

УДК 519.2+338.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЁМА ПАРТИИ ТОВАРА НЕПРЕРЫВНО ПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Н.В. Степанова*, А.Ф. Терпугов

*Алтайский экономико-юридический институт, г. Барнаул
Томский государственный университет
E-mail: terpugov@mail.tsu.ru

Рассматривается задача определения оптимального объема партии продукции, выставленной на продажу, часть из которой портится с течением времени (например, фрукты, овощи и т. п.). Находится величина объема партии товара, обеспечивающая максимальную среднюю прибыль от её продажи.

Ключевые слова:

Портящаяся продукция, среднее время продажи, оптимальный объём партии.

1. Постановка проблемы

Пусть имеется некоторая продукция (например, фрукты, овощи и т. п.), которая портится с течением времени (овощи и фрукты гниют и т. д.).

Продавец покупает партию товара объёма Q_0 по оптовой цене d и продаёт её по розничной цене c . Ставится задача нахождения значения Q_0 , при котором средняя прибыль продавца будет максимальной [1].

2. Математическая модель порчи товара

Ниже предлагается одна из возможных математических моделей порчи товара.

Пусть товар состоит из отдельных элементов (например, картофель, фрукты и т. п.), которые могут испортиться в процессе хранения.

Пусть в партии товара $Q(t)$ таких элементов. Представим себе, что на интервале $[t, t+\Delta t]$ с вероятностью $p=\kappa\Delta t+o(\Delta t)$ каждый элемент может испортиться. Обозначим через $\Delta Q(t)$ число испортившихся на этом интервале элементов. Тогда каждый элемент можно рассматривать как опыт в схеме Бернулли, так что $\Delta Q(t)$ подчиняется биномиальному распределению

$$P\{\Delta Q\} = C_Q^{\Delta Q} p^{\Delta Q} (1-p)^{Q-\Delta Q}.$$

Отсюда легко находятся статистические характеристики ΔQ . Используя свойства биномиального распределения, получим

$$M\{\Delta Q\} = Qp = Q\kappa\Delta t + o(\Delta t),$$

и в диффузионном приближении коэффициент сноса процесса $Q(t)$ будет равен $\kappa Q(t)$.

Относительно $M\{\Delta Q^2\}$ имеем

$$\begin{aligned} M\{\Delta Q^2\} &= M\{\Delta Q\}^2 + D\{\Delta Q\} = \\ &= Q^2\kappa^2\Delta t^2 + Q\kappa\Delta t(1-\kappa\Delta t) + o(\kappa\Delta t). \end{aligned}$$

Поэтому в диффузионном приближении коэффициент диффузии процесса $Q(t)$ будет равен $\kappa Q(t)$.

Ниже мы рассмотрим даже более общую модель, считая коэффициент диффузии процесса $Q(t)$ равным $\sigma^2 Q(t)$.

Таким образом, если рассматривать только процесс порчи товара, то его количество можно аппроксимировать диффузионным процессом

$$dQ(t) = -\kappa Q(t)dt + \sqrt{\sigma^2 Q(t)}dw_t, \quad (1)$$

где w_t — стандартный винеровский случайный процесс.

3. Математическая модель продажи портящегося товара

Математическая модель продажи товара предложена в [1]. Пусть продажи образуют стационарный случайный процесс и $x(t)$ есть количество товара, проданного к моменту времени t . Обозначим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a_1 m_T}{T} = m_0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m_T(a_2 - a_1^2) + \sigma_T^2 a_1^2}{T} = \sigma_0^2, \quad (2)$$

где m_T и σ_T^2 — среднее и дисперсия числа покупок за время T . Будем считать, что покупатели покупают товар независимо друг от друга и объём покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\}=a_1$ и $M\{\xi^2\}=a_2$. Тогда диффузионное приближение для процесса $x(t)$ имеет вид [2]

$$dx(t) = m_0 dt + \sigma_0 dw_t, \quad (3)$$

где w_t — стандартный винеровский случайный процесс.

Объединяя (1) и (3), можно предложить следующую математическую модель количества товара $Q(t)$, оставшегося не проданным к моменту времени t :

$$dQ(t) = -(\kappa Q + m_0)dt + \sqrt{\sigma^2 Q + \sigma_0^2}dw_t,$$

которой мы и будем пользоваться в дальнейшем.

4. Среднее время до окончания продажи товара

Обозначим через $T(Q)$ среднее время, оставшееся до продажи всего товара, если в данный момент времени количество товара, имеющегося в наличии, было Q .

Пусть прошло бесконечно малое время Δt . Тогда количества товара, имеющегося в наличии в этот

момент времени, будет $Q - \Delta x$, где Δx количество проданного и испортившегося товара за промежуток времени Δt . Поэтому имеет место следующее основное соотношение

$$T(Q) = \Delta t + M \{T(Q - \Delta x)\}.$$

Предполагая $T(Q)$ дважды дифференцируемой функцией и разлагая её в ряд Тейлора, получим:

$$T(Q) = \Delta t + T(Q) - T'(Q)M\{\Delta x\} + \\ + \frac{1}{2}T''(Q)M\{\Delta x^2\} + o(\Delta t).$$

Учитывая математическую модель непроданного товара, получим

$$T(Q) = \Delta t + T(Q) - T'(Q)(\kappa Q + m_0)\Delta t + \\ + \frac{1}{2}T''(Q)(\sigma^2 Q + \sigma_0^2)\Delta t + o(\Delta t).$$

Сокращая $T(Q)$, деля на Δt и делая предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение относительно $T(Q)$:

$$\frac{1}{2}T''(Q)(\sigma^2 Q + \sigma_0^2) - T'(Q)(\kappa Q + m_0) = -1, \quad (4)$$

которое надо решать при следующих граничных условиях:

1. $T(0)=0$;
2. при $Q \rightarrow \infty T(Q)$ растёт не быстрее, чем линейная функция.

5. Асимптотика для $T(Q)$ при больших Q

Можно выписать точное решение для ур. (4), но оно очень громоздкое. Исследуем поэтому асимптотическое поведение $T(Q)$ при больших значениях Q , что соответствует тому, что объём партии товара, выставаемый на продажу, достаточно велик.

В этом случае ур. (4) можно приближенно заменить уравнением

$$\frac{1}{2}T''(Q)\sigma^2 Q - T'(Q)\kappa Q = -1,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{2}T''(Q) - \kappa T'(Q) = -\frac{1}{Q}. \quad (5)$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение. Обозначая $T'(Q) = T_1(Q)$, запишем его в виде

$$\frac{T_1'(Q)}{T_1(Q)} = \frac{2\kappa}{\sigma^2}.$$

Общее решение имеет вид

$$T_1(Q) = T'(Q) = C \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right),$$

где C — произвольная постоянная.

Общее решение ур. (5) будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$T'(Q) = C(Q) \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right).$$

Подставляя это решение в (5) и упрощая, придём к уравнению

$$C'(Q) = -\frac{2}{\sigma^2 Q} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right),$$

откуда

$$C(Q) = C_1 + \frac{2}{\sigma^2} \int_Q^\infty \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right),$$

так что

$$T'(Q) = C_1 \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right) + \\ + \frac{2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right) \int_Q^\infty \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right).$$

Однако в этом выражении первое слагаемое растёт как экспонента, что противоречит условию (2). Поэтому следует положить $C_1=0$, и тогда окончательно

$$T'(Q) = \frac{2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}Q\right) \int_Q^\infty \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right),$$

$$T(Q) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^Q \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}z\right) dz \int_z^\infty \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right).$$

Однако это выражение всё ещё слишком сложно для аналитического исследования. Для его упрощения переставим местами интегралы, получим

$$T(Q) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\int_0^Q \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right) \int_0^x \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}z\right) dz + \right. \\ \left. + \int_Q^\infty \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2\kappa}{\sigma^2}x\right) \int_0^Q \exp\left(\frac{2\kappa}{\sigma^2}z\right) dz \right].$$

Делая замены переменных

$$\frac{2\kappa}{\sigma^2}x = \xi, \quad \frac{2\kappa}{\sigma^2}z = \eta,$$

и обозначая $(2\kappa/\sigma^2)Q = \bar{Q}$, получим окончательно

$$T(Q) = \frac{1}{\kappa} \left[\int_0^{\bar{Q}} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} d\xi + (e^{\bar{Q}} - 1) \int_{\bar{Q}}^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right].$$

Заметим, что $\int_{\bar{Q}}^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi = E_1(\bar{Q})$ — один из вари-

антов интегральной показательной функции [3. Ф-ла 5.11], а

$$\int_0^{\bar{Q}} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} d\xi = E_1(\bar{Q}) + \ln \bar{Q} + \gamma \quad [3. \Phi\text{-ла } 5.1.39],$$

где γ — постоянная Эйлера. Таким образом,

$$T(Q) = \frac{1}{\kappa} [e^{\bar{Q}} E_1(\bar{Q}) + \ln \bar{Q} + \gamma].$$

При больших значениях аргумента верна асимптотика [3. Ф-ла 5.1.51], так что при больших $\bar{Q}$ приближенно

$$T(Q) \sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln \bar{Q} + \gamma + O\left(\frac{1}{\bar{Q}}\right) \right],$$

или, возвращаясь к Q ,

$$T(Q) \sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln Q + \bar{\gamma} + O\left(\frac{1}{Q}\right) \right], \quad (6)$$

где $\bar{\gamma}$ – некоторая константа.

6. Уточнение асимптотики

Вернёмся к уравнению (4).

По аналогии с (6) будем искать асимптотику $T(Q)$ в виде

$$T(Q) = A \ln(1 + \beta Q),$$

где A и β – некоторые константы. Тогда имеем

$$T'(Q) = \frac{A\beta}{1 + \beta Q}, \quad T''(Q) = -\frac{A\beta^2}{(1 + \beta Q)^2}.$$

Подстановка этих выражений в (4) даёт

$$\frac{A\beta^2}{2(1 + \beta Q)^2} (\sigma^2 Q + \sigma_0^2) + \frac{A\beta}{1 + \beta Q} (\kappa Q + m_0) = 1. \quad (7)$$

Умножая это уравнение на Q и переходя к пределу $Q \rightarrow \infty$, получим

$$A = 1/\kappa.$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\kappa(1 + \beta Q)}{\kappa(1 + \beta Q)}, \\ \frac{A\beta(\kappa Q + m_0)}{1 + \beta Q} - \frac{\kappa(1 + \beta Q)}{\kappa(1 + \beta Q)} &= \\ &= \frac{\beta(\kappa Q + m_0)}{\kappa(1 + \beta Q)} - \frac{\kappa(1 + \beta Q)}{\kappa(1 + \beta Q)} = \frac{\beta m_0 - \kappa}{\kappa(1 + \beta Q)}, \end{aligned}$$

и уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\beta^2}{2\kappa(1 + \beta Q)^2} (\sigma^2 Q + \sigma_0^2) + \frac{\beta m_0 - \kappa}{\kappa(1 + \beta Q)} = 0.$$

Умножая на $1 + \beta Q$ и переходя к пределу $Q \rightarrow \infty$, получим

$$\beta = \frac{2\kappa}{2m_0 + \sigma^2},$$

что и даёт окончательное выражение для асимптотики $T(Q)$

$$T(Q) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{2\kappa Q}{2m_0 + \sigma^2} \right).$$

Заметим, что при такой асимптотике автоматически получается $T(0)=0$.

7. Определение оптимального объёма партии товара

Пусть для реализации приобретается партия товара объёма Q_0 . Она продается со средней скоростью m_0 по розничной цене c в течение времени T_0 . Так как покупается она по оптовой цене d , то средняя выручка от продажи этой партии составит

$$\Pi = m_0 c T_0 - d Q_0,$$

где $T_0 = \kappa^{-1} \ln(1 + \beta Q_0)$.

Примем, что после реализации партии товара продавец тратит время T_b на приобретение следующей партии. Тогда средняя прибыль продавца в единицу времени составит величину

$$\begin{aligned} C &= \frac{m_0 c T_0 - d Q_0}{T_0 + T_b} = \frac{m_0 c \kappa^{-1} \ln(1 + \beta Q_0) - d Q_0}{\kappa^{-1} \ln(1 + \beta Q_0) + T_b} = \\ &= m_0 c \frac{\ln(1 + \beta Q_0) - \frac{d\kappa}{m_0 c} Q_0}{\ln(1 + \beta Q_0) + \kappa T_b}. \end{aligned}$$

Величину $(d\kappa)/(m_0 c)$ в дальнейшем будем для краткости обозначать α .

Обозначим $\beta Q_0 = z$. Тогда задача нахождения оптимального значения Q_0 примет вид

$$f(z) = \frac{\ln(1 + z) - \alpha z}{\ln(1 + z) + \kappa T_b} \Rightarrow \max_z.$$

После некоторых упрощений, имеем

$$f'(z) = \frac{\frac{\kappa T_b + \alpha z}{1 + z} - \alpha \ln(1 + z) - \alpha \kappa T_b}{(\ln(1 + z) + \kappa T_b)^2}.$$

Отсюда

$$f'(0) = \frac{1 - \alpha}{\kappa T_b}.$$

Очевидно, что продажа товара имеет смысл только тогда, когда $f'(0) > 0$. Поэтому условие, когда имеет смысл торговать товаром, имеет вид $\alpha < 1$.

Само оптимальное значение z находится из условия $f'(0)=0$, которое приводится к виду

$$(1 + z) \ln(1 + z) = \left(\frac{\kappa}{\alpha} T_b + z \right) - (1 + z) \kappa T_b. \quad (8)$$

Функция $(1 + z) \ln(1 + z)$ является выпуклой вниз монотонно возрастающей функцией, которая растёт быстрее, чем линейная, причем при $z=0$ она принимает значение 0. С другой стороны линия

$$\left(\frac{\kappa}{\alpha} T_b + z \right) - (1 + z) \kappa T_b$$

есть прямая, которая при $z=0$ принимает значение $\kappa T_b(1/\alpha - 1) > 0$. Поэтому уравнение (8) имеет единственный корень, определяющий оптимальное значение z , а, вместе с ним, и оптимальное значение $Q_0 = z/\beta$. Найти его можно лишь численно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф. Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. — 93 с.
2. Степанова Н.В., Терпугов А.Ф. Определение оптимального объема партии товара скоропортящейся продукции // Вестник

Сибирского государственного аэрокосмического университета. — 2008. — Вып. 4 (2). — С. 60–64.

3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 830 с.

Поступила 12.03.2009 г.

УДК 336.226.332

ВОЗМОЖНОСТЬ ЗАМЕНЫ ТРАНСПОРТНОГО НАЛОГА ПУТЕМ УВЕЛИЧЕНИЯ СТАВКИ АКЦИЗОВ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ГОРЮЧЕ-СМАЗОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.А. Вазим

Томский политехнический университет
E-mail: vazim@tpu.ru

С использованием данных Федерального казначейства и Росстата РФ проанализированы возможные последствия отказа от транспортного налога и одновременного увеличения ставок акцизов на реализацию горюче-смазочных материалов. Показано, что данное изменение в налоговой системе позволит получить положительные результаты социально-экономической политики в большей степени, чем негативные. Замена транспортного налога на повышение ставок акцизов упростит задачу увеличения доходов Дорожного фонда РФ. Рассчитаны возможные налогово-бюджетные последствия различных вариантов повышения ставки акцизов на реализацию горюче-смазочных материалов.

Ключевые слова:

Транспортный налог, акцизы, региональные налоги, региональные бюджеты.

В связи с финансово-экономическим кризисом и растущим дефицитом бюджетов на всех трех уровнях бюджетной системы возникает целый ряд предложений по налоговым новациям. К таким предложениям относятся предложения по отмене транспортного налога с одновременным увеличением ставок акцизов. Транспортный налог является целевым, он направляется на развитие и содержание автомобильных дорог. Однако в настоящее время возникает разрыв между растущими потребностями в финансовых поступлениях в бюджеты дорожных фондов и возможностью увеличивать налоговые доходы. Так, в ряде регионов страны законодатели уже повысили ставки транспортного налога до предельно возможного уровня, обозначенного ст. 361 Налогового кодекса, табл. 1 [1–7]. Кроме того, в настоящее время схема расчета налога не предполагает зависимости суммы налога и величины пользования дорогами. Таким образом, решить возникшее противоречие можно либо внесением изменений в Налоговый кодекс с сохранением схемы расчета налога, либо отказом от транспортного налога с выбором нового источника налоговых поступлений.

Для выбора оптимального решения данной проблемы рассмотрим **аргументы «за» или «против» изменений налоговой системы.**

К конструктивным предложениям можно отнести законодательную инициативу депутатов Волгоградской думы об отмене транспортного налога с одновременным увеличением акцизов на дизельное топливо, на моторные масла, на автомобильный и на прямой бензин (далее — акцизы на ГСМ) [8, 9]. Такую позицию можно назвать соот-

ветствующей интересам автомобилистов, поскольку вместо фиксированной ставки транспортного налога предлагается платить акцизы в зависимости от объема потребления топлива. По мнению авторов законопроекта, недостаток существующей схемы сбора транспортного налога заключается в том, что водителям, которые проезжают сотни километров в день, и водителям, которые выезжают на дороги несколько раз в год, приходится платить одинаковую сумму. По действующим правилам транспортный налог рассчитывается исходя из мощности автомобиля, т. е. по количеству лошадиных сил [1–7]. В случае же повышения акциза, автомобилисты смогут платить налог в соответствии с пробегом автомобиля за год.

Кроме того, нововведение предоставляет в определенной степени возможность автолюбителям самим регулировать годовую сумму налоговых отчислений за имеющееся у него транспортное средство: для сокращения налоговых отчислений можно эксплуатировать автомобиль реже. Таким образом, документ предлагает более либеральную форму уплаты налогов за эксплуатируемый автомобиль: «Мы понимаем, что это приведет к увеличению цены на топливо, но ведь взамен водители не будут платить транспортный налог», — так выразил свою позицию Председатель комитета по бюджету, налогам и финансовой политике Волгоградской думы В.Г. Попов [8].

Однако новый законопроект не был поддержан. Так, против данного законопроекта высказались депутаты Мосгордумы и приняли постановление с отказом в поддержке инициативы волгоградских коллег. Однако ни одним противником законопро-