V_3, V_4 – параметры, которые характеризуют значения быстродействия технических средств (процессора, оперативной памяти, дисковой системы, файловой системы соответственно). Под быстродействием предлагается понимать число операций, выполняемых ЭВМ и устройствами за единицу времени.

Показатель использования устройств (загрузка) определяется по следующей формуле:

$$p_i = T_i / T,$$

где T_i – время работы устройства, а T – общее время работы системы.

На основании исследований [1-3] и анализа реальных систем хранения и обработки больших объемов данных предлагается обобщенный алгоритм оценки производительности СОИ специального назначения, который состоит из следующих этапов:

1 этап. Определение состава, назначения и основных функций СОИ. Определение сценариев СПО и показателей производительности СОИ.

2 этап. Выбор подхода к оцениванию производительности:

1-й подход – использование стандартных средств;

2-й подход – использование специальных программных средств.

3 этап. Выполнение операций в зависимости от выбранного подхода – проведение испытаний, измерений и сравнение результатов.

4 этап. Определение критерия эффективности работы СОИ и ее производительности. На данном этапе осуществляется выбор конфигурации аппаратных средств для сравнительного тестирования.

5 этап. Обобщение полученных результатов.

Таким образом, созданный стенд, специальное алгоритмическое и программное обеспечение позволили получить значения характеристик для оценивания производительности отдельных вычислительных модулей, входящих в состав систем обработки информации и оценить потенциальную и реализованную производительности, а также имитацию процессов автоматической обработки информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лацис А.О. Как построить и использовать суперкомпьютер. – М.: Бестселлер, 2003. – 274 с.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
3. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 71 с.

Поступила 15.05.2009 г.

УДК 369:519.2

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕТТО-ПРЕМИЙ ДЛЯ СМЕШАННОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Г.М. Кошкин, Н.В. Ланкина

Томский государственный университет
Отдел проблем информатизации ТНЦ СО РАН, г. Томск
E-mail: Lankina_Nata@mail.ru

Рассматривается задача оценивания нетто-премии в условиях смешанного страхования жизни. Синтезируется непараметрическая оценка нетто-премии, находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и ее предельное распределение. Приводятся результаты статистического моделирования.

Ключевые слова:
Нетто-премия, смешанное страхование жизни, асимптотические свойства, непараметрические оценки.

Введение и постановка задачи

Эффективность финансовой деятельности страховой компании зависит от правильного расчета нетто-премии для различных видов страхования необходимых категорий и возрастных групп населения [1]. В долгосрочном страховании жизни при расчетах премий за риск учитывается динамика ценности денег, основанная на процентной ставке δ с непрерывно начисляемым процентом по вкладу [2–6]. В этом случае для выработки управляющих решений страховой фирме следует предварительно оценить нетто-премию, которая гарантирует фирме средний нулевой доход.

Ранее в работах [3, 4] в условиях непараметрической неопределенности изучались оценки нетто-премий для различных видов индивидуального страхования, а в [5, 6] – в случае коллективного страхования. В данной работе рассматривается задача оценивания нетто-премий для смешанного страхования жизни [7], которое часто предлагается страховыми компаниями. Суть смешанного страхования жизни или n-летнего страхования на дожитие заключается в следующем. Человек заключает договор страхования на n лет. Выплата по договору производится либо в момент смерти застрахованного бенефициарию, если застрахованный умер в течении n лет, либо в момент окончания срока действия договора, если застрахованный дожил до конца этого срока. Этот вид договора выполняет как функции страхования, так и накопления средств, тем самым являясь наиболее привлекательным для клиента.

В страховую компанию обращаются люди, достигшие определенного возраста x лет, поэтому все случайные события (страховые случаи), связанные с этим человеком, имеют условный характер.

Для человека в возрасте x лет целесообразнее использовать не продолжительность жизни T, а остаточное время жизни $T(x)=T-x$. Согласно [2. С. 25–27] остаточное время жизни $T(x)$ имеет функцию распределения

$$F_x(t) = \mathrm{P}(T(x) \le t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$

и плотность

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}F_x(t) = -\frac{d}{dt}S_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)},\ 0 \le t < \infty,$$

где $S(x)$ – функция выживания, $f(u)=-S'(u)$ – плотность распределения продолжительности жизни T.

Определим для смешанного страхования жизни современную величину страховой выплаты z:

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, T(x) \le n, \\ e^{-\delta n}, T(x) > n, \end{cases} \tag{1}$$

где δ обозначает банковскую процентную ставку. В данном случае величина z показывает настоящую долю будущей страховой выплаты, принимаемой за условную единицу. Чем больше срок страхования, тем меньше выплаты застрахованного за счет использования банковской процентной ставки.

В качестве нетто-премии для смешанного страхования возьмем математическое ожидание величины (1):

$$\bar{A}_{x:n} = \frac{1}{S(x)}\int_0^n e^{-\delta t} f(x+t)dt + \frac{e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)}. \tag{2}$$

С помощью замены переменных преобразуем интеграл в (2):

$$\int_0^n e^{-\delta t} f(x+t)dt = e^{\delta x}\int_0^n e^{-\delta t} dF(t) = \Phi_n(x,\delta),$$

$$\int_0^n e^{-\delta t} dF(t) = J_n(\delta).$$

Тогда формула (2) принимает вид:

$$\overline{A_{x:n}} = \frac{e^{\delta x}J_n(\delta)}{S(x)} + \frac{e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)} \tag{3}$$

или

$$\overline{A_{x:n}} = \frac{\Phi_n(x,\delta)}{S(x)} + \frac{e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)}. \tag{4}$$

Далее будут использоваться как формула (3), так и формула (4).

Синтез оценки

Пусть имеется независимая выборка $X_1,\ldots,X_N$ продолжительности жизни X, по которой необходимо оценить нетто-премию. Оценим отдельно числитель и знаменатель в (3).

Воспользуемся вместо неизвестных $F(x)$ и $S(x)$ их непараметрическими оценками: эмпирическими функциями распределения

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(X_i < x)$$

и выживания

$$S_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(X_i \ge x),$$

где $\mathrm{I}(A)$ – индикатор события A.

Подставив $F_N(x)$ и $S_N(x)$ в выражения для нетто-премии (3) или (4), получим следующую оценку подстановки:

$$\bar{A}^N_{x:n} = \frac{e^{\delta x}}{S_N(x)\cdot N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)\mathrm{I}(0 < X_i \le n) +$$

$$+\frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)} = \frac{e^{\delta x}\widehat{J}_{n,N}(\delta)}{S_N(x)} + \frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)} =$$

$$= \frac{\Phi_{n,N}(x,\delta)}{S_N(x)} + \frac{e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)}. \tag{5}$$

Свойства оценки нетто-премии

Найдем сначала главную часть асимптотической среднеквадратической ошибки (СКО) и порядок смещения оценки (5). Для этого нам понадобится теорема 1 из [5], которую ниже сформулируем в виде Леммы.

Введем следующие обозначения согласно [5]: пусть $t_N=(t_{1N},t_{2N},\ldots t_{sN})^T$ – s-мерная векторная статистика с компонентами $t_{jN}=t_{jN}(x)=t_{jN}(x,X_1,\ldots,X_N)$, $j=\overline{1,s}, x\in R^\alpha$, R^α – α-мерное евклидово пространство. Пусть $\{d_N\}$ – последовательность положительных чисел, таких, что: $\lim_{n\to\infty} d_N = \infty$; функция $H(t){:}R^s\to R^1$, где $t=t(x)=(t_1(x),\ldots,t_s(x))^T$ – s-мерная ограниченная вектор-функция; $N_s(\mu;\sigma)$ – s-мерная нормально распределенная случайная величина с вектором средних $\mu=\mu(x)=(\mu_1,\ldots,\mu_s)^T$ и ковариационной матрицей $\sigma=\sigma(x)$;

$$\nabla H(t)=(H_1(t),...,H_s(t))^T,$$

где $H_j(t)=\left.\dfrac{\partial H(z)}{\partial z_j}\right|_{z=t}$, $j=\overline{1,s}$;

$\Rightarrow$ – знак сходимости по распределению (слабой сходимости).

Лемма. Пусть:

1. $H(t)$ – дважды дифференцируема, причем $\nabla H(t)\neq 0$;
2. $\mathrm{M}\|t_N-t\|^i=\mathrm{O}(d_N^{-i/2})$, i=1,2,...

Тогда $\forall k$=1,2,...

$$\left|\mathrm{M}[H(t_N)-H(t)]^k-\mathrm{M}[\nabla H(t)\cdot(t_N-t)]^k\right|=$$
$$=o(d_N^{-(k+1)/2}).$$

При k=1 можно найти главную часть смещения оценки $H(t_n)$, а при k=2 – её СКО.

Теорема 1. Если $S(x)>0$, $S(x+n)>0$, $S(t)$ непрерывна в точках x и $x+n$, то:

1) $\mathrm{M}|\overline{A}_{x:n}^N-\overline{A}_{x:n}|=\mathrm{o}(N^{-1})$;
2) СКО

$$u^2(\overline{A}_{x:n}^N)=\mathrm{M}(\overline{A}_{x\,n}^N-\overline{A}_{x\,n})^2=\frac{\sigma(\overline{A}_{x:n})}{N}+o(N^{-3/2}),$$

где $\sigma(\overline{A}_{x:n})$ определяется по формуле, приведенной ниже.

Доказательство. Для оценки $\overline{A}_{x:n}^N$, задаваемой формулой (5), в обозначениях Леммы имеем:

$$t_N=(\Phi_{n,N}(x,\delta),S_N(x),S_N(x+n))^T;\ d_N=N;$$
$$t=(\Phi_n(x,\delta),S(x),S(x+n))^T;$$
$$H(t)=\frac{\Phi_n(x,\delta)-e^{-\delta n}S(x+n)}{S(x)}=\overline{A_{x:n}};$$
$$H(t_N)=\frac{\Phi_{n,N}(x,\delta)-e^{-\delta n}S_N(x+n)}{S_N(x)}=\overline{A}_{x\,n}^N.$$
$$\nabla H(t)=\left(H_1(t),H_2(t),H_3(t)\right)^T=$$
$$=\left(\frac{1}{S(x)},-\frac{\Phi_n(x,\delta)-e^{-\delta n}S(x+n)}{S^2(x)},-\frac{e^{-\delta n}}{S(x)}\right)^T\neq 0.$$

В [2] показано, что $S_N(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $S(x)$. Покажем, что $\widehat{J}_{n,N}(\delta)$ является несмещенной оценкой функционала $J_n(\delta)$:

$$\mathrm{M}\widehat{J}_{n,N}(\delta)=$$
$$=\mathrm{M}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\exp(-\delta X_i)\mathrm{I}(0\le X_i\le n)\right\}=J_n(\delta).$$

Для оценки $\widehat{J}_{n,N}(\delta)$ вычислим дисперсию:

$$D\widehat{J}_{n,N}(\delta)=D\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathrm{I}(0\le X_i\le n)e^{-\delta X_i}\}=$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N D\{\mathrm{I}(0\le X_i\le n)e^{-\delta X_i}\}=$$
$$=\frac{1}{N}(\int_0^n\mathrm{I}(0\le X_i\le n)e^{-2\delta X_i}dF(X_i)-J_n(\delta)^2)=$$
$$=\frac{1}{N}(J_n(2\delta)-J_n^2(\delta)).$$

Известно, что отношение двух несмещенных оценок может иметь смещение. Нахождение смещения отношения, как правило, является сложной задачей и требует использования результатов работы [5]. Найдем порядок смещения оценки. Так как $\mathrm{M}(t_N-t)=0$, то

$$\left|\mathrm{M}(\overline{A}_{x:n}^N-\overline{A}_{x:n})-\mathrm{M}[\nabla H(t)(t_N-t)]\right|=$$
$$=\left|\mathrm{M}(\overline{A}_{x:n}^N-\overline{A}_{x:n})\right|=o(N^{-1}).$$

Теперь, учитывая, что $\Phi_n(x,\delta)=e^{\delta x}J_n(\delta)$, найдем компоненты ковариационной матрицы трехмерной статистики t_N:

$$\sigma_{11}=ND\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\}=$$
$$=\Phi_n(x,2\delta)-\Phi_n{}^2(x,\delta);$$
$$\sigma_{22}=ND\{S_N(x)\}=S(x)(1-S(x));$$
$$\sigma_{33}=ND\{S_N(x+n)\}=$$
$$=S(x+n)(1-S(x+n));$$
$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=N\,\mathrm{cov}(S_N(x),\Phi_{n,N}(x,\delta))=$$
$$=N(\mathrm{M}\{S_N(x)\Phi_{n,N}(x,\delta)\}-$$
$$-\mathrm{M}\{S_N(x)\}\mathrm{M}\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\}=$$
$$=(1-S(x))\Phi_n(x,\delta);$$
$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=N\,\mathrm{cov}(S_N(x+n),\Phi_{n,N}(x,\delta))=$$
$$=N(\mathrm{M}\{S_N(x+n)\Phi_{n,N}(x,\delta)\}-$$
$$-\mathrm{M}\{S_N(x+n)\}\mathrm{M}\{\Phi_{n,N}(x,\delta)\})=$$
$$=(1-S(x+n))\Phi_n(x,\delta);$$
$$\sigma_{23}=\sigma_{32}=N\,\mathrm{cov}(S_N(x),S_N(x+n))=$$
$$=(1-S(x))S(x+n).$$

Используя предыдущий результат о смещении и найденную ковариационную матрицу, получаем СКО оценки:

$$u^2(\overline{A}_{x:n}^N)=\mathrm{M}[\nabla H(t)(t_N-t)]^2+\mathrm{O}(N^{-3/2})=$$
$$=\frac{\sigma(\overline{A}_{x:n})}{N}+\mathrm{O}(N^{-3/2}),$$

где

$$\sigma(\bar{A}_{x:n}) = \sum_{p=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} H_j(t)\sigma_{jp}H_p(t) = H_1^2(t)\sigma_{11} +$$

$$+H_2^2(t)\sigma_{22} + H_3^2(t)\sigma_{33} + 2H_1(t)H_2(t)\sigma_{12} +$$

$$+2H_1(t)H_3(t)\sigma_{13} + 2H_2(t)H_3(t)\sigma_{23} =$$

$$= \frac{\Phi(x,2\delta)}{S^2(x)} - \frac{\Phi^2(x,\delta)}{S^2(x)} + \frac{\Phi(x,\delta)e^{-\delta n}S(x+n)}{S^2(x)} -$$

$$-\frac{e^{-2\delta n}S^2(x+n)}{S^3(x)} - \frac{2e^{-\delta n}S(x+n)}{S^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Для нахождения предельного распределения оценки (5) нам понадобятся две теоремы.

Теорема 2 (центральная предельная теорема в многомерном случае) [3. С. 178-202].

Если $t_1, t_2, ..., t_N$ – последовательность независимых одинаково распределенных s-мерных векторов,

$$\mathrm{M}\{t_s\} = 0, \sigma(x) = \mathrm{M}\{t_s{}^T t_s\}, S_N = \sum_{s=1}^{N} t_s,$$

то при $N \to \infty$ $\frac{S_N}{\sqrt{N}} \Rightarrow \mathrm{N}(0, \sigma(x))$.

Теорема 3 (об асимптотической нормальности $H(t_N)$) [5].

Пусть:

1. $\sqrt{d_N} \cdot t_N \Rightarrow N_s\{\mu, \sigma(x)\}$;
2. функция $H(z)$ дифференцируема в точке μ, $\nabla H(t) \neq 0$.

Тогда

$$\sqrt{d_N}(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\mu_j, \sum_{p=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\sigma_{jp}H_p(\mu)\right\}.$$

Теорема 4 (о предельном распределении оценки (5)).

В условиях теоремы 1

$$\sqrt{n}(\bar{A}_{x:n}^N - \bar{A}_{x:n}) \Rightarrow \mathrm{N}_1(0, \sigma(\bar{A}_{x\,n})).$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 2 имеем: $s=3, \sigma(x)=\sigma(\bar{A}_{x:n})$. Таким образом,

$$\sqrt{N}\{(\Phi_{n,N}(x,\delta), S_N(x), S_N(x+n)) - t\} \Rightarrow N_3(0, \sigma(\bar{A}_{x:n})),$$

где $\sigma(\bar{A}_{x:n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23} \\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33} \end{bmatrix}$.

Функция $H(z)$ дифференцируема в точке t и $\nabla H(t) \neq 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 3 и для оценки нетто-премии получаем: $\sqrt{n}(\bar{A}_{x:n}^N - \bar{A}_{x:n}) \Rightarrow (0, \sigma(\bar{A}_{x:n}))$. Теорема доказана.

Статистическое моделирование

Рассмотрим модель де Муавра для смешанного страхования жизни. Для этой модели продолжительность жизни T индивида распределена равномерно от 0 до ω, где Ω – предельный возраст. Плотность распределения остаточного времени жизни $T(x)$ определяется формулой:

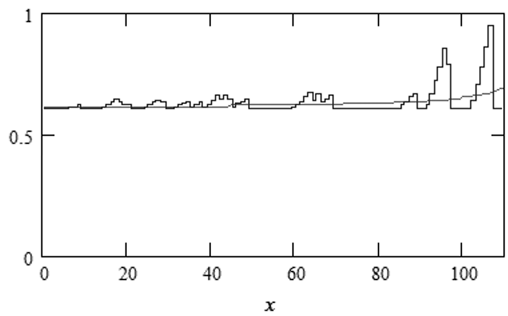
$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)} = \frac{1}{\omega - x}, \ t \in (0, \omega - x],$$

откуда нетто-премия, согласно (3):

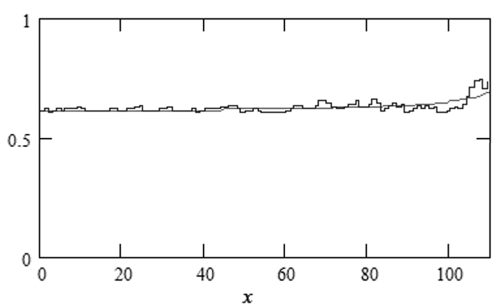
$$\bar{A}_{x:n} = \frac{1 - e^{-\delta n(\omega - x - n)}}{\delta(\omega - x - n)} \ [4].$$

Оценку нетто-премии построим по выборке объема N независимых случайных величин $T=(T_1, ..., T_N)$, равномерно распределенных на интервале (0, 120–n) с предельным возрастом ω=120. Изучим динамику изменения оценок нетто-премии для различных значений n, N. Качество оценки будем характеризовать величиной:

$$G(N, n, \delta) = \frac{\sum_{x=1}^{120-n}(\bar{A}_{x:n}^N - \bar{A}_{x:n})^2}{120 - n}.$$



а



б

Рис. 1. *Зависимость нетто премии (гладкая кривая) и ее оценки (ступенчатая кривая) от возраста застрахованного x при объеме выборки N: а) 20; б) 100*

На рис. 1 представлены случаи смешанного страхования жизни на 5 лет, когда банковская процентная ставка составляет 10 % годовых (n=5, δ=0,1).

Для случаев, представленных на рис. 1, характеристики качества оценок:

$$G(20,5,0,1)=0,064,$$

$$G(100,5,0,1)=0,009,$$

т. е. во втором случае критерий качества оказался меньше примерно в 7 раз.

Далее, рассмотрим поведение критерия качества при фиксированных N=100, $\delta1$=0,1 (10 %) и $\delta2$=0,15 (15 %) и изменении n от 1 года до 8 лет с шагом 1 год.

Результаты статистического моделирования (рис. 1) подтверждают состоятельность оценок нетто-премий. Согласно рис. 2 можно сделать вывод о том, что с ростом банковской процентной ставки и срока страхования точность оценивания нетто-премии для смешанного страхования жизни уменьшается.

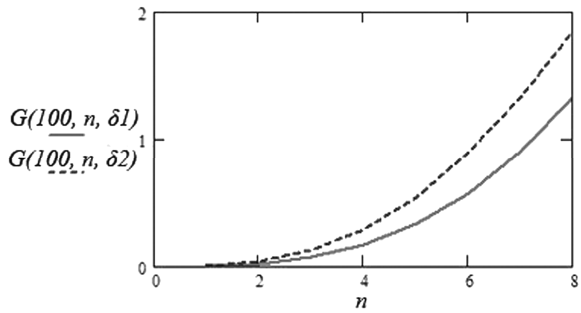


Рис. 2. *Зависимость критериев качества G(100, n, δ1) и G(100, n, δ2) от срока страхования n при различных банковских процентных ставках*

Заметим, что рассмотренный подход к оцениванию нетто-премий можно распространить на другие виды страхования – смешанное в рамках коллективного страхования жизни, пенсионное, страхование вкладов трудоспособного населения для получения негосударственных пенсий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-00595-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial Mathematics. – Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986. – 624 p.
2. Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. – М.: МГУ, 1994. – 86 с.
3. Кошкин Г.М. Введение в математику страхования жизни. – Томск: ТГУ, 2004. – 112 с.
4. Кошкин Г.М., Лопухин Я.Н. Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 315–329.
5. Koshkin G.M., Lopukhin Ya.N. Estimation of Net Premiums in Collective Models of Life Insurance // Proc. of the 11th Annual Intern. AFIR Colloquium. – 2001. – V. 2. – P. 447–457.
6. Lopukhin Ya.N., Koshkin G.M. On estimation of net premium in collective life insurance // The 5th Korea-Russian Intern. Symp. on Science and Technology: Proc. KORUS – 2001. – V. 2. – P. 296–299.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
8. Кошкин Г.М. Моменты отклонения оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 604–618.

Поступила 27.04.2009 г.