Недостаточная освещенность; 3. Повышенный уровень шума; 4. Повышенный уровень электромагнитных и ионизирующих излучений.	Поражение электрическим током.	Параметры микроклимата устанавливаются СанПиН 2.2.4-548-96 [29]. Параметры освещенности устанавливаются СП 52.13330.2011 [30]. Параметры уровня шума устанавливаются СН 2.2.4/2.1.8.562-96 [31]. Параметры уровня электромагнитных излучений устанавливаются СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 [32].

6.1.1 Анализ вредных и опасных факторов, которые могут возникнуть на рабочем месте при проведении исследований

Отклонение параметров микроклимата.

В помещениях, где установлены компьютеры, должны соблюдаться определенные параметры микроклимата. Эти нормы устанавливаются в зависимости от времени года, характера трудового процесса и характера производственного помещения. Работа математика – программиста относится к категории работ Ia, в которую входят работы с интенсивностью энергозатрат до 139Вт, производимые сидя и сопровождающиеся незначительным физическим напряжением. Оптимальные параметры микроклимата для этой категории работ приведены в таблице 6.2 [2].

Таблица 6.2 – Параметры микроклимата для проведения исследований

Период	Параметр микроклимата	Величина
Холодный	Температура воздуха в помещении	22 – 24 °С
	Относительная влажность	40 – 60 %
	Скорость движения воздуха	до 0,1 м/с
Тёплый	Температура воздуха в помещении	23 – 25 °С
	Относительная влажность	40 – 60 %
	Скорость движения воздуха	0,1 – 0,2 м/с

В рабочем помещении поддержание параметров микроклимата обеспечивается отоплением и кондиционированием.

Недостаточная освещённость

Согласно [33] требования к освещенности при проведении исследований унификации решения задач, следующие: при выполнении зрительных работ высокой точности общая освещенность должна составлять 300 лк, а комбинированная – 750 лк; аналогичные требования при выполнении работ средней точности – 200 и 300 лк соответственно.

Основным гигиеническим требованием является достаточно равномерная освещенность всего поля зрения. То есть уровень освещенности помещения и яркость экрана монитора должны быть соотносимы: яркий свет в

районе периферийного зрения повышает напряженность глаз и приводит к утомляемости.

Существует три вида освещения – естественное солнечное освещение, искусственное и комбинированное.

В помещении, где находятся рабочие места с ЭВМ, должно использоваться комбинированное освещение, т.е. сочетание естественного и искусственного освещения. В качестве естественного освещения выступает освещение через окна. Искусственное освещение используется при недостаточном естественном освещении.

Существует четыре вида искусственного освещения – общее, местное, комбинированное и аварийное.

В помещении используется общее освещение, где происходит равномерное распределение света по всей площади. Это достигается соблюдением одинакового расстояния между светильниками, которые равномерно рассеяны.

В осветительных установках кабинета ИВТ (информатики и вычислительной техники) должна быть использована система общего освещения, выполненная потолочными или подвесными люминесцентными лампами, равномерно размещенными по потолку. В качестве источников света рекомендуется использовать люминесцентные лампы мощностью 40Вт, 58Вт или энергоэкономичные мощностью 36Вт типа ЛБ (белого света), ЛХБ (холодного-белого цвета) как наиболее эффективные и приемлемые с точки зрения спектрального состава. [32]

Повышенный уровень шума

Шум ухудшает условия труда, оказывая вредное действие на организм человека. Работающие в условиях длительного шумового воздействия испытывают раздражительность, головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость, понижение аппетита, боли в ушах и т. д. Такие нарушения в работе ряда органов и систем организма человека могут

вызвать негативные изменения в эмоциональном состоянии человека вплоть до стрессовых.

Уровень шума на рабочем месте математиков – программистов не должен превышать 50 дБА. Для снижения уровня шума стены и потолок помещений, где установлены компьютеры, могут быть облицованы звукопоглощающими материалами.

Повышенный уровень электромагнитных излучений

При работе с компьютером допустимые уровни электромагнитных полей (ЭМП) указаны в таблице 6.3 [32].

Таблица 6.3 – Временные допустимые уровни ЭМП, создаваемых ПЭВМ

Наименование параметров		ВДУ ЭМП
Напряженность электрического поля	в диапазоне частот 5 Гц – 2 кГц	25 В/м
	в диапазоне частот 2 кГц – 400 кГц	2,5 В/м
Плотность магнитного потока	в диапазоне частот 5 Гц – 2 кГц	250 нТл
	в диапазоне частот 2 кГц – 400 кГц	25 нТл
Поверхностный электростатический потенциал экрана видеомонитора		500 В

Первые симптомы воздействия электромагнитного поля на человека:

- утомляемость,
- раздражительность,
- нарушения сна,
- нарушения памяти и внимания.

Для снижения воздействия этих видов излучения рекомендуется применять мониторы с пониженным уровнем излучения (жидкокристаллические мониторы) (согласно стандартам на эргономичность и безопасность электронного оборудования ТСО), а также соблюдать регламентированные режимы труда и отдыха.

6.1.2 Анализ опасных факторов при проведении исследований

Основным опасным фактором является опасность поражения электрическим током.

В помещении подавляющая часть электрической проводки является скрытой. Поражение электрическим током возможно только при возникновении оголенных участков на кабеле, а также нарушении изоляции распределительных устройств, однако кабель имеет двойную изоляцию, поэтому опасность поражения значительно снижается. Не исключается также опасность поражения и от токоведущих частей компьютера в случае их пробоя и нарушении изоляции.

Для защиты людей от поражения электрическим током при повреждении изоляции должна быть применена, по крайней мере, одна из следующих защитных мер: заземление, зануление, защитное отключение, двойная изоляция, выравнивание потенциалов.

Так же для организации безопасной работы проводятся обучение и инструктаж по безопасности труда.

6.2 Экологическая безопасность

В ходе деятельности по разработке и исследованию унификации задач возникает необходимость утилизировать бумажные отходы и использованные картриджи от принтеров. Бумажные отходы должны передаваться в соответствующие организации для дальнейшей переработки во вторичные бумажные изделия. Неисправные комплектующие персональных компьютеров и картриджи должны передаваться либо организациям, осуществляющим вывоз и уничтожение бытовых и производственных отходов, либо организациям, занимающимся переработкой отходов.

6.3 Безопасность в чрезвычайных ситуациях

Существует 3 типа возможных источников чрезвычайных ситуаций:

- природного характера;
- техногенного характера;

- биолого-социального.

Наиболее вероятной ЧС при разработке и проведении исследований является пожар.

Одно из условий обеспечения пожаробезопасности любого производственного процесса – ликвидация возможных источников воспламенения. Источниками воспламенения могут быть: неисправности электропроводки, розеток и выключателей которые могут привести к короткому замыканию или пробоем изоляции; использование поврежденных (неисправных) электроприборов; использование в помещении электронагревательных приборов с открытыми нагревательными элементами; возникновение пожара вследствие попадания молнии в здание; неаккуратное обращение с огнем и несоблюдение мер пожарной безопасности.

Для исключения возникновения пожара по этим причинам необходимо:

- вовремя выявлять и устранять неисправности;
- своевременный ремонт электроприборов, качественное исправление поломок, не использование неисправных электроприборов;
- не использовать открытые обогревательные приборы, приборы кустарного производства в помещении лаборатории;
- определить порядок и сроки прохождения противопожарного инструктажа и занятий по пожарно-техническому минимуму, а также назначить ответственного за их проведения.

В случае возникновения пожара необходимо отключить электропитание, вызвать по телефону пожарную команду, эвакуировать людей из помещения и приступить к ликвидации пожара огнетушителями. При наличии небольшого очага пламени можно воспользоваться подручными средствами с целью прекращения доступа воздуха к объекту возгорания.

Для тушения пожаров в помещении должен быть установлен углекислотный огнетушитель типа ОУ-2, который предназначен для тушения различных материалов и электроустановок под напряжением, обладает высокой эффективностью борьбы с огнем.

Чрезвычайная ситуация природного характера

В случае быстрого таяния снега весной из-за неисправности гидротехнических сооружений может создаваться угроза массового разрушения прудов – накопителей, отстойников промышленных отходов и водохранилищ.

Предупредить о наводнении может сигнал «Внимание всем!» передаваемый сиренами, гудками предприятий и транспортных средств.

Действия работников при заблаговременном оповещении о наводнении:

Получив оповещение, руководители структурных подразделений и формирования ГО, рабочие и служащие организации принимают участие по предупреждению или максимальному снижению ущерба от наводнений:

- проводят мероприятия по защите производственных зданий и производственного оборудования от затопления; роют отводные каналы, возводят защитные валы, используя мешки с песком;
- герметизируют подвальные помещения;
- заделывают окна и двери на первых этажах, спасают материальные ценности, производственное оборудование, а при необходимости и вывозят их в безопасные места;
- приводят в готовность водоотливные средства (мотопомпы, насосы и т.п.);
- проводят работы по защите материальных ценностей, в зависимости от обстановки, для чего заделывают приямки, входы и оконные проемы подвалов и нижних этажей зданий;
- усиливают наблюдение за повышением уровня воды и ведут метеонаблюдение;
- осуществляют контроль за выполнением персоналом объекта установленного режима поведения и поддержания порядка;
- организуют охрану государственной собственности и личного имущества граждан;

- обеспечивают соблюдение режима допуска людей и транспорта к местам проведения спасательных работ;
- пополняют запасы медикаментов для оказания помощи при наводнении.

В зависимости от сложившейся обстановки персонал организации будет эвакуирован специально выделенным для этих целей транспортом или в пешем порядке.

Действия людей после спада воды в помещении:

После спада воды следует остерегаться порванных и провисших электрических проводов. Попавшие в воду продукты и запасы питьевой воды перед употреблением должны быть проверены представителями санитарной инспекции. Перед входом в производственные здания (помещения) после наводнения следует убедиться, что его конструкции не претерпели явных разрушений и не представляют опасности. Затем необходимо проветрить помещения, открыв входные двери и окна. Кроме того, требуется убрать мусор и избыточную влагу. При осмотре помещений не рекомендуется применять спички или светильники в качестве источника света из-за возможного присутствия газа в воздухе; для этих целей следует использовать электрические фонари на батарейках.

До проверки специалистами состояния электрической сети запрещается пользоваться источниками электроэнергии для освещения или иных нужд.

6.4 Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности

6.4.1 Эргономические требования к рабочему месту

Для комфортной работы стол при проведении исследований должен удовлетворять следующим условиям [32]:

- высота стола должна быть выбрана с учетом возможности сидеть свободно, в удобной позе, при необходимости опираясь на подлокотники;

- нижняя часть стола должна быть сконструирована так, чтобы программист мог удобно сидеть, не был вынужден поджимать ноги;
- поверхность стола должна обладать свойствами, исключающими появление бликов в поле зрения программиста;
- конструкция стола должна предусматривать наличие выдвижных ящичков.
- высота рабочей поверхности рекомендуется в пределах 680 –760мм. Высота поверхности, на которую устанавливается клавиатура, должна быть около 650мм.

Большое значение придается характеристикам рабочего кресла. Так, рекомендуемая высота сиденья над уровнем пола находится в пределах 420 – 550 мм. Поверхность сиденья мягкая, передний край закругленный, а угол наклона спинки - регулируемый.

Положение экрана определяется:

- расстоянием считывания (0,6...0,7 м);
- углом считывания, направлением взгляда на 20° ниже горизонтали к центру экрана, причем экран перпендикулярен этому направлению.

Должна также предусматриваться возможность регулирования экрана:

- по высоте +3 см;
- по наклону от -10° до +20° относительно вертикали;
- в левом и правом направлениях.

Существенное значение для производительной и качественной работы на компьютере имеют размеры знаков, плотность их размещения, контраст и соотношение яркостей символов и фона экрана. Если расстояние от глаз оператора до экрана дисплея составляет 60 – 80 см, то высота знака должна быть не менее 3 мм, оптимальное соотношение ширины и высоты знака составляет 3:4, а расстояние между знаками – 15 – 20% их высоты. Соотношение яркости фона экрана и символов – от 1:2 до 1:15 [5].

Создание благоприятных условий труда и правильное эстетическое оформление рабочих мест на производстве имеет большое значение как для облегчения труда, так и для повышения его привлекательности, положительно влияющей на производительность труда.

6.4.2 Режим труда

Как уже было неоднократно отмечено, при работе с персональным компьютером очень важную роль играет соблюдение правильного режима труда и отдыха. В противном случае у исследователя отмечаются значительное напряжение зрительного аппарата с появлением жалоб на неудовлетворенность работой, головные боли, раздражительность, нарушение сна, усталость и болезненные ощущения в глазах, в пояснице, в области шеи и руках.

Длительность перерывов в работе: 5 минут через 1 час работы на дисплее. Во время перерыва следует производить физические упражнения с растяжением мышц спины и рук.

Заключение

В результате выполнения магистерской диссертации в основной части:

- рассмотрены задачи, возникающие при обработке геодезических данных – угловых и дистанционных измерений;
- предложены алгоритмы единого подхода к решению типовых геодезических задач;
- предложены несколько вариантов формирования СЛАУ;
- для случая с двумя угловыми измерениями найдено аналитическое решение;
- показано, что такие СЛАУ могут формироваться автоматически программными средствами;
- показано, что на точность измерений влияют погрешности данных измерений, обусловленность матриц и свойства разреженных матриц;
- спроектирована структура файлов для хранения исходных и расчетных данных;
- реализованы алгоритмы решения геодезических задач с помощью предложенного подхода как в математическом пакете;
- смоделирована работа геодезиста в части выполнения расчетов по средствам программы; построены диаграммы на унифицированном языке моделирования;
- спроектирована и разработана программа на языке высокого уровня.

В разделе «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение», подтверждается, что данный проект предполагает получение народнохозяйственного эффекта. Внедрение единого подхода решения задач повысит результативность процесса обработки данных: обеспечивается более высокое качество полученных измерений из-за дополнительной их обработки, называемой уравнительными вычислениями.

Ускоряется процесс обработки геодезических данных, уменьшается риск возникновения ошибок при обработке результатов.

В разделе «Социальная ответственность» были изложены требования к рабочему месту математика-программиста, выполняющего работу. Созданные условия должны обеспечивать комфортную работу. На основании изученной литературы по данной проблеме были указаны оптимальное расположение элементов рабочего места. Соблюдение вышеуказанных условий позволит сохранить хорошую работоспособность и производительность труда программиста.

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- а) XI Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2013.
- б) XII Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2014.
- в) XIII Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2015.
- г) III Международная конференция «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине». – Томск: ТПУ, 2016.

Список публикаций

1. Сергеева Ю.С. Маркшейдерия // Сборник трудов XI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2013. – С.113-115.
2. Сергеева Ю.С. Реализация алгоритмов обработки геодезических данных // Сборник трудов XII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2014. – С.208-209.
3. Сергеева Ю.С. Исследование унификации решения задач геодезии и маркшейдерии // Сборник трудов XIII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: ТПУ, 2015.
4. Сергеева Ю.С. Реализация алгоритмов обработки геодезических данных // Сборник научных трудов III Международной конференции «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине». – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2016. – 249 с.

Список использованных источников

1. Попов В.Н., Букринский В.А. Геодезия и маркшейдерия. – М.: изд-во «Горная книга», 2007. – 453 с.
2. Пучков Л.А. Маркшейдерская энциклопедия. – М.: Мир горной книги, 2006. – 605 с.
3. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Академический проект, 2010. – 247 с.
4. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
5. Зданович В.Г. Высшая геодезия. – М.: Недра, 1970. – 512 с.
6. Нестеренок М.С. Геодезия. – Минск, 2008. – 296 с.
7. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
8. Медведев П.А. Теория и методология повышения эффективности и точности решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида и в пространстве – Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat, 2010 – Режим доступа: <http://www.dissercat.com/content/teoriya-i-metodologiya-povysheniya-effektivnosti-i-tochnosti-resheniya-glavnykh-geodezicheskikh-izmereniy> – свободный
9. Основы геодезических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.2vg.ru/geologiya_gidrologiya_i_geodeziya/osnovy_geodezicheskikh_izmerenij_i4.html, свободный
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2004. – 280 с.
11. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 840 с.
12. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 349 с.

13. Погрешности вычислений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://pandia.ru/text/78/403/78506.php>, свободный
14. Статистическое оценивание. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9D%D0%B5%D1%81%D0%BC%D0%B5%D1%89%D1%91%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C>, свободный
15. Цей Р., Шумафов М. Число обусловленности матрицы как показатель устойчивости при решении прикладных задач. – Труды ФОРА, 2011. – 7с.
16. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 191 с.
17. Задача Потенота [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B0, свободный ресурс
18. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное издание. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
19. Амосов А.А. Численные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
20. Глинский С.П., Гречанинова Г.И., Данилевич В.М. Геодезия. – М.: «Картгеоцентр» – «Геодезиздат», 1995. – 488 с.
21. Мурашкина Т.И., Мещеряков В.А., Бадеева Е.А. и др. Теория измерений. – М.: Высш.шк., 2007. – 151 с.
22. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений : пер. с англ. / Т. Павлидис. – М.: Радио и связь, 1986. – 399 с.
23. Роджерс Д. Математические основы машинной графики : пер. с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
24. Применение маркшейдерии. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.trimble-ts635.ru/Mark>, свободный
25. Mathcad [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathcad>, свободный

26. Визуальная среда математического моделирования MathCAD [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://bourabai.ru/einf/mathcad/>, свободный
27. Мудров В. И., Кушко В. Л., Метод наименьших модулей. – М.: Знание, 1971. – 64 с.
28. ГОСТ 12.0.003-74. ССБТ. Опасные и вредные производственные факторы. Классификация.
29. СанПиН 2.2.548-96. Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений.
30. СП 52.13330.2011 Естественное и искусственное освещение.
31. СН 2.2.4/2.1.8.562–96. Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории застройки.
32. СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы «Гигиенические требования к персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы». – М.: Госкомсанэпиднадзор, 2003.
33. СНиП 23-05-95 Нормы освещенности помещений.

Приложение А
(обязательное)

Раздел 2
Объект и методы исследования (Object and methods of research)
Английский язык

Студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8БМ41	Сергеева Юлия Сергеевна		

Консультант кафедры ПМ:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент	Вылегжанин О.Н.	к.х.н		

Консультант – лингвист кафедры Английского языка (ИЯИК):

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
зав. каф. иностранных языков	Сидоренко Т.В.	к.п.н		

Sparse Matrices

Matrix, which has an insignificant share of non-zero elements, referred to as sparse. In practice, the matrix size $n * n$ can be considered sparse if the amount of its nonzero elements of the order n . Sparse matrix A is often associated with the system of linear equations $Ax = b$, where x and b are column vectors of order n [16].

A more popular method of solving the system of equations

$$Ax = b, \tag{A.1}$$

is the Gauss method. It consists of two parts: the forward course, wherein by means of a series of elementary transformation matrix A is given to the upper U triangular matrix with unit diagonal, and backward substitution, which U – is inverted.

The forward course of the Gauss method consists of n steps. Let $A^{(k)}$ denote the matrix at the beginning of the k th step, where $A^{(1)} \equiv A$ and $A^{(n+1)} \equiv U$. Let $a_{ij}^{(k)}$ denote the i th row and the j th column element [the (i,j) element] of $A^{(k)}$. In other words, $a_{ij}^{(k)} = e_i' A^{(k)} e_j$, where e_i is the i th column of the n th order identity matrix I_n . The matrix $A^{(k)}$ is already in upper triangular form for the first $k-1$ columns (figure A.1).

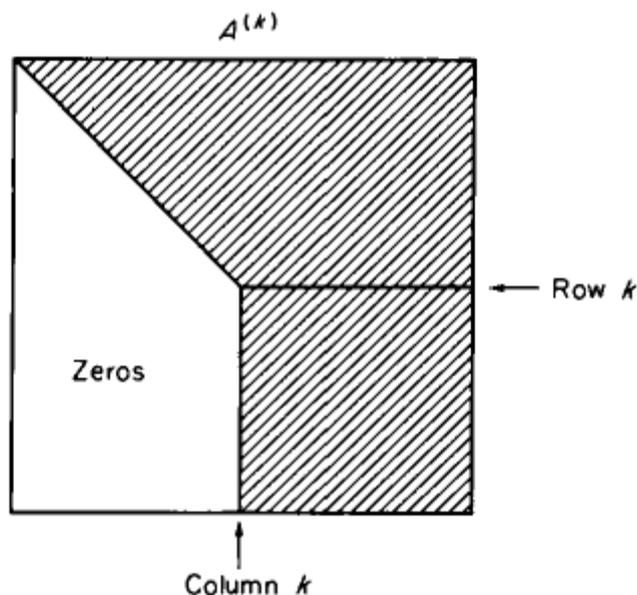


Figure A.1 – The matrix at the beginning of the k th step

At the k th step, the k th row of $A^{(k)}$ is divided by its (k,k) element and its multiples are subtracted from all the following rows such that all the nonzero elements in the k th column that lie below the k th row become zero. The resulting

matrix is denoted by $A^{(k+1)}$. This process can be restated in matrix notation as follows.

The forward course of the Gauss method consists of computing

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.2})$$

where the elementary lower triangular matrix L_k (see figure A.2) is given by

$$L_k = I_n + (\eta^{(k)} - e_k) e_k',$$

with the elements of the column vector $\eta^{(k)}$ defined as follows,

$$\eta_i^{(k)} = 0, \quad i < k;$$

$$\eta_k^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \eta_i^{(k)} = \frac{-a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i > k \quad [16].$$

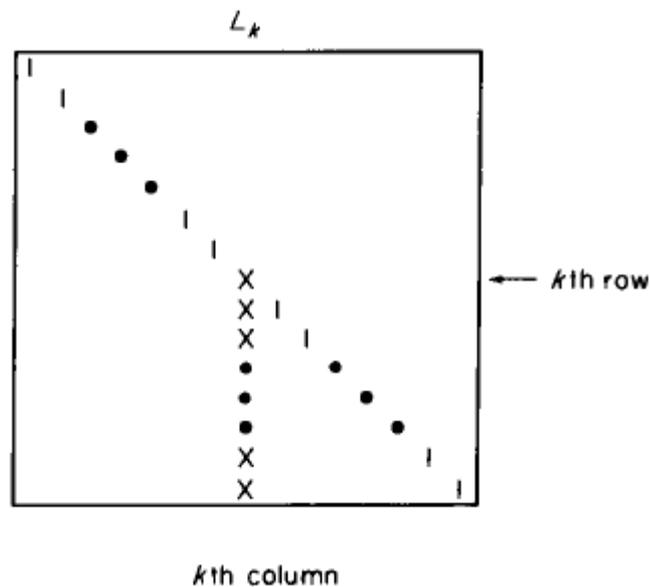


Figure A.2 – The elementary matrix at the k th stage

Thus L_k consists of ones on the diagonal except in the k th column which has $\eta_i^{(k)}$ on and below the diagonal. All other elements of L_k are zero.

Now, from (A.2), we have

$$A^{(n+1)} = L_n \dots L_2 L_1 A^{(1)}, \quad (\text{A.3})$$

and if we let

$$L = L_n \dots L_2 L_1, \quad (\text{A.4})$$

then in view of the facts that $A^{(1)} \equiv A$ and $A^{(n+1)} \equiv U$, equations (A.3-A.4) give

$$U = LA. \quad (\text{A.5})$$

Therefore, direct Gaussian exception lies in finding a lower triangular matrix L (product of lower triangular matrix also gives a lower triangular matrix), a matrix A that converts into an upper triangular matrix U . Due to equation (A.5) and in this case that the operators L_k are used to the two sides of the equation (A.1), come as a consequence of the Gaussian elimination to the equation

$$Ux = Lb. \quad (\text{A.6})$$

The back substitution part of the Gauss method is to solve the equation (A.6), that is performed, followed by the method: let x_i denote the i th element of x . Then the last element x_n is equal to the last element of the column vector Lb , since the last row of U consists of all zeros except a one for the last element. This value for x_n is substituted in the preceding equation and x_{n-1} is easily computed. x_n and x_{n-1} , when substituted in the $(n-2)$ th row of (A.6), yield x_{n-2} and so on.

In order to formulate the opposite substitution in matrix notation sketched above, we emphasize only initially that $a_{ij}^{(i+1)}$ is the element (i,j) of U . This follows from the fact that in (A.2) the i th row of A is modified until $k = i$ and then remains unchanged afterwards; in other words, the i th rows of both $A^{(i+1)}$ and U are identical.

The back substitution part of the Gauss method can now be defined as follows:

$$U_2 \dots U_{n-1} U_n U = I_n, \quad (\text{A.7})$$

where

$$U_k = I_n + \xi^{(k)} e'_k, \quad k = n, n-1, \dots, 2,$$

and the elements of column vector $\xi^{(k)}$ are given by

$$\xi_i^{(k)} = -a_{ik}^{(i+1)}, i < k \quad \text{and} \quad \xi_i^{(k)} = 0, i \geq k \text{ (figure A.3).}$$

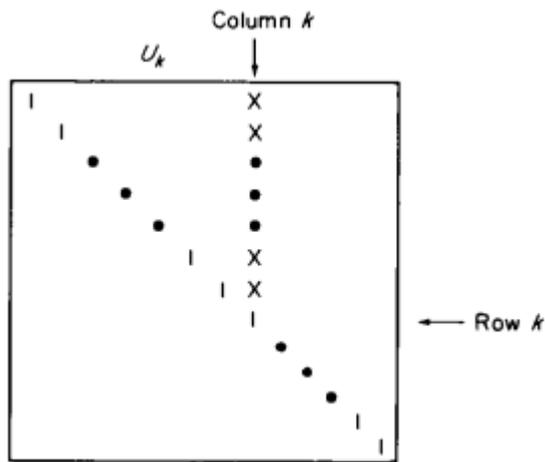


Figure A.3 – The elementary matrix at the k th stage of back substitution

Thus U_k has all ones on the diagonal and $\xi_i^{(k)}$ above the diagonal in the k th column. All other elements of U_k are zeros.

The total effect of the forward course and the back substitution on A can now be described. From (A.7), we get

$$U^{-1} = U_2 \dots U_{n-1} U_n, \quad (\text{A.8})$$

and from (A.4), (A.6) and (A.8), it follows that

$$x = U^{-1} L b = U_2 \dots U_{n-1} U_n L_n \dots L_2 L_1 b. \quad (\text{A.9})$$

The Gauss-Jordan Elimination

If at each stage in the Gaussian elimination not only the nonzero elements below the diagonal but also those above the diagonal are eliminated, then the process is called the Gauss-Jordan elimination. Thus the given coefficient matrix A is reduced directly to the identity matrix; this is in contrast with the Gaussian elimination, where A is first transformed to an upper (unit) triangular matrix U which is later reduced to the identity matrix [16].

The Basic Method.

In the Gauss-Jordan elimination (GJE) a sequence of elementary transformations (row operations) is applied to the given matrix A to reduce it to the identity matrix I_n . The same sequence of transformations, when applied to the right-hand side b of the system $Ax = b$, yields the solution x .

Let $A^{(k)}$ denote the matrix at the start of the k th step of the elimination, where $k = 1, 2, \dots, n$, and $A^{(1)} \equiv A$ and $A^{(n+1)} \equiv I_n$. Let $a_{ij}^{(k)}$ be the (i, j) element of $A^{(k)}$. The matrix $A^{(k)}$ is identical to I_n in the first $k-1$ columns. At the k th step, the k th column of $A^{(k)}$ is transformed to e_k by elementary row operations, namely,

$$A^{(k+1)} = T_k A^{(k)}, \quad (\text{A.10})$$

where

$$T_k = I_n + (\zeta^{(k)} - e_k) e_k', \quad (\text{A.11})$$

and the elements of the column vector $\zeta^{(k)}$ are given by

$$\zeta_i^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i \neq k \text{ and } \zeta_k^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}. \quad (\text{A.12})$$

Now, from (A.10) and the facts that $A^{(1)} \equiv A$ and $A^{(n+1)} \equiv I_n$, we have

$$T_n \dots T_2 T_1 A = I_n,$$

which gives the Product Form of Inverse (PFI) of A as

$$A^{-1} = T_n \dots T_2 T_1. \quad (\text{A.13})$$

If at the end of the k th stage of the GJE, the $\zeta^{(k)}$ is stored in place of the k th column of $A^{(k+1)}$, then the nontrivial elements of PFI would replace the matrix A by the completion of the GJE.

The Relationship between the PFI and the EFI

During the back substitution part of the Gaussian elimination (GE), the factored form of inverse of the unit upper triangular matrix U is obtained by choosing its diagonal elements in sequence as pivots by starting from the bottom right-hand corner. In this case, no fill-in of nonzero elements can take place and the non-trivial elements of the factored form of the inverse of U are obtained by just changing the signs of those elements of U which lie above the diagonal. However, to compute U^{-1} in this manner, all the rows of U have to be known and one has to wait until the forward course of the GE is complete.

An alternative way to find U^{-1} is to choose the pivots by starting with the top left-hand corner and then proceed down the diagonal. In this case, some fill-in of nonzero elements will generally take place.

However, at any particular stage k , only the first k rows of U are needed. Since at the completion of the k th stage of the forward course of the GE the first k rows of U are known, U^{-1} can be computed during the forward course of the GE. This is precisely what is done in the Gauss-Jordan elimination (GJE): The computation of U^{-1} in a factored is combined with the forward course of the GE. We will see that in the GJE, eliminating the elements above the diagonal is equivalent to computing U^{-1} by the alternative method given above [16]. This method for computing the inverse of the unit upper triangular matrix U can be described mathematically as follows:

Let

$$U^{(k+1)} = \bar{U}_k U^{(k)}, k=1,2,\dots,n, \quad (\text{A.14})$$

where

$$U^{(1)} = U, U^{(n+1)} = I_n \quad (\text{A.15})$$

and

$$\bar{U}_k = I_n + \xi^{(k)} e'_k \quad (\text{A.16})$$

with the elements of the column vector $\xi^{(k)}$ given by

$$\xi_i^{(k)} = 0, i \geq k \text{ and } \xi_i^{(k)} = -u_{ik}^{(k)}, i < k, \quad (\text{A.17})$$

In view of (A.16) and (A.17), we have $\bar{U}_1 = I_n$ and therefore from (A.14) and (A.15), it follows that

$$U^{-1} = \bar{U}_n \dots \bar{U}_3 \bar{U}_2. \quad (\text{A.18})$$

Consequently, we have two equations which show the relationship between the PFI and EFI:

$$e'_k T_k e_k = e'_k \bar{U}_k e_k = e'_k U^{-1} e_k, i < k \quad (\text{A.19})$$

and

$$e'_k T_k e_k = e'_k L_k e_k \quad i \geq k. \quad (\text{A.20})$$

From (A.19) it is clear that the nontrivial elements of the PFI which lie above the leading diagonal are the elements of the explicit form of U^{-1} , where U is the unit upper triangular form obtained at the end of the forward course of the GE. On the

other hand, from (A.20), it follows that the nontrivial elements of both the PFI and the EFI which lie on or below the diagonal are identical. Thus the zero nonzero structure of both the PFI and the EFI is the same on or below the diagonal, but above it the PFI has the zero nonzero structure of U^{-1} while the EFI has that of U . In general, the U^{-1} has more nonzeros than U and, therefore, the PFI is usually not as sparse as the EFI.

Eigenvalues and Eigenvectors

There are two well-known direct methods for computing the eigenvalues and eigenvectors of symmetric matrices: the Givens Method (GM) and the Householder Method (HM). In both methods, a series of orthogonal similarity transformations is used to modify the given matrix to a tridiagonal form, since the eigenvalues and eigenvectors of a tridiagonal matrix are easy to determine.

In the case of nonsymmetric matrices, a modification of the Gaussian elimination is used to transform the given matrix to a Hessenberg form, where all $a_{ij} = 0$, $i > j + 1$.

If the given matrix A is symmetric, then in many cases, it is possible to permute it such that the top left-hand corner of the resulting matrix is in a tridiagonal form. This can be done, if we find a row having at most one off-diagonal element and move such a row to become the first row (first column). Then we drop the first row and the first column from further consideration and repeat the above procedure for the remaining rows and columns. If at any stage no row having one off-diagonal element can be found, then we stop the process. Clearly, at this stage, the top left-hand corner of the transformed matrix is in a tridiagonal form. Now we have to transform only the square matrix in the bottom right-hand corner to a tridiagonal form by the GM or the HM. Therefore, without loss of generality, we shall denote this submatrix by A in the rest of this chapter.

The Givens Method

This method reduces A to a tridiagonal matrix by Jacobi's rotations. At the beginning of the k th major step, the matrix $A^{(k)}$ is tridiagonal as far as its first $k-1$ rows and columns are concerned. The k th major step consists of at most $n-k-1$ minor

steps in which zeros are introduced successively in positions $k+2, k+3, \dots, n$ of the k th row and the k th column. Define

$$R_{pk} = I_n + (\tau - 1)(e_{k+1}e'_{k+1} + e_p e'_p) + \omega(e_{k+1}e'_p - e_p e'_{k+1}) \quad (\text{A.21})$$

where $a_{pk}^{(k)}$ is the first nonzero element after the $(k+1)$ th row of column k . Then the first minor step of the k th major step is

$$A_1^{(k)} = R_{pk}A^{(k)}R'_{pk}. \quad (\text{A.22})$$

Now $e'_i R_{pk} = e'_i$ if $i \neq k+1, p$; therefore, all the rows and columns, other than the $(k+1)$ th and the p th, of $A_1^{(k)}$ and $A^{(k)}$ are identical and

$$e'_{k+1} R_{pk} A^{(k)} = (e'_{k+1} + (\tau - 1)e'_{k+1} + \omega e'_p) A^{(k)} = \tau e'_{k+1} A^{(k)} + \omega e'_p A^{(k)},$$

and similarly,

$$e'_p R_{pk} A^{(k)} = \tau e'_p A^{(k)} - \omega e'_{k+1} A^{(k)}.$$

Thus the rows $k+1$ and p of $R_{pk}A^{(k)}$ are linear combinations of the corresponding rows of $A^{(k)}$.

Similarly, we can see that in the matrix $R_{pk}A^{(k)}R'_{pk}$, columns $k+1$ and p are linear combinations of the corresponding columns of $R_{pk}A^{(k)}$.

Furthermore,

$$\begin{aligned} e'_p A_1^{(k)} e_k &= e'_p R_{pk} A^{(k)} R'_{pk} e_k = (\tau e'_p A^{(k)} - \omega e'_{k+1} A^{(k)}) e_k = \\ &= \tau a_{pk}^{(k)} - \omega a_{k+1,k}^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

if we take

$$\tau = \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{[(a_{pk}^{(k)})^2 + (a_{k+1,k}^{(k)})^2]^{1/2}}$$

and

$$\omega = \frac{a_{pk}^{(k)}}{[(a_{pk}^{(k)})^2 + (a_{k+1,k}^{(k)})^2]^{1/2}}.$$

An interesting modification of the GM to band matrices is given by Schwarz. In this method, a suitable sequence of rotations, analogous to the one given by (A.21), is applied to reduce a symmetric band matrix to a tridiagonal form. It

preserves the band property of the given matrix throughout the whole process (see figure A.4).

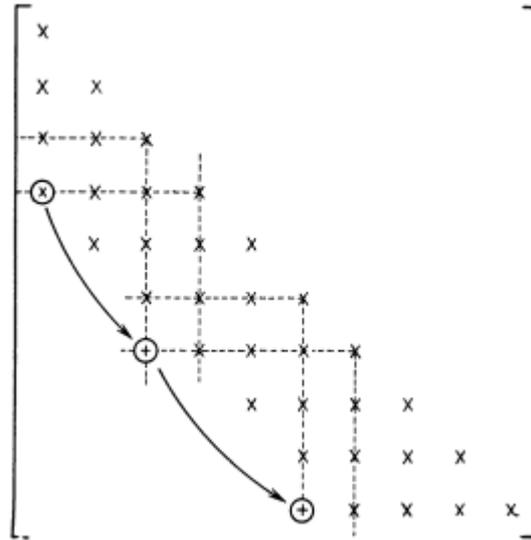


Figure A.4 – Rotations for a band matrix

The elimination of two symmetric elements within the band in general generates two identical nonzero elements in symmetric positions outside the band. These elements are eliminated by sequence of rotations which shift them downwards λ rows and λ columns (where λ is the band width of the given matrix) and finally beyond the border of the matrix. In Fig. 4, for $n=10$, $\lambda = 3$, the complete process for the elimination of element a_{41} is shown, where in view of the symmetry of A , only the elements on and below the main diagonal are considered [16].

Let the rotation R_{pq} be defined, where τ and ω are chosen to transform a given element to zero. For example, in Fig. 4, first R_{34} is used to make a_{41} zero. This creates a nonzero in (7;3) position; R_{67} is used to make it zero. This in turn makes (10,6) element nonzero, $R_{9,10}$ is then used to make (10,6) element zero.

Similarly, (3,1) element is eliminated by R_{23} (which leaves (4,1) element unchanged). Two additional rotations will sweep the nonzero elements created in the sixth row and second column downwards and over the border of the matrix. A continuation of this process for other rows and columns will transform A to a tridiagonal form.

The Householder Method

This method reduces A to a triple diagonal matrix by elementary Hermitian orthogonal matrices. At the beginning of the k th step, the matrix $A^{(k)}$ is tridiagonal in its first $k-1$ rows and columns. In the k th step zeros are introduced in the k th row and the k th column without destroying the zeros already introduced in the previous steps. In other words, all elements in positions $k+2, k+3, \dots, n$ of the k th row and the k th column are made zero. It consists of $n-2$ steps such that $A^{(1)} \equiv A$ and $A^{(n-1)}$ is triple diagonal.

$$A^{(k+1)} = H_k A^{(k)} H_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad (\text{A.23})$$

where

$$H_k = I_n - \alpha_k^{-1} \hat{\eta}^{(k)} \hat{\eta}^{(k)'}, \quad (\text{A.24})$$

and the elements of the column vector $\hat{\eta}^{(k)}$ are given by

$$\hat{\eta}_i^{(k)} = 0, \quad i \leq k; \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{\eta}_{k+1}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k)} \pm \beta_k, \quad \hat{\eta}_i^{(k)} = a_{ik}^{(k)}, \quad i > k+1$$

with

$$\beta_k^2 = \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^{(k)})^2, \quad \alpha_k = \beta_k^2 \pm \beta_k a_{k+1,k}^{(k)} \quad (\text{A.26})$$

and for stability β_k is chosen to have the same sign as $a_{k+1,k}^{(k)}$.

Reduction to the Hessenberg Form

Let $A^{(k)}$ be the matrix with its first $k-1$ columns in Hessenberg form, namely, $a_{ij}^{(k)} = 0$ for all $i > j+1$ and $j < k$. Then at the k th stage elementary similarity transformations are used to make the elements in positions $k+2, k+3, \dots, n$ of the k th column zero. This is done for $k=1, 2, \dots, n-2$ with the result that $A^{(n-1)}$ is in Hessenberg form. Thus we have

$$A^{(k+1)} = L_{k+1} A^{(k)} L_{k+1}^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad (\text{A.27})$$

where

$$L_{k+1} = I_n + \eta^{(k+1)} e_{k+1}' \quad (\text{A.28})$$

and the elements of the column vector η^k are given by

$$\begin{aligned}\eta_i^{(k+1)} &= 0, i \leq k + 1; \\ \eta_i^{(k+1)} &= -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{k+1,k}^{(k)}}, i > k + 1.\end{aligned}\tag{A.29}$$

From (A.28) and (A.29), it follows that

$$L_{k+1}^{-1} = I_n - \eta^{(k+1)} e'_{k+1}.\tag{A.30}$$

The above equations imply that $A^{(k+1)}$ is obtained from $A^{(k)}$ by first adding appropriate multiples of the $(k+1)$ th row to all rows with $a_{ik}^{(k)} \neq 0$, $i > k + 1$, and then adding multiples of all columns j of the resulting matrix for which $a_{jk}^{(k)} \neq 0$, $j > k + 1$, to the $(k+1)$ th column. Thus fill-in may take place in the whole $(k+1)$ th column and in the last $n-k-1$ rows and columns of $A^{(k)}$. In the last $n-k-1$ components of the $(k+1)$ th column, the fill-in can take place twice: once due to the premultiplication by L_{k+1} , and once due to the postmultiplication by L_{k+1}^{-1} . Of course, in the first $k+1$ components of the $(k+1)$ th column, fill-in takes place only due to L_{k+1}^{-1} . On the other hand, for the last $n-k-1$ rows and columns, fill-in can take place only due to L_{k+1} .

Eigenvectors

The eigenvector x corresponding to a known eigenvalue λ can be easily obtained, because $Ax = \lambda x$ implies that

$$(A - \lambda I)x = 0.\tag{A.31}$$

Note that $A - \lambda I$ is singular, since $x \neq 0$, and therefore we could omit any equation from (A.31) and solve the rest as a set of nonhomogeneous equations in the $(n-1)$ ratios of the components of x . In the solution of the nonhomogeneous set of equations, the various techniques for minimizing the fill-in and/or computational effort given in the previous chapters can be used.

The result of changes in a column of A on A^{-1}

Suppose the EFI, PFI or some other form of inverse of A is available. Let \hat{A} denote the matrix obtained from A by changing the q th column of A to a new column, say \hat{a}_q . We shall now describe several ways of how \hat{A}^{-1} can be constructed from A^{-1} .

First method.

If A^{-1} denotes a form of the inverse of A , then each column of $A^{-1} \hat{A}$ is identical to the corresponding column of I_n , except the q th column, namely,

$$A^{-1} \hat{A} = I_n + (A^{-1} \hat{a}_q - e_q) e_q' = I_n + (\hat{a}_q^{(n+1)} - e_q) e_q', \quad (\text{A.32})$$

where $\hat{a}_q^{(n+1)} = A^{-1} \hat{a}_q$.

Therefore,

$$\hat{A}^{-1} = (I_n + (\hat{a}_q^{(n+1)} - e_q) e_q')^{-1} A^{-1} = \check{T}_q A^{-1}, \quad (\text{A.33})$$

where

$$\check{T}_q = I_n + (\check{\xi}^{(q)} - e_q) e_q' \quad (\text{A.34})$$

with

$$\check{v}_i^{(q)} = \frac{-\hat{a}_{iq}^{(n+1)}}{\hat{a}_{qq}^{(n+1)}}, i \neq q \text{ and } \check{v}_q^{(q)} = \frac{1}{\hat{a}_{qq}^{(n+1)}}. \quad (\text{A.35})$$

Thus \hat{A}^{-1} has one additional factor \check{T}_q than the factored form of A^{-1} . We recall that only the nonzero elements of $\check{v}^{(q)}$ need be stored for evaluating \check{T}_q .

Additional columns of A can be changed in a similar manner. Of course, each such change adds another factor (similar to \check{T}_q) to the inverse. If only a few columns need to be modified, then the present method is reasonable to use. On the other hand, if several columns of A are changed, as in linear programming, then we would like to get rid of those factors of A^{-1} which correspond to the original columns of A that have been changed. Each of these columns can be thought of as being removed from the "basis" and a new column (which is the changed column) inserted in its place. In the next method, which work only for the EFI, the factor corresponding to the column removed from the basis is deleted [16].

Second method.

This method is especially suited to linear programming codes. As before, let a_q , the q th column of A , be replaced by \hat{a}_q and \hat{A} denote the modified matrix. If $\hat{A}^{(n+1)} = L_n \dots L_1 \hat{A}$ and $U = L_n \dots L_1 A$, then only the q th columns of $\hat{A}^{(n+1)}$ and U are different. Now, elementary matrices \hat{U}_q and \check{T}_q are determined, such that the last $n-q$ elements of the q th row of $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ are zero and e_q is the q th column

$oU^{(q)} = \check{T}_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$. Evidently $U^{(q)}$, is easy to invert, because it is obtained from U by replacing its q th row and column by e'_q and e_q respectively. Thus, $U^{(q)-1}$ is obtained from $U_2 \dots U_n$ by deleting U_q and setting each $\zeta_q^{(k)} = 0, k > q$. Clearly,

$$\hat{A}^{-1} = U^{(q)-1} \check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1. \quad (\text{A.36})$$

We have to determine \hat{U}_q and \check{T}_q to make use of the above formula for \hat{A}^{-1} . This can be done as follows. If

$$\hat{U}_q = I_n + e_q \tilde{v}^{(q)}, \quad (\text{A.37})$$

where

$$e'_q + \tilde{v}^{(q)} = e'_q U_{q+1} \dots U_n \quad (\text{A.38})$$

then, in view of the fact that $\hat{A}^{(n+1)} e_j = U e_j, j \neq q$, we have

$$e'_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)} e_j = (e'_q + \tilde{v}^{(q)}) U e_j = e'_q U_{q+1} \dots U_n U e_j = e'_q e_j = 0, j \neq q,$$

since U_{q+1}, \dots, U_n transform the last $n-q$ columns of U to the corresponding columns of I_n . Furthermore, since $e'_j \hat{U}_q = e'_j, j \neq q$, \hat{U}_q given by (A.37) is the desired matrix which reduces all nondiagonal elements of the q th row of $\hat{A}^{(n+1)}$ to zero and leaves the other rows unchanged.

Let

$$\hat{a}_q^{(t)} = \hat{U}_q L_n \dots L_1 \hat{a}_q, \quad (\text{A.39})$$

then, since $e'_q \hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)} = \hat{a}_q^{(t)} e'_q$, the Gauss-Jordan elimination performed on the q th column of $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ will not affect any of the other columns, and matrix \check{T}_q is the same as (A.34) with $\tilde{v}^{(q)}$ and $\hat{a}_q^{(t)}$ as in (A.39).

In order to change a column of \hat{A} , say \hat{a}_{q1} to \acute{a}_{q1} , it can be easily checked that

$$\check{A}^{-1} = U^{(q,q1)-1} \check{T}_{q1} \hat{U}_{q1} \check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1, \quad (\text{A.40})$$

where $U^{(q,q1)}$ is obtained from $U^{(q)}$ by replacing its q th row and column by e'_{q1} and e_{q1} , respectively, and \check{T}_{q1} and \hat{U}_{q1} are obtained from $\check{T}_q \hat{U}_q L_n \dots L_1 \check{A}$, in the same manner as \check{T}_q and \hat{U}_q resulted from $L_n \dots L_1 \hat{A}$. It is not necessary to transform the q th column of $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ to the unit vector e_q , if it is recorded that when inverting $\hat{U}_q \hat{A}^{(n+1)}$ its q th column should be first transformed to a unit vector. In this, \check{T}_q and

\check{T}_{q_1} are absent from (A.40); however, when inverting the matrix $U^{(q,q_1)}$ columns q and q_1 (one with the smaller index first) should be reduced to unit vectors prior to the rest of the matrix.

Приложение Б

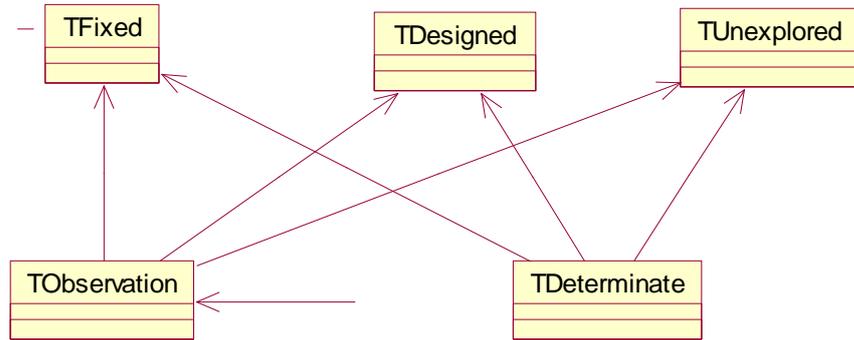


Рисунок Б.1 – Диаграмма классов для программы Геодезия

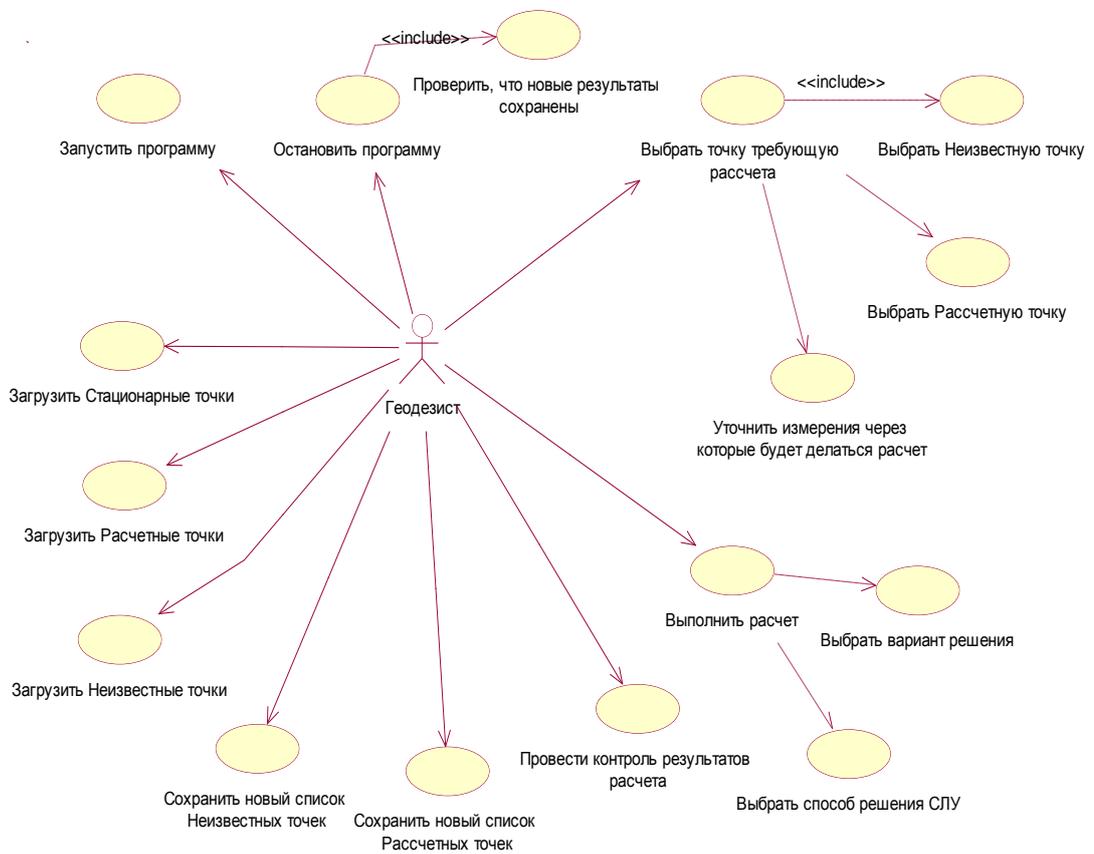


Рисунок Б.2 – Диаграмма «Вариантов использования» работы геодезиста с программой

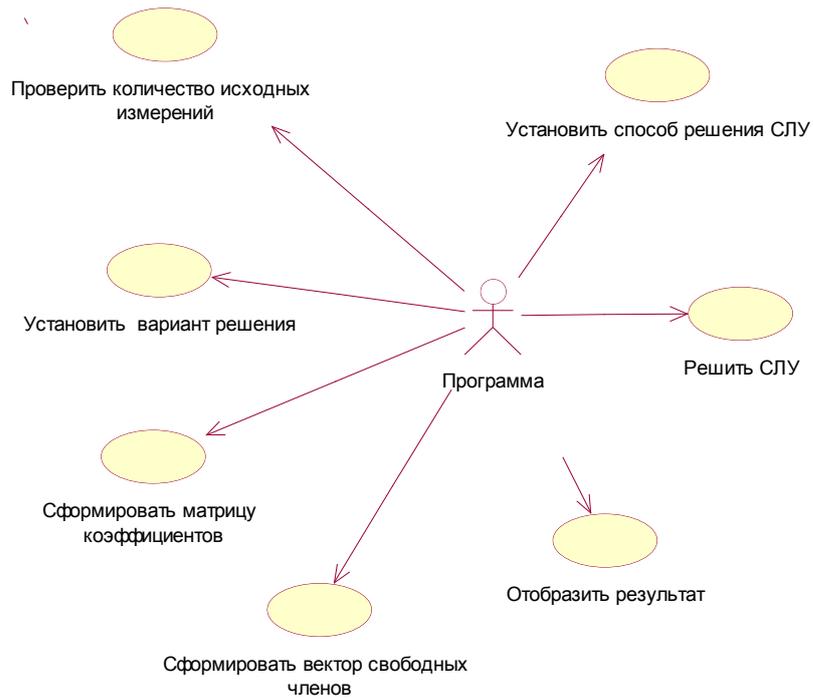


Рисунок Б.3 – Диаграмма «Вариантов использования» работы программы Геодезия

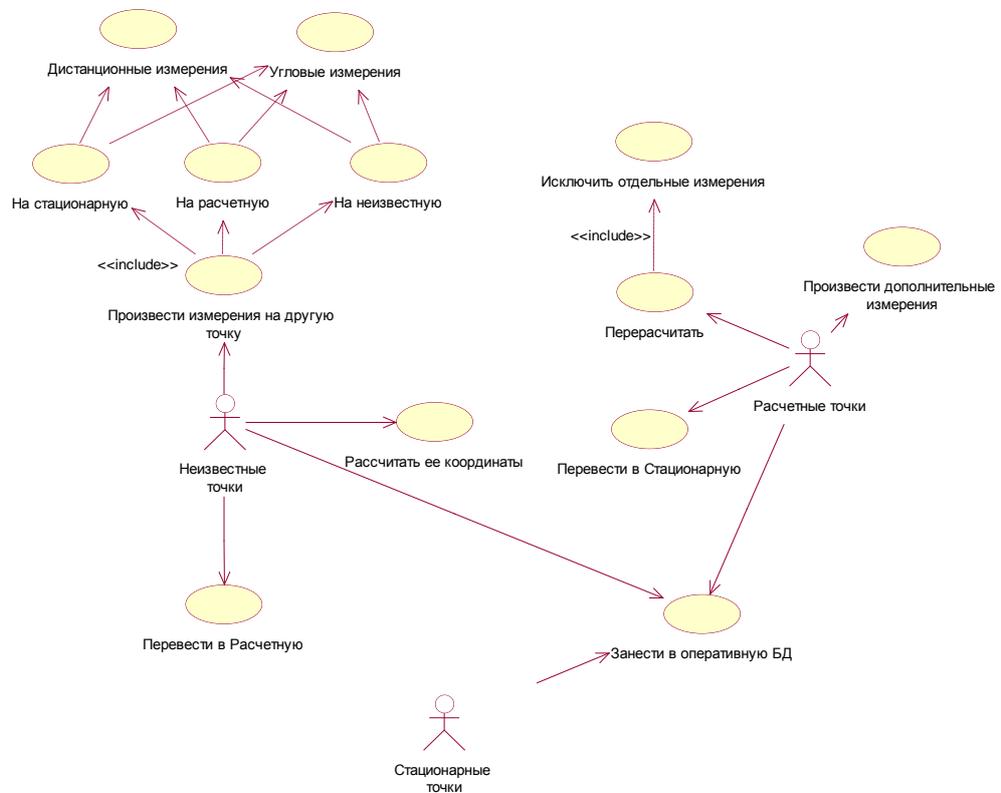


Рисунок Б.4 – Диаграмма «Вариантов использования» операций над теодолитными точками

Приложение В

Задача 1: Решение задачи с угловыми измерениями

$\text{ORIGIN} := 1$ -- нумерация массивов начинается с 1
 $\text{Num} := 2$ -- количество исходных точек
 $\text{scaX} := 100$ -- для укрупнения расстояний между точками

Углы в градусах $\alpha_1 := 60$ $\beta_1 := 45$
 $\alpha_2 := 45$ $\beta_2 := 45$

Ответ, который должен получиться
 в результате:

$$x11 := \text{scaX} \left(1 \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} 1 \frac{1}{2} \right)^T$$

Тогда в радианах они равны

$\text{knd} := 1$

$$\alpha := \left(\begin{array}{l} \text{for ind} \in 1.. \text{Num} \\ \left| \begin{array}{l} \text{TEMP}_{\text{knd}} \leftarrow \frac{\alpha_{\text{ind}}}{180} \cdot \pi \\ \text{knd} \leftarrow \text{knd} + 1 \end{array} \right. \\ \text{return TEMP} \end{array} \right)$$

$$\beta := \left(\begin{array}{l} \text{for ind} \in 1.. \text{Num} \\ \left| \begin{array}{l} \text{TEMP}_{\text{knd}} \leftarrow \frac{\beta_{\text{ind}}}{180} \cdot \pi \\ \text{knd} \leftarrow \text{knd} + 1 \end{array} \right. \\ \text{return TEMP} \end{array} \right)$$

$$\alpha_1 = 1.047$$

$$\beta_1 = 0.785$$

$$\alpha_2 = 0.785$$

$$\beta_2 = 0.785$$

Даны две точки $x1$ и $x2$ с известными координатами.

$$X_1 := \text{scaX}(1 \ 0 \ 1)^T = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad X_2 := \text{scaX} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 25 \\ -56.699 \\ 8.579 \end{pmatrix}$$

При Num измерениях получаем $3 \cdot C(\text{Num}, 2)$ уравнения

$$C2N := \frac{\text{Num}!}{2! \cdot (\text{Num} - 2)!}$$

$$C0u := 3C2N = 3$$

Столбцов будет Num -- по числу неизвестных a_i

Составляем систему уравнений коэффициентов

Определяем матрицу
 нужного размера и
 иницилируем 0

$$\text{AAA} := \left| \begin{array}{l} \text{for ind} \in 1.. C0u \\ \left| \begin{array}{l} \text{for jnd} \in 1.. \text{Num} \\ \left(\text{TEMP}_{\text{ind}, \text{jnd}} \leftarrow 0 \right) \end{array} \right. \\ \text{return TEMP} \end{array} \right.$$

Определяем коэффициенты системы уравнений

knd = 1

Num = 2

```

AAA := for ind ∈ 1..Num - 1
      for jnd ∈ ind + 1..Num
        for comp ∈ 1..3
          TEMP_knd,ind ← -(P_ind)_comp
          TEMP_knd,jnd ← (P_jnd)_comp
          knd ← knd + 1
      return TEMP
  
```

$$AAA = \begin{pmatrix} -0.354 & 0.5 \\ -0.612 & 0.5 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Составляем вектор свободных коэффициентов

knd = 1

```

BBB := for ind ∈ 1..1
      for jnd ∈ ind + 1..Num
        for comp ∈ 1..3
          TEMP_knd ← (X_ind)_comp - (X_jnd)_comp
          knd ← knd + 1
      return TEMP
  
```

$$BBB = \begin{pmatrix} 75 \\ 56.699 \\ 91.421 \end{pmatrix}$$

$$\text{Coef} := (AAA^T \cdot AAA)^{-1} \cdot AAA^T \cdot BBB$$

$$\text{Coef} = \begin{pmatrix} 70.711 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$Xz_1 := X_1 + P_1 \cdot \text{Coef}_1$$

$$Xz_2 := X_2 + P_2 \cdot \text{Coef}_2$$

$$Xz_1 - Xz_2 = \begin{pmatrix} -4.26325641 \times 10^{-14} \\ -9.9475983 \times 10^{-14} \\ -5.68434189 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta x := |x11_1 - Xz2_1_1| = 0 \quad \Delta y := |x11_2 - Xz2_1_2| = 7.105427357601001 \times 10^{-15}$$

$$\Delta z := |x11_3 - Xz2_1_3| = 0.0000000000000028$$

Относительная погрешность:

$$\delta x := \frac{\Delta x}{x11_1} \rightarrow 0$$

$$\delta y := \frac{\Delta y}{x11_2} \rightarrow 9.4739031434680025333e-17 \cdot \sqrt{3}$$

$$\delta z := \frac{\Delta z}{x11_3} \rightarrow 1.8947806286936004667e-16$$

Рисунок В.1 – Пространственный случай. Угловые измерения.
Кол-во точек N=2

Задача вариант 2.1: Решение задачи с угловыми измерениями

$\text{ORIGIN} := 1$ -- нумерация массивов начинается с 1
 $\text{Num} := 4$ -- количество исходных точек
 $\text{scaX} := 100$ -- для укрупнения расстояний между точками

Углы в градусах $\alpha_1 := 60$ $\beta_1 := 45$
 $\alpha_2 := 150$ $\beta_2 := 30$
 $\alpha_3 := 45$ $\beta_3 := 45$
 $\alpha_4 := 120$ $\beta_4 := 45$

Ответ, который должен получиться в результате:

$$x_{11} := \text{scaX} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$$

Даны четыре точки X1, X2, X3 и X4 с известными координатами.

$$X_1 := \text{scaX} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$X_2 := \text{scaX} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$X_3 := \text{scaX} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right) & \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 25 \\ -56.699 \\ 8.579 \end{pmatrix}$$

$$X_4 := \text{scaX} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Определяем коэффициенты системы уравнений

$\text{knd} = 1$

```

AAA :=
  for ind ∈ 1..Num - 1
    for jnd ∈ ind + 1..Num
      for comp ∈ 1..3
        TEMPknd,ind ← -(Pind)comp
        TEMPknd,jnd ← (Pjnd)comp
        knd ← knd + 1
      return TEMP
    
```

$\text{Num} = 4$

$$AAA^T \cdot AAA = \begin{pmatrix} 3 & -0.354 & -0.983 & -0.75 \\ -0.354 & 3 & -0.195 & -0.884 \\ -0.983 & -0.195 & 3 & -0.629 \\ -0.75 & -0.884 & -0.629 & 3 \end{pmatrix}$$

Составляем вектор свободных коэффициентов

knd = 1

```

BBB :=
  for ind ∈ 1..C2N - 3
    for jnd ∈ ind + 1..Num
      for comp ∈ 1..3
        TEMP_knd ← (X_ind)_comp - (X_jnd)_comp
        knd ← knd + 1
      return TEMP

```

	1
1	-100
2	0
3	0
4	75
5	56.699
6	91.421
7	-50
8	0
9	0
10	175
11	56.699
12	91.421
13	50
14	0
15	0
16	-125
17	-56.699
18	-91.421
19	

BBB =

Сравнение результатов с искомым значением

Абсолютная погрешность:

$$\Delta x := |x11_1 - Xz_{-1_1}| = 0 \quad \Delta y := |x11_2 - Xz_{-1_2}| = 0 \quad \Delta z := |x11_3 - Xz_{-1_3}| = 0$$

Относительная погрешность:

$$\delta x := \frac{\Delta x}{x11_1} \rightarrow 0 \quad \delta y := \frac{\Delta y}{x11_2} \rightarrow 0 \quad \delta z := \frac{\Delta z}{x11_3} \rightarrow 0$$

Рисунок В.2 – Пространственный случай. Угловые измерения. Первый способ формирования матрицы. Кол-во точек N=4

Задача вариант 2.2: Решение задачи с угловыми измерениями

Определяем коэффициенты системы уравнений
 $knd = 1$

```

AAA := for ind ∈ 1..Num - 1
      for jnd ∈ ind + 1..Num
        TEMPknd,ind ←  $(|P_{ind}|)^2$ 
        TEMPknd,jnd ←  $-P_{ind}^T \cdot P_{jnd}$ 
        knd ← knd + 1
        TEMPknd,ind ←  $-P_{ind}^T \cdot P_{jnd}$ 
        TEMPknd,jnd ←  $(|P_{jnd}|)^2$ 
        knd ← knd + 1
      return TEMP
  
```

AAA =

	1	2	3	4
1	1	-0.354	0	0
2	-0.354	1	0	0
3	1	0	-0.983	0
4	-0.983	0	1	0
5	1	0	0	-0.75
6	-0.75	0	0	1
7	0	1	-0.195	0
8	0	-0.195	1	0
9	0	1	0	-0.884
10	0	-0.884	0	1
11	0	0	1	-0.629
12	0	0	-0.629	1

Составляем вектор свободных коэффициентов
 $knd = 1$

```

BBB := for ind ∈ 1..Num - 1
      for jnd ∈ ind + 1..Num
        TEMPknd ←  $-X_{ind}^T \cdot P_{ind} + X_{jnd}^T \cdot P_{ind}$ 
        knd ← knd + 1
        TEMPknd ←  $X_{ind}^T \cdot P_{jnd} - X_{jnd}^T \cdot P_{jnd}$ 
        knd ← knd + 1
      return TEMP
  
```

BBB =

	1
1	35.355
2	75
3	-125.882
4	130.494
5	17.678
6	17.678
7	60.988
8	180.494
9	37.5
10	-17.678
11	155.494
12	-55.171

Рисунок В.3 – Пространственный случай. Угловые измерения. Второй способ формирования матрицы. Кол-во точек N=4

Задача 3: Решение задачи с дистанционными измерениями

$\underline{\text{ORIGIN}} := 1$ -- нумерация массивов начинается с 1
 $\text{Num} := 4$ -- количество исходных точек
 $\text{scaX} := 100$ -- для укрупнения расстояний между точками

Даны точки с известными координатами. Необходимо найти координаты неизвестной точки X_z .

$$X_1 := \text{scaX}(0 \ 0 \ 0)^T \quad X_2 := \text{scaX}(1 \ 0 \ 0)^T \quad X_3 := \text{scaX}(0 \ 1 \ 0)^T \quad X_4 := \text{scaX}(0 \ 0 \ 1)^T$$

```

B := | for ind ∈ 1..Num - 1
      | for jnd ∈ ind + 1..Num
      | | TEMP_knd ← (Rad_ind)^2 - (Rad_jnd)^2 - X_ind^T · (X_ind) + X_jnd^T · (X_jnd)
      | | knd ← knd + 1
      | return TEMP
    
```

Поэлементное представление вектора B:

Поэлементное представление вектора X:

```

XXX := | for ind ∈ 1..Num - 1
        | for jnd ∈ ind + 1..Num
        | | Xtemp ← X_jnd - X_ind
        | | for i ∈ 1..3
        | | | TEMP_knd,i ← Xtemp_i
        | | knd ← knd + 1
        | return TEMP
    
```

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \times 10^4 \\ 0 \\ 1.5 \times 10^4 \\ 1.5 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Нахождение координат точки X_z

$$X_z := (\text{XXX}^T \cdot \text{XXX})^{-1} (\text{XXX}^T \cdot B) \cdot \frac{1}{2}$$

Ответ

$$X_z = \begin{pmatrix} 7.105 \times 10^{-15} \\ 7.105 \times 10^{-15} \\ 75 \end{pmatrix}$$

Проверка

$\text{ind} := 1.. \text{Num}$

$$\text{Dist}_{\text{ind}} := \sqrt{(X_{\text{ind}} - X_z)^T \cdot (X_{\text{ind}} - X_z)}$$

$$\text{Dist} = \begin{pmatrix} 75 \\ 125 \\ 125 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Рисунок В.4 – Пространственный случай. Дистанционные измерения.
Кол-во точек $N=4$

Приложение Г

Листинг Г.1. Заголовочный файл UBaseClass.h, содержащий интерфейсную часть базового и тестового классов

```
//-----
#ifndef UBaseClassH
#define UBaseClassH
//-----
#include <System.Classes.hpp>
#include <Vcl.Controls.hpp>
#include <Vcl.StdCtrls.hpp>
#include <Vcl.Forms.hpp>
#include <Vcl.Grids.hpp>
#include <System.Math.hpp>
//-----
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
//-----
using namespace std;
//-----
const unsigned int coSpaceSize = 3;
//-----
// --- ALGLIB ---
#include "..\AlgLibOWN\linalg.h"
#include "..\AlgLibOWN\solvers.h"
using namespace alglib;
    // ГЛОБАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ -- РЕШАТЕЛИ СЛАУ
extern PACKAGE      real_2d_array    gvArr; // матрица коэффициентов
extern PACKAGE      real_1d_array    gvBar; // вектор свободных коэффициентов
extern PACKAGE      real_1d_array    gvRoot;
extern PACKAGE      ae_int_t         gvInfo;
extern PACKAGE      densesolverlsreport gvRep;
    struct TXYZ
    {long double X, Y, Z;
    };
// Тестовые структуры, для тестовой части программы
union TAngleDist
{ struct {long double Alpha, Beta;};
  struct {long double Dist;};
};
struct TTestingPoint
{ TXYZ    Coord;
  TAngleDist Meas;
};
struct TVectDist // вектор и дистанция для формирования окончательных данных измерений
{ TXYZ    Vect; // вектор-направление угловых измерений
  long double Dist; // дистанция измерений
};
struct TGeoPoint
{ UnicodeString NamePnt; // AnsiString Name; // Unicode Name;
  UnicodeString Comment; // комментарий
  unsigned int Code; // код точки; индекс в базе
  TXYZ    Coord;
  unsigned int Count; // кол-во измерений на точку
  unsigned int *Measure; // коды измерений
};
struct TObserve4List // измерение для массива измерений в классе Список измерений
{ UnicodeString Comment; // комментарий
  unsigned int Index; // индекс измерения в базе
```

```

        unsigned int CodeSource; // код базы точки источника измерения
        unsigned int IndexSource; // индекс в базе точек измерения
        unsigned int CodeDestin; // код базы точки нацеливания измерения
        unsigned int IndexDestin; // индекс в базе нацеливания измерения
        unsigned int CodeDirect; // код измерения -- тип -- угловое | нет
        long double Alpha, Beta; // углы
        unsigned int CodeDistance; // код измерения -- тип -- дистанционное | нет
        long double Distance; // дистанция
    };
    struct TObserv // измерение для массива измерений в Объекте Точка расчета
    { unsigned int Code; // код измерения -- тип и направление
      unsigned int Index; // индекс в классе-массиве измерений
      bool Active; // использующийся
      unsigned int CodeSource; // код базы точки источника измерения
      unsigned int IndexSource; // индекс в базе точек измерения
    };
    struct TMeasPntVect // окончательные данные измерений -- координаты точек и векторы
    { UnicodeString NamePnt; // имя
      UnicodeString Comment; // комментарий
      unsigned int Code; // код измерения -- угловое или дистанционное
      TXYZ Coord; // координаты точки, с которой производились измерения
      TAngleDist Meas; // измерения
      TVectDist VectDist; // вектор направления или дистанция; линии визирования
    };
    //todo: РАЗОБРАТЬСЯ С ФОРМАТАМИ
    struct TObservCode // код измерения для массива Расчетных и Неизвестных точек
    { unsigned int Index; // индекс измерения в базе
      bool Active; // использующийся
      unsigned int CodeSource; // код базы точки источника измерения
      unsigned int IndexSource; // индекс в базе точек измерения
      unsigned int CodeDestin; // код базы точки нацеливания измерения
      unsigned int IndexDestin; // индекс в базе нацеливания измерения
    };
    unsigned int Facto (unsigned int aN)
    {
        if(aN < 0) // если пользователь ввел отрицательное число
            return 0; // возвращаем ноль
        if (aN == 0) // если пользователь ввел ноль,
            return 1; // возвращаем факториал от нуля - не удивляетесь, но это 1
        else // Во всех остальных случаях
            return aN * Facto (aN - 1); // делаем рекурсию.
    }

    class TGeodeticCustom // : public TComponent
    {
    private:
    protected:
    unsigned int FCount;
    TGeoPoint *FPoints;

    protected: // для property
    TGeoPoint __fastcall GetPoint (unsigned int aIndex);
    void __fastcall SetPoint (unsigned int aIndex, TGeoPoint aPoint);
    unsigned int __fastcall GetMeas (unsigned int aiPnt, unsigned int aiMeas);
    void __fastcall SetMeas (unsigned int aiPnt, unsigned int aiMeas, unsigned int aMeas);
    public:
    __fastcall TGeodeticCustom();
    __fastcall TGeodeticCustom (UnicodeString aFile);
    virtual __fastcall ~TGeodeticCustom();
    virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile) = 0;
    virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin) = 0;
    virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile) = 0;
    virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG) = 0;
    public: // poroperty

```

```

__property unsigned int Count = {read = FCount};
__property TGeoPoint Points [unsigned int aIndex] = {read = GetPoint, write = SetPoint};
__property unsigned int Measure [unsigned int aiPnt] [unsigned int aiMeas] = {read = GetMeas, write =
SetMeas};
};
class TTesting // : public TComponent
{
private:
protected:
unsigned int FCount;
TTestingPoint *FPoints;
unsigned int FRowCount, FColCount;
long double **FMatrix, *FMatrProt; //todo: ? а надо ли
long double *FFreeMem, *FResult;
// связанные с расчетом на AlgLib
protected: // для property
TTestingPoint __fastcall GetPoint (unsigned int aIndex);
void __fastcall SetPoint (unsigned int aIndex, TTestingPoint aPoint);
public:
__fastcall TTesting();
__fastcall TTesting (UnicodeString aFile);
virtual __fastcall ~TTesting();
virtual void __fastcall CreateMatrVect();
virtual void __fastcall FormMatrixA();
virtual void __fastcall FormMatrixD();
virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
virtual void __fastcall LoadFromFileDist (ifstream &aFin);
virtual void __fastcall ShowResultDistToSG (TStringGrid *asgPVect, TStringGrid *asgCoef, TStringGrid
*asgFree, TStringGrid *asgResult);
virtual void __fastcall ShowResultToSG (TStringGrid *aSGPVect, TStringGrid *aSGCoef,
TStringGrid *aSGFree, TStringGrid *sgResult);
virtual void __fastcall ShowToSGA (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall ShowToSGD (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall Solve(); // первый метод решения в паре с FormMatrix, а может для любого
virtual void __fastcall SolveD(); // метод решения в паре с FormMatrix, для дистанционного
// вспомогательные
long double __fastcall VectXXProd (unsigned int aInd1, unsigned int aInd2);
public: // poroperty
__property unsigned int Count = {read = FCount};
__property TTestingPoint Points [unsigned int aIndex] = {read = GetPoint, write = SetPoint};
};
#endif

```

Листинг Г.2. Заголовочный файл UGeodeticClass.h, содержащий интерфейсные части классов для решения задач

```

//-----
#ifndef UGeodeticClassH
#define UGeodeticClassH
//-----
#include <System.SysUtils.hpp>
#include <System.Classes.hpp>
#include <Vcl.Controls.hpp>
#include <Vcl.StdCtrls.hpp>
#include <Vcl.Forms.hpp>
//-----
// #include <iostream.h>
#include <fstream.h>
//-----
#include "UBaseClass.h"

```

```

//-----
using namespace std;
const // коды вида измерения и наличия измерения в БД
    coCodeDirectionExist = 1,
    coCodeDirectionDoNot = 2,
    coCodeDistanceExist = 10,
    coCodeDistanceDoNot = 20;
const // коды измерения и направления
    coCodeDirect_At = 1,
    coCodeDirect_From = 2,
    coCodeDistan_At = 10,
    coCodeDistan_From = 20;
const // коды типов точек, типов БД
    coCodeFixedType = 10,
    coCodeDesignedType = 20,
    coCodeUnexploredType = 30;
//-----
class TDirect: public TGeodeticCustom // : public TComponent
{ // угловые измерения
private:
protected:
public:
    __fastcall TDirect();
    __fastcall TDirect (UnicodeString aFile);
    virtual __fastcall ~TDirect();
    // методы
    virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
    virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
public:
};
//-----
class TDist: public TGeodeticCustom // : public TComponent
{ // дистанционные измерения
private:
protected:
public:
    __fastcall TDist();
    __fastcall TDist (UnicodeString aFile);
    virtual __fastcall ~TDist();
    virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
    virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
};
//-----
class TFixedPnts : public TGeodeticCustom
{ // стационарные точки
private:
protected:
public:
    __fastcall TFixedPnts();
    __fastcall TFixedPnts (UnicodeString aFile);
    virtual __fastcall ~TFixedPnts();
    virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
    virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
    virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
    virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG);
};
class TDesigned : public TGeodeticCustom
{ // рассчитанные точки
private:
protected:
public:
    __fastcall TDesigned();
    __fastcall TDesigned (UnicodeString aFile);
};

```

```

virtual __fastcall ~TDesigned();
virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG);
public:
};
//-----
class TUnexplored : public TGeodeticCustom
{ // неизвестные точки
private:
protected:
unsigned int FObsCount; // todo: МАССИВ
TObserve *FObserve;
protected:
TObserve __fastcall GetObserve (unsigned int aIndex);
void __fastcall SetObserve (unsigned int aIndex, TObserve aObs);
public:
__fastcall TUnexplored();
__fastcall TUnexplored (UnicodeString aFile);
virtual __fastcall ~TUnexplored();
virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG);
public:
__property unsigned int ObsCount = {read = FObsCount};
__property TObserve Observe [unsigned int aIndex] = {read = GetObserve, write = SetObserve};
};
class TObservation : public TGeodeticCustom
{ // класс-массив измерений
private:
protected:
unsigned int FObsCount;
TObserve4List *FObserve;
protected: // для property
TObserve4List Get (unsigned int aIndex);
public:
__fastcall TObservation();
__fastcall TObservation (UnicodeString aFile);
virtual __fastcall ~TObservation();
virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
virtual unsigned int Search (unsigned int aMeas);
virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG);
public:
__property TObserve4List Observaton [unsigned int aIndex] = {read = Get};
};
//-----
const coCountM = 50; // макс колич возможн измерений
class TCalcPoint : public TGeodeticCustom
{ // класс Точка для расчета
private:
protected:
UnicodeString FPointName;
unsigned int FMeasCount; // определяет длины всех последующих массивов
TObserve FMeas [coCountM]; // измерения
TMeasPntVect FPnts [coCountM]; // окончательные значения
long double FResult [coCountM]; // массив результатов
TXYZ FResultXYZ [coCountM]; // массив полученной точки
protected:
TObserve __fastcall GetObserve (unsigned int aIndex) {return FMeas [aIndex];};
};

```

```

void __fastcall SetObserv (unsigned int aIndex, TObserv aPoint) {FMeas [aIndex] = aPoint;};
public:
__fastcall TCalcPoint();
__fastcall TCalcPoint (UnicodeString aFile);
virtual __fastcall ~TCalcPoint();
virtual void __fastcall LoadFromFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall LoadFromFile (ifstream &aFin);
void __fastcall LoadFromUnexplored (TUnexplored &aUnex, TObservation &aObs, unsigned int);
void __fastcall LoadFromUnexploredDist (TUnexplored &aUnex, TObservation &aObs, unsigned int);
void __fastcall MakePntVect (TFixedPnts &aFixed, TDesigned &aDesin, TObservation &aObserv);
virtual void __fastcall SaveToFile (UnicodeString aFile);
virtual void __fastcall ShowDistToSG (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall ShowMeasToSG (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall TCalcPoint::ShowResultDistToSG (TStringGrid *aSG, bool aFrmt = true, int aDeci =
3);
virtual void __fastcall ShowResultToSG (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall ShowToSG (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall ShowVectToSG (TStringGrid *aSG);
virtual void __fastcall SolveD(); // формирование и решение СЛАУ -- дистанционное
virtual void __fastcall SolveM1(); // формирование и решение СЛАУ
virtual void __fastcall SolveM2(); // формирование и решение СЛАУ
// вспомогательные
long double __fastcall VectPPPProd (unsigned int, unsigned int);
long double __fastcall VectXPPProd (unsigned int, unsigned int);
long double __fastcall VectXXProd (unsigned int aInd1, unsigned int aInd2);
public:
__property TObserv Observs [unsigned int aIndex] = {read = GetObserv, write = SetObserv};
__property UnicodeString PointName = {read = FPointName};

};
#endif

```

Приложение Д

Геодезия

Неизвестные | Стационарные | Тестовое

Тестовые измерения

	X	Y	Z	Alf
1	100	0	100	60
2	200	0	100	150
3	25	-56,699	8,589	45
4	150	0	100	120

Вектор направлений

	X	Y	Z
1	0,35355339	0,61237243	0,70710678
2	-0,75	0,43301270	0,5
3	0,5	0,5	0,70710678
4	-0,35355339	0,61237243	0,70710678

Матрица коэффициентов

	1	2	3	4
1	-0,35355339	-0,75	0	0
2	-0,61237243	0,43301270	0	0
3	-0,70710678	0,5	0	0
4	-0,35355339	0	0,5	0
5	-0,61237243	0	0,5	0
6	-0,70710678	0	0,70710678	0
7	-0,35355339	0	0	-0,5
8	-0,61237243	0	0	0,6
9	-0,70710678	0	0	0,7
10	0	0,75	0,5	0
11	0	-0,43301270	0,5	0
12	0	-0,5	0,70710678	0
13	0	0,75	0	-0,5
14	0	-0,43301270	0	0,6
15	0	-0,5	0	0,7

Свободные

1	-100
2	0
3	0
4	75
5	56,699
6	91,411
7	-50
8	0
9	0
10	175
11	56,699
12	91,411
13	50
14	0
15	0
16	-125

Результат

1	70,711689092705
2	100,00194935464
3	199,99366537172
4	70,712562007567

Загрузить тестовое Угловые Решить тестовое Угловые Загрузить тестовое Дистанционные Решить тестовое Дистанционные

Рисунок Д.1 – Программа «Геодезия». Вкладка «Тестовое». Решение для угловых измерений

Геодезия

Неизвестные | Стационарные | Тестовое

Тестовые измерения

	X	Y	Z	Dist
1	0	0	0	75
2	100	0	0	125
3	0	100	0	125
4	0	0	100	25

Вектор направлений

	X	Y	Z
1			
2			
3			
4			

Матрица коэффициентов

	1	2	3
1	100	0	0
2	0	100	0
3	0	0	100
4	-100	100	0
5	-100	0	100
6	0	-100	100

Свободные

1	0
2	0
3	7500
4	0
5	7500
6	7500

Результат

X	6,16297582203914E-33
Y	1,1555796663233E-33
Z	75

Загрузить тестовое Угловые Решить тестовое Угловые Загрузить тестовое Дистанционные Решить тестовое Дистанционные

Рисунок Д.2 – Программа «Геодезия». Вкладка «Тестовое». Решение для дистанционных измерений

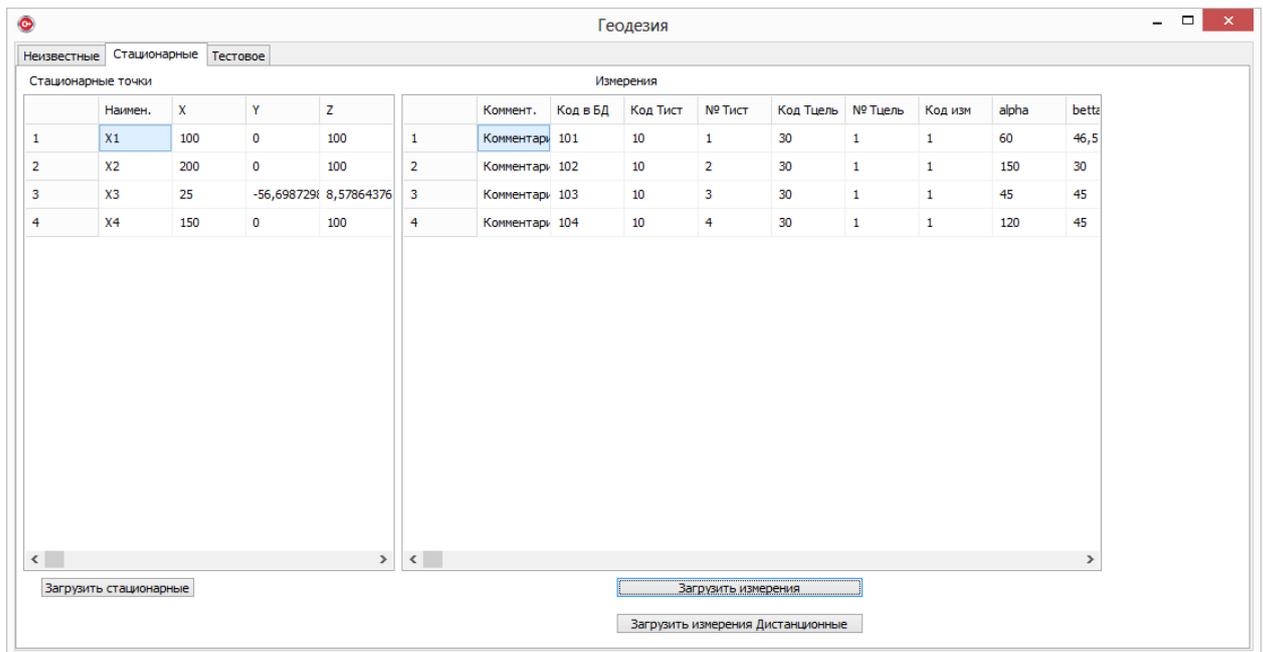


Рисунок Д.3 – Программа «Геодезия». Вкладка «Стационарные». Данные о стационарных точках и измерениях на точки

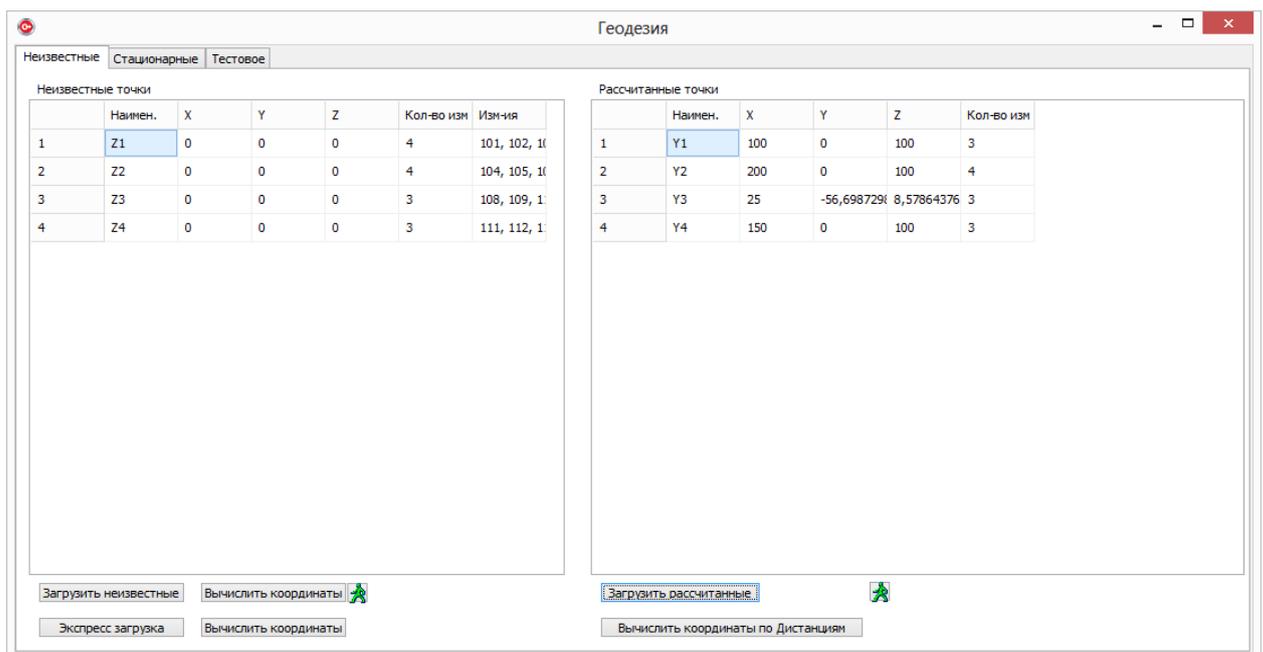


Рисунок Д.4 – Программа «Геодезия». Вкладка «Неизвестные». Данные о неизвестных и рассчитанных точках

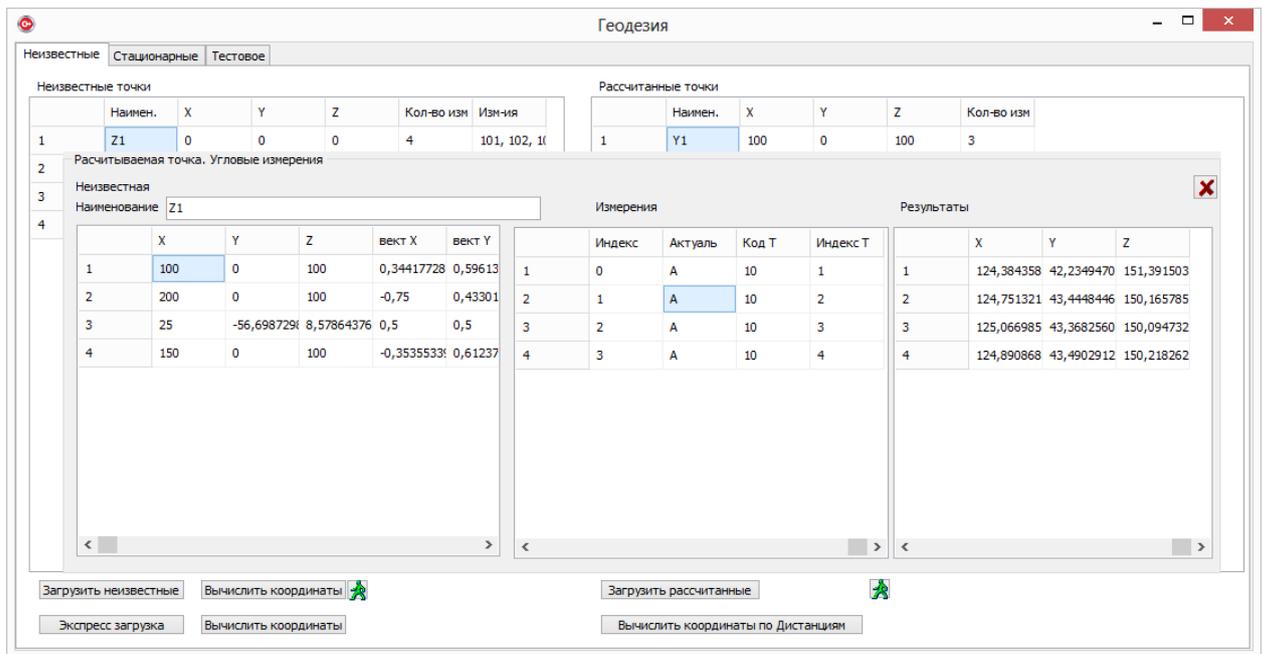


Рисунок Д.5 – Программа «Геодезия». Панель «Рассчитываемая точка. Угловые измерения» с результатами расчета неизвестной точки по угловым измерениям

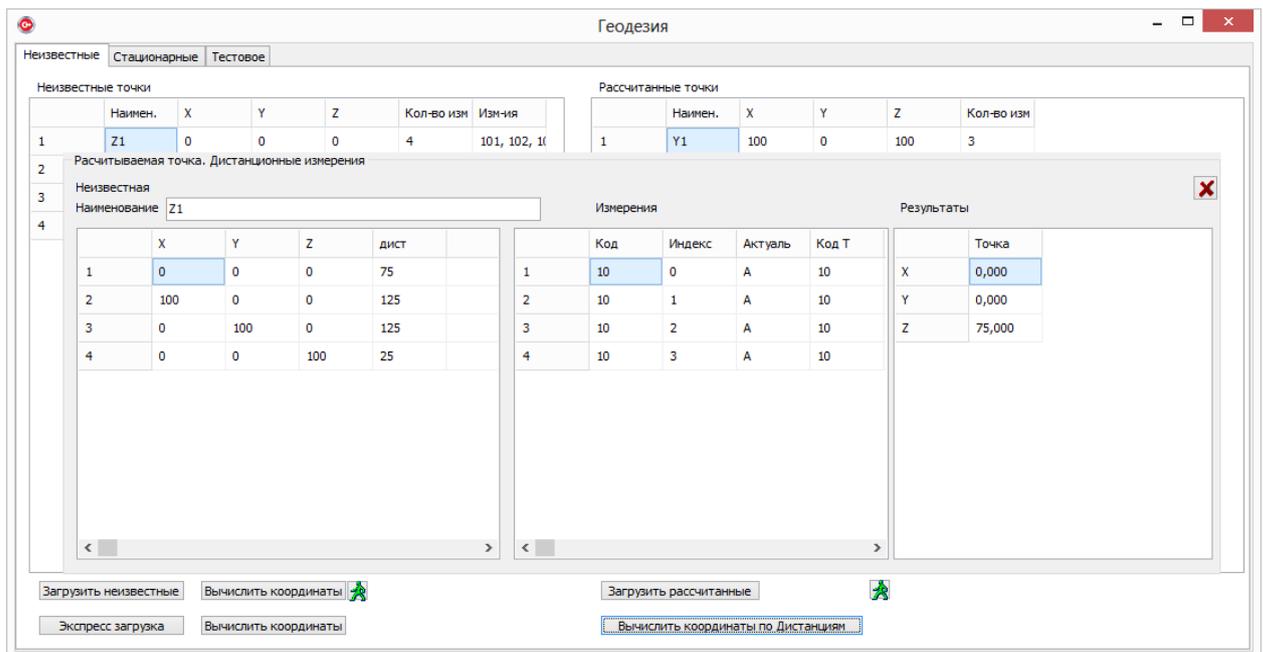


Рисунок Д.6 – Программа «Геодезия». Панель «Рассчитываемая точка. Дистанционные Измерения» с результатами расчета неизвестной точки по дистанционным измерениям