УДК 514.85

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НОВОГО ВИДА ЗАЦЕПЛЕНИЯ В ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМАХ

А.М. Бубенчиков, Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет
E-mail: nrs@math.tsu.ru

Построена математическая модель работы редуктора, использующего новый вид зацепления рабочих колёс, одно из которых представляет собой винтовой эксцентрик, а профиль другого построен на базе циклоидальной кривой. Такое зацепление обладает повышенными силовыми характеристиками и позволяет получать высокие передаточные отношения в одной ступени. Создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур – торцевых сечений работающего механизма и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики.

Ключевые слова:
Математическое моделирование, эксцентриково-циклоидальное зацепление, циклоидальная кривая.

Введение

Широко применяемое эвольвентное зацепление колес при всех его достоинствах обладает и рядом недостатков, таких как недостаточная несущая способность зубьев из-за малой кривизны рабочих поверхностей, сравнительно высокие потери, связанные с наличием трения скольжения. Кроме того, эвольвентное зацепление имеет ограничения по величине передаточного отношения для одной ступени. Все эти недостатки обуславливают поиск новых видов зацеплений.

Известно зацепление Новикова [1], которое имеет выпукло-вогнутые винтовые зубья с противоположным направлением винтовой линии и с начальным касанием в точке, которая при вращении перемещается параллельно оси колес. Профили в торцовом сечении очерчиваются дугами окружностей и имеют кривизну разных знаков. В зацеплении Новикова преобладает качение, поэтому оно имеет более высокий КПД, и обладает большей контактной прочностью при тех же основных размерах, чем эвольвентное зацепление. Однако, редукторы с таким зацеплением обладают повышенной чувствительностью к изменению межосевого расстояния колес, высокой виброакустической активностью, низкой конструктивной гибкостью, что ограничивает область их практического использования. В [2] описан новый вид зацепления колес с криволинейными зубьями – эксцентриково-циклоидальное зацепление, которое частично объединяет достоинства эвольвентного зацепления и зацепления Новикова. В данной статье построена математическая модель динамики этого зацепления.

Геометрическая модель механизма

Общий вид редуктора с плоскостью P, перпендикулярной осям колес, приведен на рис. 1, а фрагмент участка контакта червячного элемента с большим колесом – на рис. 2. Зубчатый профиль меньшего колеса 1 в торцовом сечении представляет собой окружность D диаметра $d=2r$, эксцентрично смещенную на расстояние ε относительно оси вращения колеса OO_1. Криволинейный профиль колеса 1 образован последовательным и непрерывным смещением этой окружности вдоль оси колеса OO_1 с одновременным поворотом её вокруг этой же оси. Таким образом, поверхность зуба колеса 1 образует винтовой эксцентрик.

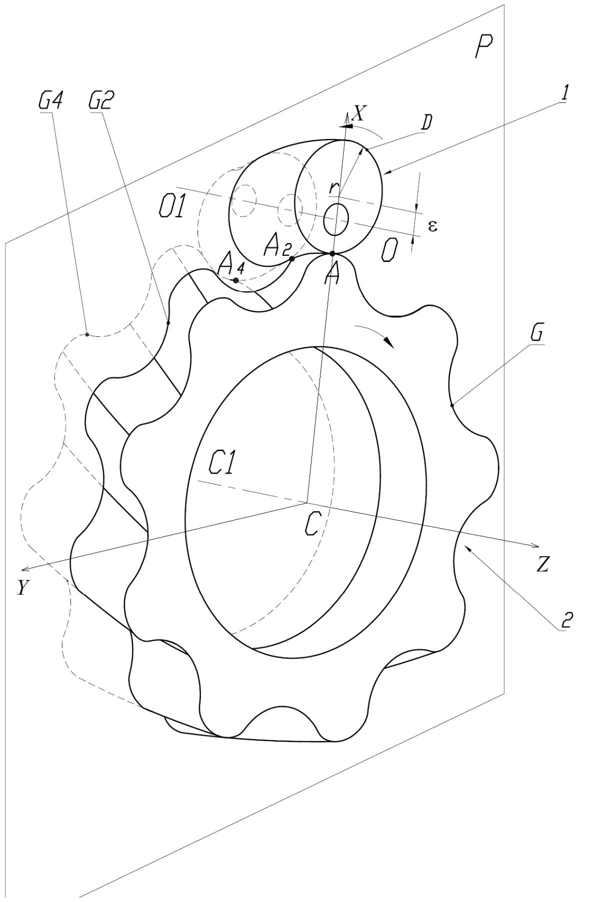

Рис. 1. *Общий вид редуктора. Плоскость P перпендикулярна осям колёс*

Профиль зуба большего колеса 2 в торцовом сечении сопрягается с эксцентрично смещенной окружностью D колеса 1. Профиль построен как огибающая семейства эксцентриковых окружностей в разных фазах зацепления и представляет собой циклоидальную кривую G, являющуюся эквидистантой эпитрохоиды [3]. Винтовая криволинейная поверхность зубьев колеса 2 образуется аналогично поверхности зуба колеса 1 последовательным и непрерывным поворотом циклоидальных торцовых сечений колеса вокруг оси CC_1 колеса 2. Винтовые поверхности колес 1 и 2 имеют противоположное направление вращения.

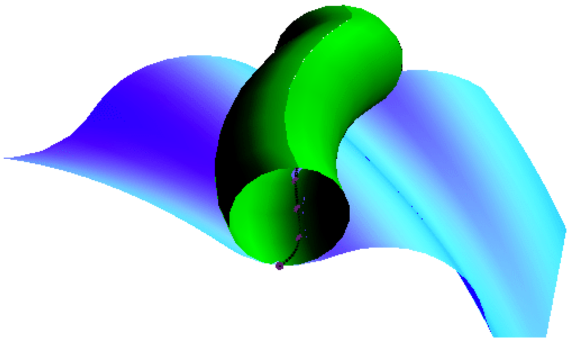

Рис. 2. *Фрагмент участка контакта*

Нахождение линии контакта

Параметрические уравнения эпитрохоиды имеют вид

$$\begin{cases} x(\tau) = -\varepsilon \cos\tau + a\cos\dfrac{\tau}{z_2+1}, \\ y(\tau) = -\varepsilon \sin\tau + a\sin\dfrac{\tau}{z_2+1}, \end{cases}$$

где $\tau=0,...,2\pi(z_2+1)$ – текущий параметр, ε – эксцентриситет, a – межцентровое расстояние колес, z_2 – количество циклов кривой (количество зубьев колеса 2).

Параметрические уравнения эквидистанты G, удалённой по нормали на радиус $d/2$ окружности D от эпитрохоиды, имеют вид:

$$\begin{cases} X(\tau) = x(\tau) + \dfrac{d}{2} n_1(\tau), \\ Y(\tau) = y(\tau) + \dfrac{d}{2} n_2(\tau), \end{cases}$$

где $n_1(\tau)$, $n_2(\tau)$ – координаты единичного вектора нормали.

Как видно из схемы построения зубчатых поверхностей колес 1 и 2, профиль зуба колеса 1 в любом торцовом сечении представлен эксцентрично смещенной окружностью D, а профиль колеса 2 – повёрнутой циклоидальной кривой G. Окружность D в любом торцовом сечении имеет точку касания A с соответствующей циклоидальной кривой. Винтовой зуб колеса 1 имеет одновременно множество точек контакта с винтовым циклоидальным зубом колеса 2. Эти точки образуют непрерывную винтообразную (с непостоянной кривизной) линию контакта AA_2A_4.

Координаты точки A контакта окружности D с циклоидальной кривой G находятся как сумма радиус-вектора центра окружности D с вектором, направленным по нормали к этой окружности в точке контакта и имеющим длину равную радиусу окружности D. Для нахождения этой нормали нет необходимости прибегать к дифференцированию – достаточно применить свойство циклоидальных кривых: нормаль в произвольной точке такой кривой проходит через полюс (точка соприкосновения обкатывающихся кругов, с помощью которых получается исходная циклоидальная кривая [3. С. 113]). Линия AA_2A_4 строится с помощью встроенной в пакете MathCad функции интерполяции массива точек контакта, соответствующих близким торцевым сечениям. Полученная при этом вектор-функция $\boldsymbol{K\upsilon}(\upsilon)$ ($\upsilon=0,...,2\pi$ – угол поворота окружности D вокруг оси OO_1, при котором получается соответствующее торцевое сечение) точек линии контакта AA_2A_4 даёт возможность дифференцирования с помощью символьного процессора пакета MathCad с целью нахождения кривизны в каждой точке этой линии в любой момент времени. Эта кривизна оказывается не постоянной, т. е. линия контакта не является винтовой.

Радиусы кривизны и расчёт усилий в точках контакта

Для нахождения контактных напряжений в точках линии AA_2A_4 необходимо знать радиус кривизны той линии на большом зубе 2, которая получается торцевым сечением, соответствующим точке контакта, т. е. при заданном угле υ. Эта линия является результатом поворота исходной линии G на угол

$$\frac{-(\upsilon+\delta)}{z_2},$$

где δ – угол поворота генератора. Радиусы кривизны вычисляются по обычной формуле

$$R(\upsilon,\delta) = \frac{(X'(\varphi(\upsilon,\delta))^2 + Y'(\varphi(\upsilon,\delta))^2)^{\frac{3}{2}}}{X'(\varphi(\upsilon,\delta))Y''(\varphi(\upsilon,\delta)) - X''(\varphi(\upsilon,\delta))Y'(\varphi(\upsilon,\delta))},$$

где

$$\varphi(\upsilon,\delta) = \frac{z_2+1}{z_2}(\upsilon+\delta),$$

а $X(\varphi(\upsilon,\delta))$, $Y(\varphi(\upsilon,\delta))$ – координаты точки контакта на соответствующей эквидистанте.

Формула для расчёта усилий в точках контакта при угле поворота генератора δ принимает интегральный вид:

$$F(\upsilon,\delta) = \frac{M\sin(\gamma(\upsilon,\delta))}{\int\limits_{\delta}^{\delta+\pi} \sqrt{(X(\varphi(\upsilon,\delta))-a)^2 + Y(\varphi(\upsilon,\delta))^2}\sin^2(\gamma(\upsilon,\delta))d\upsilon}, \quad (1)$$

где M – входной момент на генераторе, а $\gamma(\upsilon, \delta)$ – угол между радиус-вектором точки контакта относительно оси червячного элемента и общей нормалью к касающимся кривым (окружность и эквидистанта). Интегрирование ведётся по половине длины червячного элемента – «рабочей части» червяка, изменяющейся в зависимости от δ.

Выходной момент и расчёт потерь мощности на трение

Сечениями перпендикулярными осям вращения выделим элементарные по глубине фрагменты деталей с размером в направлении осей dh их в дальнейшем будем называть плоскими фрагментами (фигурами) зубчатого колеса и червяка. Далее мы предполагаем, что различные по глубине фрагменты каждой отдельно взятой детали не участвуют между собой в силовом взаимодействии. В случае же существования такого взаимодействия реализующие его усилия были бы направлены лишь вдоль осей вращения. Таким образом, распределённые по линии контакта усилия, определяемые соотношением (1), действуют в плоскости нормальной осям вращения деталей. Поскольку на глубине dh реализуется поворот плоской линии G на угол $d\upsilon$, то со стороны входной детали (червяка) на выделенный элементарный фрагмент зубчатого колеса будет действовать сила величиной $F(\upsilon,\delta)\ d\upsilon$, направленная по общей нормали к плоским фигурам в точке контакта. В свою очередь, со стороны зубчатого колеса вдоль того же направления общей нормали будет действовать равная по величине, но противоположно направленная сила реакции. Точками опоры выделенных вращающихся плоских фигур являются центры вращения этих фигур. Эти центры остаются неподвижными во всё время движения, в случае же, если центробежные силы являются не слишком значительными, они взаимодействуют между собой по законам статики, т.е. по закону равенства действия и противодействия.

После определения вектора $f(\upsilon,\delta)$ ($|f(\upsilon,\delta)|=F(\upsilon,\delta)$) выходной момент найдётся по формуле:

$$M_{\text{вых}} = \int\limits_{\delta}^{\delta+\pi} \left| f(\upsilon,\delta) \times \rho(\upsilon,\delta) \right| d\upsilon,$$

где $\rho(\upsilon,\delta)=\boldsymbol{CA}$ – радиус-вектор точки контакта плоских фигур относительно центра вращения фрагмента зубчатого колеса. Таким образом, если «разброс» входного воздействия определяется по формуле (1), то, следуя принципу Лагранжа, при статическом нагружении системы мы должны иметь:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2, \qquad (2)$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости, соответственно, червяка и зубчатого колеса, а M – входной момент. В динамических же условиях, т. е. при наличии в системе движения, соотношение (2), следуя принципу Даламбера-Лагранжа, можно обобщить следующим образом:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2 - Q_{\text{тр}},$$

где $Q_{тр}$ – потери входной мощности на трение.

Величины потерь входной мощности на трение рассчитываются следующим образом:

$$Q_{\text{тр}} = k\int\limits_{\delta}^{\delta+\pi} F(\upsilon,\delta)(\Delta V, t)d\upsilon.$$

Здесь k – коэффициент трения, $\boldsymbol{t}$ – единичный вектор касательной в точке контакта, $\Delta\boldsymbol{V}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1=\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{v}_2=\rho_k\cdot\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{r}_k$, ρ_k – радиус-векторы точки контакта, соответственно, относительно оси вращения червяка и оси вращения зубчатого колеса.

Программа и метод расчета могут быть использованы и для других значений ε, d, z_2, a, M.

Таким образом, построена математическая модель нового вида зубчатого зацепления, а именно, эксцентриково-циклоидального зацепления с криволинейными зубьями. Модель включает в себя точные уравнения кривых – профилей деталей механизма и уравнения поверхностей этих деталей, а также алгоритм расчёта силовых характеристик. На основании этой модели создана компьютерная программа, позволяющая визуализировать процесс кинематически согласованного взаимодействия деталей механизма, получать значения КПД и величины контактных напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батурин А.Т., Ицкович Г.М. и др. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 264 с.
2. Пат. 2338105 РФ. МПК[8] F16H 55/08. Зацепление колес с криволинейными зубьями (варианты) и планетарная передача на его основе / В.В. Становской, С.М. Казакявичюс, Т.А. Ремнёва, В.М. Кузнецов. Заявлено 09.07.2007; опубликовано 10.11.2008, Бюл. № 31.
3. Савёлов А.А. Плоские кривые. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 294 с.

Поступила 24.02.2009.

Печатается в авторской редакции без учета мнений рецензентов