УДК 624.131.37:51-3

## КАЛИБРОВКА ПАРАМЕТРОВ УПРУГОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Л.А. Строкова

Томский политехнический университет E-mail: geyer@tpu.ru

Представлены результаты калибровки модулей упругости для расчетной модели основания инженерного сооружения по данным моделирования компрессионных испытаний грунта. Моделирование осуществлялось при помощи упруго-пластической модели с изотропным упрочнением Hardening Soil (HS, PLAXIS). Калибровка параметров подразумевала совпадение расчетных кривых с кривой, полученной при лабораторном испытании. Установлены параметры упругости для последующего численного моделирования осадки.

## Ключевые слова:

Обратная задача моделирования, калибровка, численное моделирование, параметры модели, упруго-пластическая модель с упрочнением.

Моделирование играет важную роль при изучении сферы взаимодействия инженерного сооружения с геологической средой. Для решения таких геотехнических проблем, как устойчивость склонов, несущая способность основания, устойчивость подпорных стенок, при условии работы основания вдали от предельного состояния, математические модели могут быть сформулированы в замкнутой аналитической форме: уравнения упругости и предельного состояния Мора-Кулона. Огромный вклад в разработку замкнутых аналитических решений внесла советская школа геомехаников Н.М. Герсеванов, В.А. Флорин, В.В. Соколовский, В.Г. Березанцев и др.

Однако вблизи предельного состояния описать этими уравнениями реальное поведение грунта в основании сооружения невозможно из-за проявления нелинейности кривой напряжения — деформации. Для решения таких задач с конца 60-х гг. прошлого века разработаны численные методы, в которых решение сложных математических задач сводится к последовательному выполнению большого числа простых арифметических операций. Одновременно потребовалось расширение экспериментов по изучению поведения грунта в различных условиях 3-мерного нагружения: с учетом изменения знака нагружения, ротации главных напряжений.

Благодаря успехам вычислительной техники и наличию разнообразных математических моделей, стала возможной имитация лабораторных и полевых испытаний. Важным моментом является проверка модели на соответствие двух условий: а) правильности выбора определяющего уравнения грунтов и б) правильности назначения входных параметров, их калибровка, под которой подразумевается совпадение расчетных данных и кривой, полученной при лабораторном испытании.

Назначение входных параметров грунтов при разработке расчетных моделей грунтовых оснований вызывает некоторые затруднения пользовате-

лей программных продуктов. Среди трудностей следует отметить следующие.

- Параметры грунтов практически всегда являются величинами неточными из-за: а) случайных ошибок, связанных с естественной природой самого объекта и ошибок (погрешностей), возникающих при отборе проб; б) неопределенностей, связанных с технологией определения параметров, например, погрешности аналитических устройств, их неточная калибровка.
- 2. Узаконенная методика определения показателей механических свойств грунтов (ГОСТ 12248-96) оперирует с интервальной оценкой сопротивления пород в приложенном диапазоне нагрузок, их знака, изменению во времени, а для выполнения расчетов необходима точечная, а не интервальная оценка параметров. И не всегда использование среднего значения интервальной оценки параметра является оптимальным.

Перечисленные трудности в значительной мере объясняются сложностью и большим числом взаимосвязанных параметров, описывающих поведение пород, неоднозначной зависимостью между напряжениями и деформациями. Использование метода конечных элементов при решении обратной задачи моделирования, когда некоторые параметры модели неизвестны (например, не могут быть измерены явно), и требуется их найти, сопоставляя поведение реальной системы с её моделью, позволяет назначить параметры, наиболее совершенно отражающие его поведение, при значительном снижении ресурсоемкости процесса изучения поведения грунта.

В качества примера ниже приводятся результаты калибровки параметров грунтов по данным компрессионных испытаний. В ходе предварительных лабораторных испытаний миоценовой флювиогляциальной тугопластичной глины (удельный вес 20 кH/м<sup>3</sup>, сцепление 9,7 кH/м<sup>2</sup>, угол внутреннего трения 30,9°) было установлено, что модуль де-



🗕 Первичное нагружение 🔶 Разгрузка 💛 Вторичное нагружение 📥 Окончательная разгрузка

Рис. 1. Элементы компрессионной кривой по данным лабораторных испытаний

формации грунта изменяется в интервале 2,2...10,1 МПа в диапазоне изменения нагрузок 2...250 кПа при первом нагружении, и в интервале 6,0...75,4 МПа – при повторном нагружении.

Имитация компрессионных испытаний проводилась с использованием упруго-пластической модели с изотропным упрочнением Hardening Soil, реализованной в программном комплексе PLAXIS [1].

Упругопластическая модель с изотропным упрочнением Hardening Soil PLAXIS [2–5] включает: в качестве поверхности разрушения — формулировку Мора-Кулона; для описания упругой области напряженно-деформированного состояния — гиперболическую формулировку Duncan-Chang [4] с изменяемыми модулями упругости для траектории первичного нагружения и траектории разгружения — повторного нагружения; для описания пластических сдвиговых и объемных деформаций — две функции текучести для девиаторного  $f^{s}$  и изотропного f нагружений, соответственно, рис. 2,  $\delta$ .

Модель точно описывает поведение грунта при экскавации грунта, при устройстве подпорных стен и проходке туннелей, сопровождающейся уменьшением среднего эффективного напряжения и одновременно мобилизацией сопротивления пород сдвигу. Ограничения модели: неспособность учесть явления анизотропии прочности и жесткости, ползучести и длительной прочности, непригодность для моделирования динамических процессов [5]. Основные определяющие уравнения: гиперболическое отношение; суммируемость деформаций; функция текучести; закон пластического течения материала; закон пластического упрочнения.

Для описания нелинейной упругой области используется гиперболическое отношение между девиаторным напряжением q и деформацией  $\varepsilon$  в ходе дренированных трехосных испытаний (рис. 2, a), впервые предложенное R.L. Kondner и J.S. Zelasko, в 1963 г., дополненное J.M. Duncan и C.-Y. Chang в 1970 г.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\mathring{A}_{50}} \frac{q}{1 - q/q_a}$$

Асимптотическое девиаторное напряжение  $q_a$  связано с максимальным девиаторным напряжением  $q_f$ уравнением  $q_a = q_f/R_f$ , где

$$q_f = (c' \cdot \operatorname{ctg} \varphi' + \sigma'_3) \frac{2\sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'}.$$

Величина *R<sub>f</sub>* для большинства грунтов изменяется в пределах 0,75...1 [4].

Секущий модуль упругости  $E_{50}^{ref}$  и модуль упругости при разгрузке — повторном нагружении  $E_{ur}^{ref}$  являются величинами, зависящими от сцепления c, угла внутреннего трения  $\varphi$ , сдерживающего напряжения  $\sigma_3'$ , определяются из трехосных испытаний по формулам



**Рис. 2.** Гиперболическое отношение между напряжениями и деформациями (слева) и поверхности текучести модели Hardening-Soil (справа)

$$E_{\rm so} = E_{\rm so}^{\rm ref} \left( \frac{c\cos\varphi - \sigma_{\rm s}^{\prime}\sin\varphi}{c\cos\varphi + p^{\rm ref}\sin\varphi} \right)$$

И

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left( \frac{c \cos \varphi - \sigma'_{3} \sin \varphi}{c \cos \varphi + p^{ref} \sin \varphi} \right)^{m}$$

Независимые от времени, упругие и пластические приращения деформаций действуют независимо друг от друга. Полное приращение деформации складывается из упругих и пластических приращений:  $d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{ii}^{e} + d\varepsilon_{ii}^{p}$ .

В процессе пластического деформирования поверхность текучести изменяется двояко.

 Функция текучести для девиаторного нагружения *f*<sup>s</sup>описывает пластические сдвиговые деформации и задается уравнением

$$f^{s} = \frac{1}{2E_{50}} \frac{q}{1 - q/q_{a}} - \frac{2q}{E_{ur}} - \gamma^{p},$$

где  $\gamma^{p} = -(\varepsilon_{1}^{p} - \varepsilon_{2}^{p} - \varepsilon_{3}^{p})$  – параметр упрочнения. При девиаторном нагружении пластические объемные деформации пренебрежительно малы по сравнению с сдвиговыми, т. е.  $\gamma^{p} \approx -2\varepsilon_{1}^{p}$ . При первичном нагружении проявляются и упругие  $\varepsilon^{e}$ , и пластические  $\varepsilon^{p}$  деформации. При разгрузке – повторном нагружении возникают преимущественно упругие деформации, которые при трехосных испытаниях определяются  $\varepsilon_{1}^{e} = q/E_{w}$ , причем  $\varepsilon_{2}^{e} = \varepsilon_{3}^{e} = -v_{w}(q/E_{w})$ .

Потенциал пластичности при девиаторном нагружении g<sup>s</sup> задается уравнением

$$g^{s} = (\sigma_1' - \sigma_3') - (\sigma_1' + \sigma_3') \sin \psi_n$$

где  $\psi_m$  — мобилизованный угол дилатансии, определяемый по закону дилатансии Rowe [1].

Поверхность текучести не совпадает с потенциальной поверхностью ( $g \neq f^s$ ), т. е. действует неассоциированный закон течения.

2) Функция текучести для изотропного нагружения  $f^c$ описывает пластические объемные дефор-

мации и задается уравнением  $f^c = d^2/\alpha^2 - p_p^2$ . Поверхность текучести  $f^c$  изменяется независимо от  $f^s$ . Размеры и формы этой поверхности текучести определяются параметрами  $\alpha$  и преднапряжением консолидации  $p_p$ . Оба эти параметрами являются внутренними параметрами программы PLAXIS и определяются по входным параметрам. Параметр  $\alpha$ зависит от коэффициента бокового давления для нормально-консолидированного грунта  $K_0^{NC}$  и от отношения  $E_{5ed}^{ref}$ . Параметр  $p_p$  зависит, главным образом, от модуля упругости  $E_{oed}^{ref}$ , определяемого из компрессионных испытаний по формуле:

$$E_{\scriptscriptstyle oed} = E_{\scriptscriptstyle oed}^{\scriptscriptstyle ref} \left( \frac{c \cos \varphi - \sigma_1' \sin \varphi}{c \cos \varphi + p^{\scriptscriptstyle ref} \sin \varphi} \right)^{\scriptscriptstyle m},$$

где m — показатель степени, предложенный Ohde (1937) для оценки изменения модуля упругости при изменении действующего напряжения по отношению к опорному (атмосферному) давлению  $p^{ref} \approx 100 \text{ kH}/\text{M}^2$  [6]. Параметр m для большинства грунтов изменяется в пределах 0,4...1.

Поверхность текучести при изотропном нагружении совпадает с потенциальной поверхностью  $(g^c = f^c)$ , т. е. действует ассоциированный закон течения.

Для задания модели необходимо 10 параметров, табл. 1.

Для имитации компрессионных испытаний в PLAXIS была выбрана осесимметричная модель с размерами 35×20 мм. Поведение грунта при вертикальном сжатии в условиях невозможности бокового расширения задано для основания модели в виде сплошной заделки, а вертикальных стенок – в виде шарнирно подвижных опор. Сетка конечных элементов из неправильных треугольных 15-узловых элементов сгенерирована PLAXIS автоматически. После создания сетки были заданы начальные условия по воде (удельный вес воды – 10 кН/м<sup>3</sup>, вертикальные границы водонепроницаемы, горизонтальные границы открыты для фильтрации воды) и свойства грунта; сгенерировано начальное состояние эффективных напряжений. Операции первичного нагружения, разгрузки, повторного нагружения и окончательной разгрузки в виде шагов расчета *step-by-step* осуществлялось опцией Total multipliers  $\Sigma$ -MloadA: 10, 50, 100, 200, 400, 50, 10, 50, 100, 200, 400, 800 кПа соответственно.

| Таблица 1. | Перечень  | параметров | грунта | ДЛЯ | модели | PLAXIS |
|------------|-----------|------------|--------|-----|--------|--------|
|            | Hardening | Soil       |        |     |        |        |

|                  | Символ                          | Название  | Ед. изм. |  |  |  |
|------------------|---------------------------------|---|----------|--|--|--|
|                  | $E_{50}^{ref}$                  | Секущий модуль упругости при 50 % значении ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) из трехосных испытаний   |          |  |  |  |
|                  |                                 | (Reference stiffness for triaxial compression)  |          |  |  |  |
|                  | E <sub>oed</sub> <sup>ref</sup> | Тангенциальный модуль упругости из ком-<br>прессионных испытаний (Reference stif-<br>fness for primary oedometer loading)                   |          |  |  |  |
|                  | E <sub>ur</sub> ref             | Модуль упругости при разгрузке-повтор-<br>ном нагружении из компрессионных испы-<br>таний (Reference stiffness for triaxial unloa-<br>ding) |          |  |  |  |
|                  | V <sub>ur</sub>                 | Коэффициент Пуассона при разгрузке-пов-<br>торном нагружении, по умолчанию <i>v<sub>ur</sub>=</i> 0,2                                       | -        |  |  |  |
|                  | <i>m</i> (power)                | Показатель степени, для описания влияния<br>ограничивающего давления на модуль<br>упругости, определяется из компрессион-<br>ных испытаний  | _        |  |  |  |
|                  | K <sub>0</sub>                  | Коэффициент бокового давления грунта<br>$K_0 = \sigma'_{xx} / \sigma'_{yy}$ при консолидации, по Jaky<br>(1944) $K_0^{NC} = 1 - \sin \phi$  | _        |  |  |  |
| p <sup>ref</sup> |                                 | Опорный уровень напряжений (Reference stress for stiffnesses), по умолчанию $p^{ret}$ 100   | кН/м²    |  |  |  |
|                  |                                 | Эффективное сцепление из трехосных ис-<br>пытаний   |          |  |  |  |
|                  | ${m arphi}'({ m phi})$          | Эффективный угол внутреннего трения из трехосных испытаний  | [D]      |  |  |  |
|                  | $\psi$ (psi)                    | Угол дилатансии из трехосных испытаний<br>(КД), обычно <i>ψ=φ</i> −30°  | град     |  |  |  |

После выполнения расчетов в PLAXIS, данные расчета последний фазы выводились в виде графика *eps-yy=f(sig'-yy)* на экран и в табличной форме копировались в MS Excel, где и выполнялся окончательный анализ данных.

Использование в расчетах среднего значения модуля упругости при первичном нагружении  $E_{50}$ =6,1 MH/м<sup>2</sup> из интервала значений, полученных при лабораторных испытаниях (рис. 2), не дало удовлетворительных результатов. Тогда было решено провести вычислительный эксперимент по следующей схеме.

Соответствие расчетных данных и компрессионной кривой, полученной при лабораторных испытаниях, предложено оценивать варьированием трех показателей: модуля упругости при первичном нагружении  $E_{50}$ , модуля упругости при разгрузке вторичном нагружении  $E_{ur}$  и параметра *m* [6], описывающего степень кривизны компрессионной кривой при изменении эффективного давления  $\sigma'$ по отношению к опорному (атмосферному) давлению  $p^{ref} \approx 100 \text{кH/M}^2$  и параметров прочности — сцепления *с* и угла внутреннего трения  $\varphi$ . Варьируемые параметры по вариантам расчета показаны в табл. 2 заливкой ячеек. Варьирование осуществлялось в три этапа – по трем столбцам таблицы, в начале по параметру  $E_{50}$  в интервале 2,7...9,0 МН/м<sup>2</sup>, затем по параметру *m* в диапазоне 0,3...0,8 и, в последнюю очередь, по параметру  $E_{ur}$  путем умножения модуля упругости при первичном нагружении на фактор *n*,  $E_{ur} = nE_{50}$ . Фактор *n* менялся в интервале 3...10.

|                    | Модуль у                                |  |                          |
|--------------------|---|--|--------------------------|
| Вариант<br>расчета | При первичном<br>нагружении <i>E</i> 50 | При разгрузке <sup>—</sup> пов-<br>торном нагружении<br><i>п</i> ∙ <i>E</i> 50= <i>E</i> <sub>ur</sub> | Параметр<br><i>m</i> [-] |
| 1                  | 2,7                                     | $3 \cdot E_{50} = 8,1$   | 0,8                      |
| 2                  | 4                                       | $3 \cdot E_{50} = 12$  | 0,8                      |
| 3                  | 5                                       | $3 \cdot E_{50} = 15$  | 0,8                      |
| 4                  | 9                                       | $3 \cdot E_{50} = 27$  | 0,8                      |
| 5                  | 5                                       | $3 \cdot E_{50} = 15$  | 1,0                      |
| 6                  | 5                                       | $4 \cdot E_{50} = 20$  | 0,3                      |
| 7                  | 5                                       | $4 \cdot E_{50} = 20$  | 0,6                      |
| 8                  | 5                                       | $4 \cdot E_{50} = 20$  | 0,8                      |
| 9                  | 5                                       | $4 \cdot E_{50} = 20$  | 1,0                      |
| 10                 | 5                                       | $5 \cdot E_{50} = 25$  | 0,8                      |
| 11                 | 5                                       | $7 \cdot E_{50} = 35$  | 0,8                      |
| 12                 | 5                                       | 8.E <sub>50</sub> =40  | 0,8                      |
| 13                 | 5                                       | 10- <i>E</i> <sub>50</sub> =50   | 0,8                      |

Таблица 2. Калибровка модулей упругости по данным компрессионных испытаний

Результаты численного моделирования компрессионных испытаний представлены на рис. 3–5.

Как видно из рис. 3, для расчетных кривых со средним значением модуля упругости и лабораторной компрессионной кривой характерно совпадение общих тенденций изменения параметров, но реальные деформации значительно меньше расчетных при тех же напряжениях.

Следующим шагом вычислительного эксперимента на базе построенной расчетной модели было варьирование модуля упругости при первичном нагружении E при постоянных значениях модуля упругости при разгружении – повторном нагружении  $E_{ur}$ , равным  $E_{ur}=3E$ , и параметра m, равным 0,8 согласно [1, 5]. Результаты этого этапа эксперимента позволили установить значение модуля упругости при первичном нагружении E=5 МПа, при котором отклонение от реальных данных минимально.

Результаты вычислительного эксперимента с изменением параметра m представлены на рис. 4. При малом значении m=0,3 моделирование компрессионных кривых первичного нагружения и разгрузки приводит к заниженным значениям деформаций, а повторного нагружения и окончательной разгрузки — к завышенным по сравнению с реальными значениями деформаций. При повышении параметра m до 1 относительные отклонения расчетной и реальной кривых снижаются. Поэтому



- labor → Eur=6\*E → Eur=3\*E

**Рис. 3**. Расчет со средним значением модуля упругости E=6,1 MH/м<sup>2</sup> при разных значениях модуля упругости при разгружении – повторном нагружении E<sub>ur</sub>



Рис. 4. Подбор параметра т

для последующих расчетов выбрано значение параметра m=0,8.

На заключительной стадии эксперимента определено значение фактора *n* для участков разгрузки – повторного нагружения. Наилучшее совпадение кривых наблюдалось при множителе *n*=7. Окончательно были приняты следующие значения модулей упругости при первом нагружении  $E_{50}=5$  МПа, при разгружении – повторном нагружении  $E_{ur}=35$  МПа, m=0,8. При этих значениях отклонения расчетной и реальной компрессионной кривой минимальны.



**Рис. 5.** Сравнение моделей упругой идеально-пластической среды Mohr-Coulomb (MC) и упруго-пластической модели с изотропным упрочнением Hardening Soil (HS)

Для сравнения рассчитана компрессионная кривая по определяющему уравнению упругой идеально-пластической среды в формулировке Mohr-Coulomb (MC, PLAXIS; рис. 5). Как видно по графику, модель упруго-пластической модели с изотропным упрочнением Hardening Soil описывает поведение компрессионного сжатия грунта значительно лучше.

## Выводы

 Показано, что с помощью метода конечных элементов возможно не только выполнение рас-

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Brinkgreve R.B.J. et al. PLAXIS, 2D Version 8. Balkema, 1997. 200 р. [Электронный ресурс]. – режим доступа: http://www.plaxis.nl/index.php?cat=manuals&mouse=Plaxis%20V8. – 11.11.2008.
- Schanz T. Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien // Mitt. Inst. f
  ür Geotechnik 45. Universit
  ät Stuttgart. – Stuttgart, 1998. – 152 S.
- Schanz T., Vermeer P.A., Bonnier P.G. The Hardening-Soil Model: Formulation and verification // Beyond 2000 in Computational Geotechnics. – Balkema, Rotterdam, 1999. – Р. 281–290 [Электронный ресурс]. – режим доступа: http://www.uni-stuttgart.de/igs/content/publications/40.pdf. – 11.11.2008.

четов различных предельных состояний оснований, но и установление неявных параметров грунта, используемых в качестве вводных.

- Несмотря на слабую разработку теории планирования вычислительных экспериментов, предложенная схема проведения вычислительного эксперимента и ее реализация позволила при малых затратах ресурсов откорректировать параметры упругости упруго-пластической модели, широко используемой в современных расчетах деформаций оснований.
- Duncan J.M., Chang C.-Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils // ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970. – № 96 (SM5). – P. 1629–1653.
- Brinkgreve R.B.J. Selection of soil models and parameters for geotechnical engineering application // Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection, and Calibration / Ed. J.A. Yamamuro, V.N. Kaliakin. – American Society of Civil Engineers, 2005. – V. 128. – P. 69–98.
- Ohde J. Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund // Der Bauingenieur. – 1939. – № 20. – H. 33/34. – S. 451–459.

Поступила 25.11.2008 г. Доработана 20.04.2009 г.