

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Институт: Энергетический  
Направление подготовки Физика  
Кафедра Теоретической и промышленной теплотехники

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

Тема работы
<b>МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ-ХРАНИЛИЩАХ ПРИРОДНОГО ГАЗА</b>

УДК 621.1.016.7.001.6:622.691.2

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
5ФМ41	Толстолуцкая Анастасия Андреевна		

Руководитель

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент кафедры ТПТ	Максимов Вячеслав Иванович	К.Т.Н.		

**КОНСУЛЬТАНТЫ:**

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент кафедры менеджмента	Фигурко Аркадий Альбертович	К.Э.Н.		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
доцент кафедры ЭБЖ	Антоневич Ольга Алексеевна	к.б.н.		

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:**

Зав. кафедрой	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Теоретической и промышленной теплотехники	Кузнецов Гений Владимирович	д.ф.-м.н., профессор		

Томск – 2016 г.

## ЗАПЛАНИРОВАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Код результата	Результат обучения (Выпускник должен быть готов)
<i>Общекультурные (универсальные) компетенции</i>	
P1	Понимает необходимость самостоятельного обучения и повышения квалификации в течение всего периода профессиональной деятельности.
P2	Проявляет способность эффективно работать самостоятельно в качестве члена команды по междисциплинарной тематике, быть лидером в команде, консультировать по вопросам проектирования научных исследований, а также быть готовым к педагогической деятельности.
P3	Умеет находить зарубежных и отечественных партнеров, владеет иностранным языком, позволяющим работать с зарубежными партнерами с учетом культурных, языковых и социально-экономических условий.
P4	Проявляет понимание используемых методов, области их применения, вопросов безопасности и здравоохранения, юридических аспектов, ответственности за профессиональную деятельность и ее влияния на окружающую среду.
P5	Следует кодексу профессиональной этики, ответственности и нормам научно-исследовательской деятельности.
<i>Профессиональные компетенции</i>	
P6	Проявляет глубокие естественнонаучные, математические профессиональные знания в проведении научных исследований в перспективных областях профессиональной деятельности.
P7	Принимает участие в фундаментальных исследованиях и проектах в области физики металлов и материаловедения, а также в модернизации современных и создании новых методов изучения механических, электрических, магнитных, тепловых свойств твердых тел.
P8	Способен обрабатывать, анализировать и обобщать научно-техническую информацию, передовой отечественный и зарубежный опыт в профессиональной деятельности, осуществлять презентацию научной деятельности.
P9	Способен применять полученные знания для решения нечетко определенных задач, в нестандартных ситуациях, использует творческий подход для разработки новых оригинальных идей и методов исследования в области физики металлов, материаловедения и термообработки.
P10	Способен планировать проведение аналитических имитационных исследований по профессиональной деятельности с применением современных достижений науки и техники, передового отечественного и зарубежного опыта в области научных исследований, умеет критически оценивать полученные теоретические и экспериментальные данные и делает выводы, знает правовые основы в области интеллектуальной собственности.
P11	Умеет интегрировать знания в различных и смежных областях научных исследований и решает задачи, требующие абстрактного и креативного мышления и оригинальности в разработке концептуальных аспектов проектов научных исследований.

# МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

## «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт Энергетический

Направление подготовки Теплоэнергетика и теплотехника

направление – Физика

Кафедра Теоретической и промышленной теплотехники

УТВЕРЖДАЮ:

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Кузнецов Г. В.

(Подпись) (Дата)

### ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

В форме:

Магистерской диссертации

Студенту:

Группа	ФИО
5ФМ41	Толстолицкой Анастасии Андреевне

Тема работы:

**Математическое моделирование термогравитационной  
конвекции в низкотемпературных резервуарах-хранилищах  
природного газа**

Утверждена приказом директора (дата, номер)

от 28.12.2015, № 10155/с

Срок сдачи студентом выполненной работы:

03.06.16

### ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:

#### Исходные данные к работе

*(наименование объекта исследования или проектирования; производительность или нагрузка; режим работы (непрерывный, периодический, циклический и т. д.); вид сырья или материал изделия; требования к продукту, изделию или процессу; особые требования к особенностям функционирования (эксплуатации) объекта или изделия в плане безопасности эксплуатации, влияния на окружающую среду, энергозатратам; экономический анализ и т. д.).*

Физическая модель резервуара-хранилища сжиженного природного газа с нарушениями изоляции на внешних границах. Модель с известными тепло- и гидродинамическими параметрами.

<b>Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов</b> (аналитический обзор по литературным источникам с целью выяснения достижений мировой науки техники в рассматриваемой области; постановка задачи исследования, проектирования, конструирования; содержание процедуры исследования, проектирования, конструирования; обсуждение результатов выполненной работы; наименование дополнительных разделов, подлежащих разработке; заключение по работе).	Аналитический обзор по литературным источникам с целью выяснения мировой науки в рассматриваемой области. Создание математической модели, реализация программы на языке высокого уровня. Анализ полученных данных при численном моделировании. Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение. Социальная ответственность. Заключение
<b>Перечень графического материала</b>	<b>Презентация (12 сл.)</b>

<b>Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы</b>	
<b>Раздел</b>	<b>Консультант</b>
Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	Фигурко А.А.
Социальная ответственность	Антоневич О.А.
Раздел на иностранном языке	Крайнов А.В.
<b>Название разделов, которые должны быть написаны на русском и иностранном языках:</b>	
Введение	
Глава 1. Современное состояние моделирования естественной конвекции в хранилищах сжиженного природного газа	
Глава 2. Постановка задачи конвективного теплопереноса вязкой несжимаемой жидкости в замкнутой прямоугольной области.	
Глава 3. Численные исследования основных закономерностей естественной конвекции в хранилищах сжиженного природного газа при нарушении тепловой изоляции на внешней границе.	
Глава 4. Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение.	
Глава 5. Социальная ответственность	
Заключение	
Numerical study of natural convection cryogenic system	

<b>Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику</b>	27.09.2014 г.
---	---------------

**Задание выдал руководитель:**

<b>Должность</b>	<b>ФИО</b>	<b>Ученая степень, звание</b>	<b>Подпись</b>	<b>Дата</b>
Доцент	Максимов В.И.	к.т.н.		

**Задание принял к исполнению студент:**

<b>Группа</b>	<b>ФИО</b>	<b>Подпись</b>	<b>Дата</b>
5ФМ41	Толстолуцкая Анастасия Андреевна		

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа 137 с., 30 рис., 15 табл., 63 источника, 1 прил.

Ключевые слова: сжиженный природный газ, естественная конвекция, тепломассоперенос, метод конечных разностей.

Объектом исследования является математическая модель хранилища-резервуара СПГ

Цель работы – математическое моделирование нестационарного конвективного теплопереноса в прямоугольных хранилищах СПГ с учетом внешних теплопритоков.

В процессе исследования проводились численные исследования влияния теплопритоков на движение жидкости в резервуаре

В результате исследования получены распределения гидродинамических параметров и температур, характеризующие основные закономерности исследуемого процесса.

Область применения: полученные новые численные результаты могут быть использованы для совершенствования существующих методик расчета теплового состояния хранилищ СПГ, а также позволят прогнозировать оптимальный режим их эксплуатации.

Экономическая эффективность/значимость работы: предупреждение возникновения аварий, приводящих к крупным финансовым потерям.

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, СОКРАЩЕНИЯ, НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

ГУ – граничные условия.

МКР – метод конечных разностей.

СПГ – сжиженный природный газ.

X, Y – безразмерные координаты.

U, V – безразмерные скорости.

$\Theta$  - безразмерная температура.

$\Psi$  - безразмерный аналог функции тока.

$\Omega$  - безразмерный аналог вектора вихря.

$\alpha_i, \beta_i, \chi_i$  – прогоночные коэффициенты.

$\tau$  – итерационный параметр, аналогичный времени.

$$Bi = \frac{\alpha_k L}{\lambda_f} - \text{число Био.}$$

$$Gr = \frac{\beta g_y L^3 (T_{in} - T_0)}{\nu} - \text{число Грасгофа.}$$

$$Ki = \frac{W Q_i L}{\lambda (T_{in} - T_0)} - \text{число Кирпичева.}$$

$$K_i = \frac{W Q_i L}{\lambda (T_{in} - T_0)} - \text{безразмерное число испарения.}$$

$$Re = \frac{2VL}{\nu} - \text{число Рейнольдса.}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} - \text{число Прандтля.}$$

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	9
1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ХРАНИЛИЩАХ СЖИЖЕННОГО ПРИРОДНОГО ГАЗА.....	11
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ.....	18
2.1. Геометрическая модель .....	18
2.2. Математическая постановка задачи .....	19
2.3. Краткое описание используемого численного метода.....	24
2.4. Решение трехточечного разностного уравнения второго порядка методом прогонки.....	25
2.5. Уравнение Пуассона для функции тока.....	27
2.6. Постановка граничных условий для вектора завихренности скорости .....	28
2.7. Аппроксимация уравнения для вектора завихренности скорости.....	30
2.8. Аппроксимация уравнения энергии.....	33
2.9. Тестовые задачи .....	35
2.9.1. Движение жидкости в полости с подвижной верхней крышкой .....	35
2.9.2. Естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области .....	37
3. ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ.....	41
3.1. Предпроектный анализ. ....	41
3.1.1. Потенциальные потребители результатов исследования. ....	41
3.2. Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения.....	42
3.4. Оценка готовности проекта к коммерциализации.....	45

3.5. Планирование управления научным проектом.....	47
3.5.1 Контрольные события проекта.....	47
3.5.2. План проекта.....	48
3.6. Бюджет научного исследования.....	53
3.7. Расчет нарастания технической готовности работ.....	58
СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ.....	61



## ВВЕДЕНИЕ

Изучение теплопереноса в хранилищах сжиженного природного газа (СПГ) играет большую роль при оптимизации и моделировании физических процессов, связанных с хранением и транспортировкой СПГ. Увеличение количества хранилищ и объемов производства СПГ и неотложность проблем охраны окружающей среды приводят к тому, что возникает необходимость знать о том, что может привести к аварии на больших хранилищах СПГ и вовремя предотвратить это. Таким образом, изучение процессов теплопереноса в различных хранилищах СПГ сложно переоценить.

Конвективный теплоперенос имеет большое значение в окружающей среде и во многих отраслях техники, представляющих значительный интерес. В частности, от масштабов естественной конвекции зависит безопасность эксплуатации хранилищ СПГ.

Цель работы: математическое моделирование нестационарного конвективного теплопереноса в прямоугольных хранилищах СПГ с учетом внешних теплопритоков.

Научная новизна работы. Впервые получено решение задачи конвективного теплопереноса в прямоугольном хранилище СПГ с использованием безразмерной формы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, в переменных «функция тока – вихрь скорости – температура», с использованием аппроксимации Самарского для уравнения движения.

Практическая значимость. Создан вычислительный комплекс для моделирования конвективного теплопереноса в хранилище СПГ, позволяющий смоделировать структуру течений в хранилище СПГ при заданных параметрах.

Полученные новые численные результаты могут быть использованы для совершенствования существующих методик расчета теплового состояния хранилищ СПГ, а также позволят прогнозировать оптимальный режим их эксплуатации. Разработанная математическая модель может быть применена для определения параметров теплового режима хранилища СПГ. При этом

могут быть учтены изменения теплофизических свойств теплоизоляционных материалов и конструкций.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на: V Всероссийской научной конференции с международным участием, «Теплофизические основы энергетических технологий»

# 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ХРАНИЛИЩАХ СЖИЖЕННОГО ПРИРОДНОГО ГАЗА

На сегодняшний день тема, которая рассматривается в данной работе, является достаточно популярной и является актуальной для большинства специалистов.

СПГ – это сжиженный природный газ, данная аббревиатура используется в энергетической отрасли ( на англ. LNG, Liquefied Natural Gas) обычный природный газ, который охлажден до температуры  $-162^{\circ}\text{C}$  для транспортировки и хранения в жидком виде. Хранят сжиженный природный газ в изотермических резервуарах - хранилищах при температуре кипения, поддерживаемой за счет испарения. Этот метод хранения СПГ связывают с тем, что для основной составляющей природного газа - метана, критической температурой является  $-83^{\circ}\text{C}$ , что намного ниже температуры окружающего воздуха. А также не возможно хранение сжиженного природного газа в резервуарах с высоким давлением. Для того, чтобы использовать сжиженный природный газ, его подвергают испарению до первоначального состояния с отсутствием воздуха. Это явление называют - регазификация (возвращение газа в парообразное состояние). При регазификации одного кубического метра сжиженного природного газа образуется примерно 600 кубических метра природного газа в парообразном состоянии.

Проведенные исследования сопряженных осесимметричных задач с естественной конвекцией в вертикальном цилиндрическом резервуаре, который частично заполнен жидкостью, бак с теплопроводящей стенкой, описаны в [1, 2]. Снаружи к боковой поверхности резервуара подводят равномерно распределяемый по поверхности и постоянный во времени тепловой поток. В стенке резервуара на различной высоте с одинаковым расстоянием друг от друга располагается локальный сток тепла. Было выявлено, что стационарное

значение среднemasсовой температуры жидкости определяется двумя безразмерными величинами: числом Грасгофа ( $Gr$ ), и числом Брюна ( $Br$ ).

В [2] полученные интересные результаты, так как в данной работе в отличие от большинства работ учитывался теплоперенос через ограждающие конструкции, тем самым учитывалось влияние окружающей среды на помещения через твердое тело (см. Рисунок 1.1).

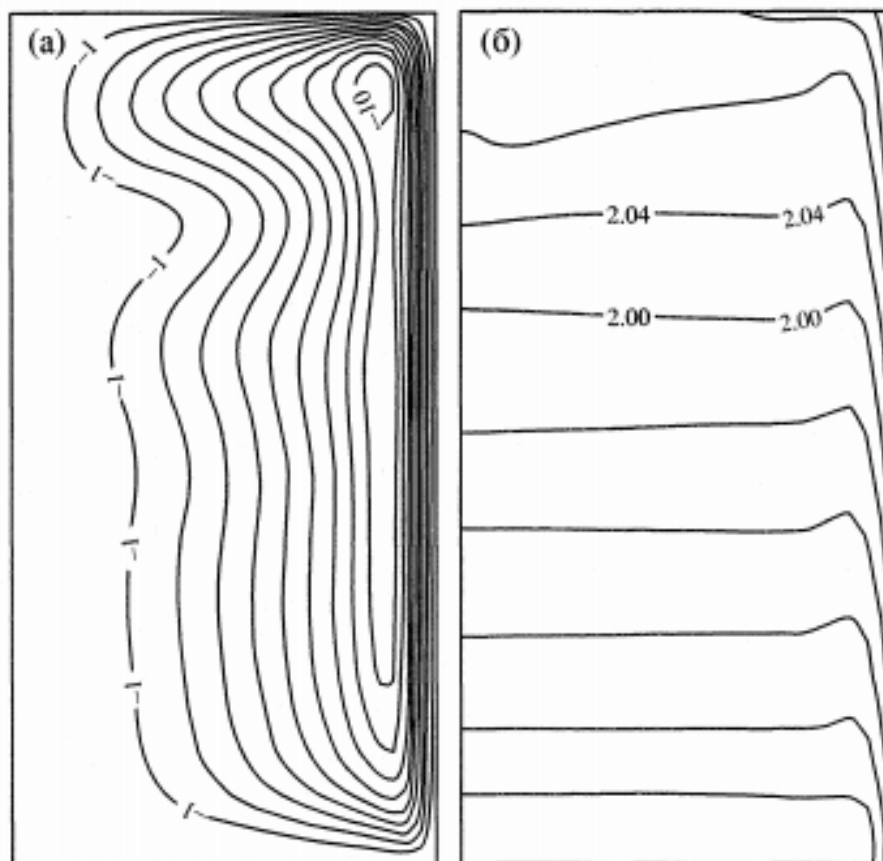


Рисунок 1.1. – Линии тока (а) и изотермы (б) при квазистационарном режиме:  $Ra = 10^7, B_w = 1, Fo = 1$ .

Было обнаружено, что во всех полостях граничные условия 4 рода может приводить к дестабилизации или стабилизации течение жидкостей и к соответствующему значительному изменению коэффициента теплоотдачи. Естественная конвекция в полости может также приводить к кондуктивным переносам тепла в окружающей стенке[3].

Интегральный метод решения сопряженной задачи теплообмена при односторонних или двухсторонних обтеканиях поверхности для условий вынужденной и свободной конвекции были приведены в работе[4]. Результатом численных расчетов являются характеристики и в итоге были изучены основные закономерности теплообменов для исследуемой области. Определены качественные и количественные отличия между интегральными и локальными характеристиками теплообменов исследуемого объекта, которые были получены при сопряженных и упрощенных постановках задачи.

Рассмотрена сопряженная задача конвективно-кондуктивного теплообмена в каналах высокоэнергетических установок [5]. Выводом исследования следует то, что число Брюна ( $Br$ ) не отражает всей тонкости процесса теплообмена, но для простого случая может быть использовано для того, чтобы предварительно оценить в роли качественных критериев сопряженности.

Изучения влияний теплопроводности и толщины поперечных стенок на теплоотдачу при естественной конвекции в наклонной прямоугольной полости приведено в [6].

В работе[7] приведены интересные исследования динамики движений монодисперсной сферической частицы при неизотермической тепловой свободной конвекции вязкой несущей несжимаемой жидкости в цилиндрическом вертикальном реакторе с боковым симметричным подводом теплоты с постоянной температурой поверхностей. На основе исследований сделан вывод, что гидродинамика потока определяют за счет взаимодействия восходящих у нагретой стенки потоков жидкостей и нисходящих, охлажденных у верхней стенки. При этом влияние охлажденной верхней стенки реактора с истечением времени растет. Что приводит к пульсационному характеру изменений локальных максимальных скоростей движений жидкости в образовавшихся вихревых структурах.

Методика и математическая модель численных решений задач термогравитационной конвекции в замкнутом пространстве при наличии сопряженного теплообмена описывается в [8]. Областью решения является помещение, в котором присутствуют оконный проем и отопительный прибор. С окружающей средой граничит только одна стенка помещения, другие - с соседними комнатами. Система уравнений конвекции решается численным методом контрольного объема. В работе реализован SIMPLER алгоритм. Метод включает в себя циклически выполняемые процедуры: «предположение-коррекция».

Теплообмен в комнате определяют на основе решения задачи с термогравитационной конвекции воздуха в объеме пространства и учет сопряженного теплообмена через ограждающую конструкцию. В постановке задачи принимаются следующие допущения: воздух считают идеальным газом; коэффициент вязкости может зависеть только от температур; при постоянном объеме и давлении коэффициент удельной теплоемкости не зависит от абсолютной температуры и является физической постоянной газа; коэффициент теплопроводности прямопропорционален коэффициенту вязкости; постоянно число Прандтля. Движение жидкости под действием гравитационной силы описывается уравнением Навье-Стокса. Для решения используется приближение Буссинеска.

Также решаются уравнения лучистого теплообмена. Здесь принимается, что радиационное свойство поверхности постоянно и не зависит от температуры, поверхность теплообмена локально изотермические, поверхности считаются «диффузно-серыми». Лучистый поток определяется по закону Стефана-Больцмана.

Данная сопряженная задача решена методом последовательного приближения по алгоритму:

1. Задается начальное поле параметров в помещении и в оконных проемах.
2. Решается задача теплообмена через оконные системы.
3. Решается задача термогравитационной конвекции в помещении, при этом решается система уравнений гравитационной конвекции в приближении Буссинеска с условиями на границах.
4. Тепловые потоки через оконный проем определяется на основе решения задачи теплообмена через оконную систему.

Тепловые условия в комнате в основном зависят от ее поверхностей, а также подвижности и температуры воздуха. Параметры, которые характеризуют микроклимат помещения: температура воздуха, радиационная температура, скорость движения воздуха, результирующая температура помещения и неравномерность распределения приведенных параметров по объему помещения.

В данной работе рассматриваются несколько способов расположения тепловых приборов в помещении. Например, при способе отопления «теплый пол». В результатах расчета полей скорости и температуры видно, что конвективный поток от холодной и нагретой поверхности создает две циркуляционные поверхности. Первая из них располагается в нижней половине пространства и захватывает область рядом с наружной стеной, а вторая имеет противоположное направление движения и образуется за счет конвективных потоков от холодных поверхностей внутренней вертикальной стены. В результате исследований этот вариант признан наиболее оптимальным. Наблюдается более равномерные распределения параметров по всему объему пространства и маленький отопительный эффект.

В [9] описывается естественная и вынужденная конвекции на начале участка вертикально расположенного плоскопараллельного канала с двумя

характерными случаями нагревания жидкости: задается температура и тепловой поток на стенках канала.

В данной работе были определены профиль скорости и профиль температуры в разных сечениях канала, изменение температуры средней массы и скорости, проходящей продольно по центральной линии канала, теплогидравлические характеристики для некоторых значений параметров смешанной конвекции, числа Прандтля, отношения температуры и теплового потока на стенках канала. Описано влияние числа Прандтля и параметров смешанной конвекции на местное значение числа Нуссельта при симметричных нагреваниях с постоянными плотностями теплового потока на стенках.

Дополнительно рассматривают смешанную конвекцию в начале участка плоскопараллельного канала. С периодичностью изменяется во времени температура стенки. Решение уравнений математической модели было получено неявным методом. Выявлены зависимости числа Нуссельта, значений параметра смешанной конвекции, числа Прандтля от частот колебаний температуры. Число Нуссельта зависит только от продольной координаты, не меняется во все периоды колебания. Безразмерные параметры плотности тепловых потоков изменяются гармонически. Возрастание теплоотдачи при увеличении числа Прандтля практически не зависит от частот колебаний. Местный коэффициент трения для вынужденного движения не зависит от частоты колебаний.

В работе [10] описана двумерная задача с ламинарным обтеканием цилиндра плоской струей жидкости (см. Рисунок 1.2). На горизонтальный изотермический цилиндр из сопла натекает струйка жидкости, на срезе сопла температура считается постоянной. Математическая модель основывается на следующие допущения: жидкость однородная, вязкая, несжимаемая и теплопроводная. Все физические параметры жидкости считаются постоянными.



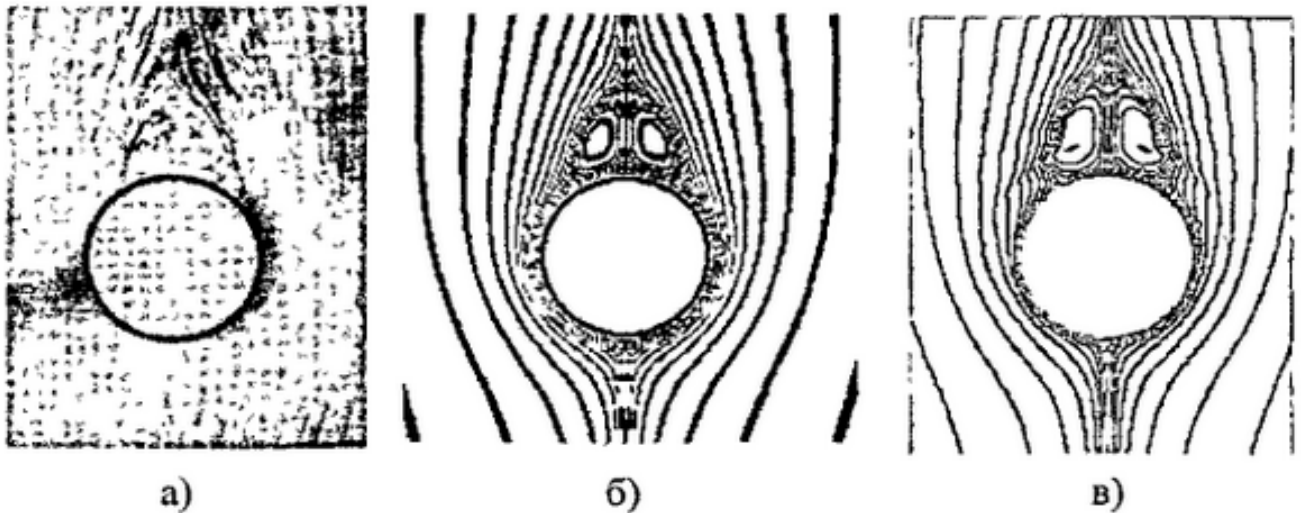


Рисунок 1.2. – Картина течений для обтекания цилиндров бесконечными потоками при:  $Re = 13.1$ , а) физический эксперимент, б) численный эксперимент с сеткой  $60 \times 73$ , в) численный эксперимент с сеткой  $40 \times 120$ .

В основе модели лежат уравнение Навье-Стокса в приближениях Буссинеска, переходящие к функциям токов, уравнение сохранения энергии и функция интенсивности вихрей.

Чтобы получить стационарное или квазистационарное решение решались нестационарные системы уравнений до получения периодического решения. Рассматривается решение при различных параметрах числа Рейнольдса ( $Re$ ), представляется распределение безразмерных тангенциальных составляющих скоростей для зафиксированных углов зависящих от расстояний, отсчитываемых от поверхности цилиндров.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

### 2.1. Геометрическая модель

Была рассмотрена краевая задача теплопереноса при учете естественной конвекции для области, которая представлена на рисунке 2.1.

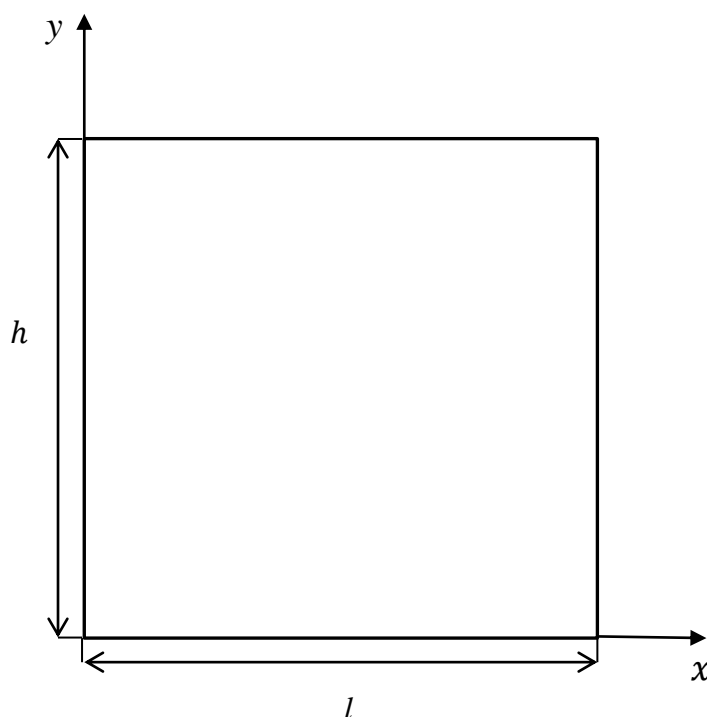


Рисунок 2.1 область решения.

Область решения представляет собой прямоугольную область с заданными размерами и определенными теплофизическими характеристиками. На границах выставляются определенные граничные условия. В начальный момент времени на стенках полости и жидкость, которая ее заполняет, имеют одинаковые и постоянные во всех точках температуры, при этом жидкость неподвижна. Вертикальные стенки и нижняя граница ( $x = 0, x = L, y = 0$ ) являются источниками теплопритока, а верхняя граница ( $y = H$ ) - свободная поверхность.

При проведении анализов предполагалось, что теплофизические свойства среды абсолютно не зависят от температур, а режим течения считается ламинарным.

При моделировании процессов свободно-конвективных теплопереносов в газовой среде рассматривается следующее значение числа Грасгофа  $Gr = 10^6$ . Выбранное число, которое рассматривается соответствует ламинарному режиму течения [11-13].

Жидкость считаем ньютоновской, несжимаемой и она удовлетворяет приближению Буссинеска.

Отметим, что движение жидкости и теплоотдача в полости принимались двумерными, теплообмен за счет излучений - пренебрежимо мал в сравнении с конвективным теплообменом. Жидкость считается абсолютно прозрачной для тепловых излучений.

## **2.2. Математическая постановка задачи**

Течение вязкой жидкости при учете ньютоновского закона трения без упрощающего предположения, которое при малой вязкости связано с приближениями на пограничном слое, а при больших вязкостях – с приближением Стокса, описываются уравнением Навье-Стокса. Выводить уравнения Навье-Стокса можно, или феноменологическими путями, в основе которых лежат известные постулаты Стокса [13-15], или на основе молекулярно-кинетических теорий [16].

При учете физической постановки, которая представлена в пункте 2.1, процессы переноса тепла в изучаемой области решения (рисунок 1) описываются системами нестационарных уравнений Навье-Стокса [17, 18]. Для того чтобы определить поля течений и температуры в среде используется нестационарное двумерное уравнение конвекции в приближениях Буссинеска [11,19]. Основными в приближениях Буссинеска являются [19,20] предположения о том, что рассматриваю «слабую» конвекцию: вызванную неоднородностью температур отклонений плотностей от средних значений

предполагается настолько малыми, что ими можно пренебрегать во всех уравнениях, помимо уравнения движения, где эти отклонения учитываются в члене, содержащем подъемную силу.

Если пренебречь вязкими диссипациями энергий, то уравнение неразрывности, а так же уравнения энергии и движения в полости для рассматриваемых задач будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \beta g_y (T - T_0) \quad (2.2.3)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.2.4)$$

При этом области изменений независимых переменных для систем уравнений в среде следующие (см. рисунок 1):

$$0 < y < h, 0 < x < l, 0 < t < T$$

В данной системе уравнений (2.2.1) – (2.2.4) искомыми функциями считаются компоненты векторов скоростей  $u, v$ , давление  $p$  и температура в области решения (см. рисунок 1), зависящие от пространственных координат  $x, y$  в том числе и времени  $t$ . Параметрами являются плотность  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\mu$ , температурный коэффициент объемного расширения  $\beta$ , которая составляет ускорение силы тяжести в проекции на ось  $y g_y$  ( $g_x = 0$ ), начальная температура в области решений  $T_0$ , удельная теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$ ,

Система уравнений (2.2.1) - (2.2.4) при учете соответствующих начальных и граничных условий для полей скоростей, температур и давлений представляет замкнутую систему, которая позволяет определить поля скоростей, температур и давлений однородной вязкой несжимаемой жидкости и изменения параметров во времени.

Система уравнений (2.2.1) - (2.2.4) может быть записана в другой форме, которая содержит давление и в некоторых случаях более удобная для численных реализаций [13, 15, 21] (в данной работе при решении поставленной задачи используется именно рассмотренная во втором случае форма записи).

Вводим в рассмотрение функции тока и векторы вихря скоростей, задающиеся следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \omega = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.2.5)$$

Тогда с учетом (2.2.5) уравнения (2.2.1) - (2.2.4) примут вид:

$$\rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \rho \beta g_y \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\omega, \quad (2.2.7)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad (2.2.8)$$

Связь между вектором завихренности и функцией тока (2.2.7) следует из определений вектора завихренности (2.2.5). Уравнение, описывающее вектор вихря (2.2.6) получается из уравнений (2.2.2) и (2.2.3), дифференцировав первое по  $y$ , второе дифференцируем по  $x$ , вычитаем полученные результаты и используем определение вектора вихря полученное в виде (2.2.5).

У функции тока  $\psi$  имеется ясный физический смысл [21], а именно: касательная к линии  $\psi = \text{const}$  определяет направление векторов скорости, а разность  $\psi_2 - \psi_1$  между постоянными, которые соответствуют двум линиям  $\psi_1, \psi_2$ , и расположенных на определенном расстоянии  $\Delta l = l_2 - l_1$ , вычисляет расход жидкости через заданное сечение сечения.

Выполняя вычисления, обычно используют безразмерную форму записи исходного уравнения, граничных и начальных условий. Использование безразмерной системы преследует две цели: приведение значений вычисляемых величин к соответствующим шкалам, а также расчет и обработка результатов в

общей критериальной форме, которая содержит минимальное число параметров. Данные цели достигаются соответствующим выбором масштаба.

В роли масштаба расстояния была выбрана длина газовой полости рассматриваемой области решения по оси ординат. Чтобы привести к безразмерному виду систему уравнений (2.2.6) - (2.2.8) были использованы соотношения:

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, \tau = \frac{t}{t_0}, U = \frac{u}{V_0}, V = \frac{v}{V_0}, \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \Psi = \frac{\psi}{\psi_0}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\text{Где } \Delta T = T_i - T_0, V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TL}, \psi_0 = V_0L, \omega_0 = \frac{V_0}{L};$$

где  $x, y$  – координаты для декартовой системы координат;  $X, Y$  – безразмерные координаты, которые соответствуют координатам  $x, y$ ;  $l$  – длина полости в рассматриваемой области решения задачи по оси  $x$ ;  $t$  – время;  $t_0$  – масштаб времени;  $\tau$  – безразмерное время;  $u, v$  – составляющие скорости в проекции на оси  $x, y$  соответственно;  $U, V$  – безразмерные скорости, соответствующие скоростям  $u, v$ ;  $V_0$  – масштаб скорости (скорости конвекции);  $\Theta$  – безразмерная температура;  $\psi_0$  – масштаб функции тока;  $\Psi$  – безразмерный аналог функции тока;  $\omega_0$  – масштаб вектора вихря;  $\Omega$  – безразмерный аналог вектора вихря.

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» [11, 19, 21] для рассматриваемой области решения записываются следующим образом:

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \Delta \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2.2.9)$$

$$\Delta \Psi = -2\Omega, \quad (2.2.10)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \Delta \Theta. \quad (2.2.11)$$

Здесь  $Sh = \frac{V_0 t_0}{L}$  – число Струхалия;  $Gr = \frac{\beta g y L^3 (T_{in} - T_0)}{\nu}$  – число Грасгофа;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $Pr = \frac{\nu}{a}$  – число Прандтля;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Граничные условия для системы уравнений (2.2.9) - (2.2.11) будут следующие:

На верхней границе решаемой области задано граничное условие свободной поверхности для жидкости:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = \tau_z; \\ \frac{\partial \Theta_f(X, Y)}{\partial Y} = Bi \Theta_f(X, Y) + Bi \frac{T_0 - T_e}{T_{in} - T_0} + Ki, \end{array} \right. \text{ при } Y = \frac{h}{L}, 0 \leq X \leq \frac{l}{L}; \quad (2.2.12)$$

на остальных границах:

$$\left| \begin{array}{l} \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial X} = Ki; \end{array} \right. \text{ при } X = 0 \text{ и } X = \frac{l}{L}, 0 \leq Y \leq \frac{h}{L} \quad (2.2.13)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial X} = Ki; \end{array} \right. \text{ при } Y = 0, 0 \leq X \leq \frac{l}{L} \quad (2.2.14)$$

Здесь  $Ki = \frac{qL}{\lambda_w(T_{in} - T_0)}$  - число кирпичева,  $Bi = \frac{\alpha_k L}{\lambda_f}$  - число Био,  $\tau_z = \frac{\tau'_z L}{\nu_{in} \mu}$  -

безразмерне касательное напряжение,  $Ki = \frac{W Q_i L}{\lambda(T_{in} - T_0)}$  - безразмерное число

испарения,  $\tau'_z$  - касательное напряжения на свободной поверхности,  $\mu$  - динамическая вязкость жидкости,  $\alpha_k$  - коэффициент теплообмена между внешней средой и областью решения,  $T_e$  - температура окружающей среды,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $q$  - тепловой поток на границе области,

$W = \frac{A(P_n - P'')}{\sqrt{\frac{2\pi R_g}{M} T_{pb}}}$  - массовая скорость испарения,  $Q_i$  - теплота фазового перехода,  $P_n$

- давление насыщения,  $P''$  - парциальное давление испаряющихся компонентов,  $R_g$  - газовая постоянная,  $M$  - молекулярный вес,  $A$  - коэффициент аккомодации,  $T_{pb}$  - температура испарения.

### 2.3. Краткое описание используемого численного метода

Для решения данной системы уравнений (2.2.9) – (2.2.11) используется метод конечных разностей (МКР) [22 – 25]. Идея самого метода конечных разностей для решения краевой задачи понятна уже из названия: вместо каждой производной в дифференциальном уравнении используется его конечноразностная аппроксимация. При построении дискретной аппроксимации краевой дифференциальной задачи нужно объединить две, может быть абсолютно противоречивые цели: качественную и хорошую аппроксимацию и устойчивое эффективное решение получившихся в этом случае алгебраических систем.

Для аппроксимаций дифференциального уравнения вводится пространственно-временная сетка с заданными координатами:

$$x_i = ih, y_j = jl, \tau_n = n\tau,$$

Где  $h, l$  - шаги сетки по координатам  $x, y$  соответственно,  $\tau$  - шаг по времени,  $i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}, n = \overline{0, K}$ .

Введя следующее обозначение:  $\varphi(ih, jl, n\tau) = \varphi_{i,j}^n$ . Любую производную по каждой пространственной переменной можно аппроксимировать центральной разностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &\approx \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2l}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{l^2}, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Разностью против потока:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{l} \quad (2.3.2)$$

А так же разностью по потоку:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{l}. \quad (2.3.3)$$

Производную по времени заменяем разностным отношением “вперед” в следующем виде:



$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\tau}. \quad (2.3.4)$$

На основе представленных аппроксимаций дифференциальная задача (2.2.9) – (2.2.11) сводится к разностной.

## 2.4. Решение трехточечного разностного уравнения второго порядка методом прогонки

Рассматривается самый простой случай ленточной системы, к которой сводится решение задачи, полученной в результате дискретизации краевой задачи для дифференциального уравнения при помощи метода конечных разностей. Для решения ищется решение, где каждое уравнение связывает три соседние неизвестные [23 – 25]:

$$A_i x_{i+1} - B_i x_i + C_i x_{i-1} = F_i. \quad (2.4.1)$$

Здесь  $i = \overline{1, n-1}$ . Такое уравнение называют трехточечным разностным уравнением второго порядка. Система (2.4.1) имеет трехдиагональную структуру.

Для того, чтобы избавить поддиагональную часть матрицы системы от ненулевых элементов, предполагаем, что существует такой набор чисел,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  здесь  $i = \overline{0, n-1}$ , при которых:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad (2.4.2)$$

Трехточечное уравнение второго порядка (2.4.1) преобразуем в двухточечное уравнение первого порядка (2.4.2). Уменьшаем в связи (2.4.2) индекс на единицу и получившееся выражение:  $x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}$  подставляем в уравнение (2.4.1):

$$A_i x_{i+1} - B_i x_i + C_i \alpha_{i-1} x_i + C_i \beta_{i-1} = F_i,$$

Получается:

$$x_i = \frac{A_i}{B_i - \alpha_{i-1} C_i} x_{i+1} + \frac{\beta_{i-1} C_i - F_i}{B_i - \alpha_{i-1} C_i}.$$

Равенство имеет вид (2.4.2) и совпадает с ним. (2.4.2) будет иметь место, если при каждом  $i = 1, 2, \dots, n-1$  выполняется рекуррентное соотношение:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - \alpha_{i-1}c_i}, \beta_i = \frac{\beta_{i-1}C_i - F_i}{B_i - \alpha_{i-1}C_i} \quad (2.4.3)$$

Для того, чтобы определить  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  по (2.4.3) нужно знать  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , которые находим из левого граничного условия.

Далее по формуле (2.4.3) последовательно находим  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ , при таком условии, что  $x_n$  найдем из правого граничного условия.

Решение уравнений вида (2.4.1) описывается способом, называемым метод прогонки, он сводится к вычислению по трем формулам: находятся так называемые прогоночные коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  по формулам (2.4.3) при  $i = \overline{1, n-1}$  (прямая прогонка) и затем получаются неизвестные  $x_i$  по формуле (2.4.2) при  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  (обратная прогонка).

Для того, чтобы успешно применить метод прогонки нужно учесть, чтобы при вычислении не возникало ситуации с делением на ноль, а рассчитывая большие размерности систем не должен возникнуть быстрый рост погрешности округления.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогоночных коэффициентов (2.4.3) не обращаются в ноль, и устойчивой, если  $|\alpha_i| < 1$  при всех  $i = \overline{0, n-1}$ .

В [29] была доказана теорема, которая представляет достаточные условия устойчивости и корректности прогонки уравнений (2.4.1):

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \quad \forall i = \overline{1, n-1} \quad \text{и} \quad |\alpha_0| < 1 \Rightarrow |\alpha_i| < 1, \quad (2.4.4)$$

которые в большинстве приложений метода выполняются автоматически.

## 2.5. Уравнение Пуассона для функции тока

Уравнение Пуассона для решения функции тока имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -2\Omega \quad (2.5.1)$$

В основной схеме решается отдельно от уравнения вихря скорости. Усовершенствование данного элемента основной схемы имеет большое значение в связи с необходимостью многократно решать стационарные эллиптические уравнения, на каждом временном слое.

Метод решения уравнения (2.5.1), нашедший широкое применение и использующий итерационные решения разностных уравнений называется неявным методом переменных направлений, рассмотренный в работах [28, 29].

Заменяя уравнение (2.5.1) нестационарным уравнением:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + 2\Omega, \quad (2.5.2)$$

Здесь  $\tau$  - итерационный параметр, который аналогичен времени, записываем схему переменных направлений для уравнения (2.5.2) в виде [25, 29]:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Psi_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = & \frac{\Psi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2\Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Psi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \\ & + \frac{\Psi_{i,j+1}^k - 2\Psi_{i,j}^k + \Psi_{i,j-1}^k}{l^2} + 2\Omega_{i,j} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = & \frac{\Psi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2\Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Psi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \\ & + \frac{\Psi_{i,j+1}^{k+1} - 2\Psi_{i,j}^{k+1} + \Psi_{i,j-1}^{k+1}}{l^2} + 2\Omega_{i,j} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Где  $k$  - итерационный индекс,  $i = \overline{1, M-1}; j = \overline{1, N-1}$ .

Каждое разностное уравнение (2.5.3), (2.5.4) сводятся к стандартному трехдиагональному виду, и решаются при помощи метода прогонки (пункт 2.4).

Решение уравнения (2.5.3) методом прогонки. Приводится уравнение (2.5.3) к виду  $A_i \Psi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - B_i \Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_i \Psi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} = F_i$ . Тогда коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  принимают вид:

$$A_i = \frac{1}{h^2}, B_i = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tau}, C_i = \frac{1}{h^2}, F_i = -\frac{2}{\tau} \Psi_{i,j}^k - \frac{\Psi_{i,j+1}^k - 2\Psi_{i,j}^k + \Psi_{i,j-1}^k}{l^2} - 2\Omega_{i,j}$$

Прежде чем перейти к использованию метода прогонки проверим достаточные условия устойчивости и корректности метода прогонки (2.4.4).

Из выражений  $A_i, B_i, C_i$  видим, что:

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \forall i = \overline{1, M-1}, |\alpha_0| < 1$$

Для того, чтобы определить прогоночные коэффициенты по соотношению (2.4.3) необходимо найти  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  из левого граничного условия. Граничное условие для уравнения Пуассона (2.5.1) имеет вид  $\Psi(X, Y, \tau) = 0$ .

Используем соотношение  $\Psi_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_0 \Psi_{1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_0$ , получаем:  $\alpha_0 = 0 < 1, \beta_0 = 0$ .

Определяем значения  $\Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, i = M-1, \dots, 1$  по выражению, которое аналогично

(2.4.2), с учетом того, что  $\Psi_{M,j}^{k+\frac{1}{2}} = 0$ . Исходя из этого определяем  $\Psi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, i = \overline{0, M}$ .

Затем переходим к решению уравнения (2.5.4), которое решается аналогично (2.5.3).

В качестве критерия точности решения уравнения Пуассона рассматривалось соотношение:  $\max_{i,j} |\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^k| < \varepsilon$ .

Отметим, что метод переменных направлений является абсолютно устойчивым и порядок аппроксимации разностной схемы исходной дифференциальной задачи  $O(h^2 + l^2)$  [25, 27, 32, 33].

## 2.6. Постановка граничных условий для вектора завихренности скорости

Особенность постановки задачи для системы уравнений Навье-Стокса в переменных вихрь скорости, функция тока заключается в граничных условиях, которые в случае твердой неподвижной поверхности имеют вид [21, 26, 27].

$$\Psi(X, Y, \tau) = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0. \quad (2.6.1)$$

Два граничных условия (2.6.1) задаются только для функции тока и не задаются для вектора вихря скорости. Исходя из этого, при численных решениях разностных уравнений для вихря скорости возникает проблема с определением недостающего граничного условия [30 – 35].

Одним из способов определения граничных условий для вектора вихря, который применялся еще в работах Тома [36], является функция тока, где вблизи границы представляется в виде ряда Тейлора, к примеру,

$$\Psi_{1,j} = \Psi_{0,j} + h \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{0,j} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{0,j} + \dots \quad (2.6.2)$$

В разложении (2.6.2) отбрасываем члены выше второго порядка по  $h$  и получаем выражение для вихря на границе:

$$\Omega_{0,j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{0,j} = \frac{\Psi_{0,j} - \Psi_{1,j}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{0,j} + O(h). \quad (2.6.3)$$

При практическом использовании данной формулы предполагают, что граничное условие (2.6.1) выполняется. Что приводит к простому соотношению, которое связывает вихрь на границе с функцией тока в узле сетки, который является ближайшим к границе:

$$\Omega_{0,j} = -\frac{\Psi_{1,j}}{h^2}. \quad (2.6.4)$$

Связь между функцией тока и вихрем на границе может быть найдена из уравнения для функции тока, считается, что он справедлив и на границе области. Исходя из этого, можно получить формулу и более высокого порядка, аппроксимируя вторую производную функции тока по формуле:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{0,j} = \frac{8\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j} - 7\Psi_{0,j}}{2h^2} - \frac{3}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{0,j} + O(h^2). \quad (2.6.5)$$

Полагая, что в формуле (2.6.5) справедливо условие (2.6.1), получаем формулу второго порядка (формулу Вудса) [37, 38], которая связывает значения

вихря скорости на границе и функцию тока в двух узлах сетки, которые примыкают к границе:

$$\Omega_{0,j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{0,j} = \frac{\Psi_{2,j} - 8\Psi_{1,j}}{4h^2} + O(h^2). \quad (2.6.6)$$

В данной работе в качестве граничных условий для вектора вихря было использовано условие Вудса (2.6.6).

## 2.7. Аппроксимация уравнения для вектора завихренности скорости

Рассматривается структура разностной схемы для уравнения вихря вида:

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} = V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2.7.1)$$

Известная проблема [25], возникающая при построении разностных схем для уравнения (2.7.1), является аппроксимация нелинейного конвективного члена в виде  $U \frac{\partial \Omega}{\partial X}$ . Использование для данной цели разностного выражения типа (2.3.1) приводит при малых значениях  $\frac{1}{\sqrt{Gr}}$ , соответственно при больших значениях  $Gr$  к нарушению монотонности. Воспользовавшись монотонной аппроксимацией вида (2.3.3) можно получить систему алгебраических уравнений, коэффициентами которых удовлетворяются достаточные условия устойчивости прогонок. Но данная аппроксимация имеет точность первого порядка, и ее использование обычно приводит к появлению значительной схемной вязкости.

Компромиссом будет являться использование монотонной аппроксимации метода Самарского [21, 22], которая имеет второй порядок точности.

Последовательные применения разностных аппроксимаций к двумерным уравнениям вихря скорости (2.7.1) приводят к системе алгебраических уравнений, решение которых возможно только итерационным путем. Более экономичным будет являться метод переменных направлений, который позволяет свести решения двумерных уравнений к последовательностям

одномерных уравнений с применением трехдиагональных матриц. Существует несколько методов, которые используют данную идею и отличаются некоторыми деталями (метод расщепления, метод переменных направлений, локально одномерный метод, метод дробных шагов [22]).

Записывается с учетом монотонной аппроксимации Самарского и метода переменных направлений схема для решения двумерных нестационарных уравнений вихря:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Sh}} \frac{\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i,j}^n}{\frac{\tau}{2}} + U_{i,j}^n \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} - \\
& - |U_{i,j}^n| \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} + V_{i,j}^n \frac{\Omega_{i,j+1}^n - \Omega_{i,j-1}^n}{2l} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \left[ \left( 1 + |U_{i,j}^n| \frac{h\sqrt{\text{Gr}}}{2} \right)^{-1} \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} \right. \\
& \left. + \frac{\Omega_{i,j+1}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i,j-1}^n}{l^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\Theta_{i+1,j}^n - \Theta_{i-1,j}^n}{2h}
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Sh}} \frac{\Omega_{i,j}^{n+1} - \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} + U_{i,j}^n \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} - \\
& - |V_{i,j}^n| \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\Omega_{i,j}^{n+1} + \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2l} + V_{i,j}^n \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2l} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \left[ \left( 1 + |V_{i,j}^n| \frac{l\sqrt{\text{Gr}}}{2} \right)^{-1} \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\Omega_{i,j}^{n+1} + \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} \right. \\
& \left. + \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\Theta_{i+1,j}^n - \Theta_{i-1,j}^n}{2h}
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Где  $i = \overline{1, M-1}; j = \overline{1, N-1}; n = \overline{0, K-1}$ .

В схемах (2.7.2), (2.7.3) используются аппроксимации конвективных членов, усредненные относительно  $U^n$  и  $|U^n|$  (или  $V^n$  и  $|V^n|$ ) для того, чтобы схемы не зависели от знака скорости. Одномерные операторы на нижнем слое по времени аппроксимируются центральными разностями (2.3.1).

Разностные уравнения (2.7.2), (2.7.3) сводим к обычному трехдиагональному виду и решаем методом прогонки, который рассматривался в пункте 2.4.

Рассматривается решение уравнений (2.7.2) методом прогонки. Приводится уравнение (2.7.2) к виду  $A_i \Omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i \Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i \Omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_i$ . Тогда коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  принимают вид:

$$A_i = \frac{1}{h^2 \sqrt{Gr}} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \frac{h\sqrt{Gr}}{2} \right)^{-1} - \frac{U_{i,j}^n}{2h} + \frac{|U_{i,j}^n|}{2h},$$

$$B_i = \frac{2}{h^2 \sqrt{Gr}} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \frac{h\sqrt{Gr}}{2} \right)^{-1} + \frac{|U_{i,j}^n|}{h} + \frac{2}{\tau Sh},$$

$$C_i = \frac{1}{h^2 \sqrt{Gr}} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \frac{h\sqrt{Gr}}{2} \right)^{-1} + \frac{U_{i,j}^n}{2h} + \frac{|U_{i,j}^n|}{2h},$$

$$F_i = V_{i,j}^n \frac{\Omega_{i,j+1}^n - \Omega_{i,j-1}^n}{2l} - \frac{2\Omega_{i,j}^n}{\tau Sh} - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\Omega_{i,j+1}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i,j-1}^n}{l^2} - \frac{\Theta_{i+1,j}^n - \Theta_{i-1,j}^n}{4h}.$$

Прежде чем переходить к использованию метода прогонки проверяется достаточность условий устойчивости и корректности метода прогонки (2.4.4).

Из выражений для  $A_i, B_i, C_i$  видим, что  $|B_i| > |A_i| + |C_i| \forall i = \overline{1, M-1}, |\alpha_0| < 1$ .

Чтобы определить прогоночные коэффициенты по соотношению (2.4.3) находим  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  из левого граничного условия. Граничное условие для уравнения вихря (2.7.1) рассматривается в виде (2.6.6), т.е. граничное условие первого рода. Тогда используем соотношение  $\Omega_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_0 \Omega_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_0$ , получаем, что  $\alpha_0 = 0 < 1, \beta_0 = \frac{\Psi_{2,j}^{n+1} - 8\Psi_{1,j}^{n+1}}{4h^2}$ . Далее определяем значения  $\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, i = M-1, \dots, 1$  по выражению, которое аналогично (2.4.2), с учетом того, что на правой



границе стоит граничное условие Вудса вида (2.6.6). Таким образом, определяются  $\Omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, i = \overline{0, M}$ . Затем переходим к решению уравнения (2.7.3), которое разрешается аналогично (2.7.2).

Необходимо отметить, что используемый метод переменных направлений является абсолютно устойчивым и порядок аппроксимации разностной схемой исходной дифференциальной задачи  $O(\tau + h^2 + l^2)$  [21, 22, 23, 28, 29].

## 2.8. Аппроксимация уравнения энергии

Рассматривается структура разностной схемы для уравнения энергии:

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \Delta \Theta \quad (2.8.1)$$

Дискретизация для уравнения (2.8.1) проводится на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского [22].

Записываем учет монотонной аппроксимации Самарского и локально одномерной схемы дискретизацию двумерного нестационарного уравнения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sh} \frac{\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_{i,j}^n}{\tau} + U_{i,j}^n \frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} - |U_{i,j}^n| \frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} = \\ = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left[ \left( 1 + |U_{i,j}^n| \frac{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h}{2} \right)^{-1} \frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sh} \frac{\Theta_{i,j}^{n+1} - \Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + V_{i,j}^n \frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1} - \Theta_{i,j-1}^{n+1}}{2l} - |V_{i,j}^n| \frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\Theta_{i,j}^{n+1} + \Theta_{i,j-1}^{n+1}}{2l} = \\ = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \left[ \left( 1 + |V_{i,j}^n| \frac{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot l}{2} \right)^{-1} \frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\Theta_{i,j}^{n+1} + \Theta_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Где  $i = \overline{1, M-1}; j = \overline{1, N-1}; n = \overline{0, K-1}$ .

В схеме (2.8.2), (2.8.3) так же используем аппроксимацию конвективных членов, усредняя относительно  $U^n$  и  $|U^n|$  (или  $V^n$  и  $|V^n|$ ).

Разностные уравнения (2.8.2), (2.8.3) сводим к стандартному трехдиагональному виду и решаем методом прогонки (пункт 2.4).

Решение уравнения (2.8.6) методом прогонки. Приводим данные уравнения к виду  $A_i \Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i \Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i \Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_i$ . Отсюда коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  принимают вид:

$$A_i = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h^2} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \cdot \frac{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h}{2} \right)^{-1} - \frac{U_{i,j}^n}{2 \cdot h} + \frac{|U_{i,j}^n|}{2 \cdot h},$$

$$B_i = \frac{2}{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h^2} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \cdot \frac{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h}{2} \right)^{-1} + \frac{U_{i,j}^n}{h} + \frac{1}{\tau \cdot Sh},$$

$$C_i = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h^2} \left( 1 + |U_{i,j}^n| \cdot \frac{Pr \cdot \sqrt{Gr} \cdot h}{2} \right)^{-1} + \frac{U_{i,j}^n}{2 \cdot h} + \frac{|U_{i,j}^n|}{2 \cdot h},$$

$$F_i = -\frac{\Theta_{i,j}^n}{\tau \cdot Sh}.$$

Перед тем, как переходить к использованию метода прогонки проверяем достаточные условия устойчивости и корректности метода прогонки (2.4.4).

Из выражений для  $A_i, B_i, C_i$  видим, что:

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \quad \forall i = \overline{1, M-1}, |\alpha_0| < 1.$$

Для того чтобы определить прогоночные коэффициенты по соотношению (2.4.3) необходимо найти  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  из левого граничного условия. Граничное условие для уравнения энергии (2.8.1) имеет вид  $\Theta(X, Y, \tau) = Ki$ . Тогда, используя соотношение  $\Theta_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_0 \Theta_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_0$ , получаем, что  $\alpha_0 = 0 < 1, \beta_0 = Ki$ .

Затем определяется значение  $\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, i = M-1, \dots, 1$  по выражениям аналогичным (2.4.2), с учетом того, что  $\Theta_{M,j}^{n+\frac{1}{2}} = \Theta_{M,j}^n + Ki$ . Таким образом, определяем  $\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, i = \overline{0, M}$ .

Затем переходим к решению уравнения (2.8.3) которое решается подобно.

Нужно отметить, что используемая локально одномерная схема является абсолютно устойчивой и порядок аппроксимации разностной схемой (2.8.2), (2.8.3) исходной дифференциальной задачи  $O(\tau + h^2 + l^2)$  [21, 22, 23].

## 2.9. Тестовые задачи

### 2.9.1. Движение жидкости в полости с подвижной верхней крышкой

Эта задача [24] – одно из первых применений численных методов для решения уравнения Навье-Стокса. Рассматривается течение жидкости в замкнутой квадратной области размером  $L$ , вызываемое движением одной из ее границ некоторой скоростью  $V$ ; остальные границы области неподвижны (см. рисунок 2.2).

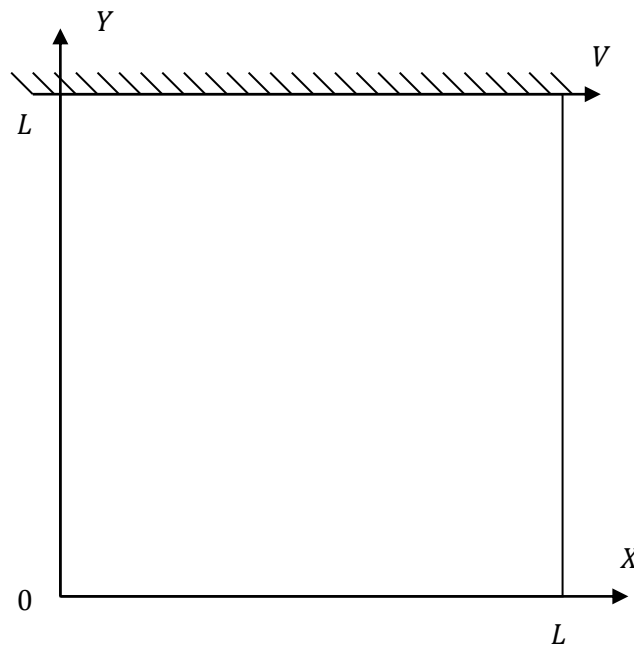


Рисунок 2.2 – область решения тестовой задачи

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \Delta \Omega, \quad (2.9.1.1)$$

$$\Delta \Psi = -2\Omega, \quad (2.9.1.2)$$

Здесь  $Re = \frac{VL}{\nu}$  – число Рейнольдса.

Граничные условия имеют вид:

$$Y = 1, 0 < X < 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 1, \Psi = 0 \text{ (верхняя граница – крышка);}$$

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \text{ (левая граница);}$$

$$X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \text{ (правая граница);}$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = 0 \text{ (нижняя граница).}$$

Искомые поля функции тока и вихря скорости являются здесь функциями числа Рейнольдса.

В качестве начального условия можно использовать, например, такой режим: при  $t = 0$  жидкость во всем поле неподвижна, а верхняя крышка внезапно приводится в движение:

$$Y = 1, 0 < X < 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, Y, 0) = 1, \Psi(X, Y, 0) = 0.$$

При решении стационарной задачи при данном числе  $Re$  возможно в качестве начальных условий использовать значения функции тока, полученные при данном числе  $Re$ .

На рисунке 2.3 представлены результаты, полученные на основе разностных схем, представленных в пунктах (2.5) – (2.7), на равномерной квадратной сетке.

В таблице 1 указаны значения  $\Psi$  и  $\Omega$  в центре основного вихря. Хорошее соответствие наблюдается при небольшом значении  $Re$ , были использованы разностные схемы лишь второго порядка точности и небольшое количество узлов.

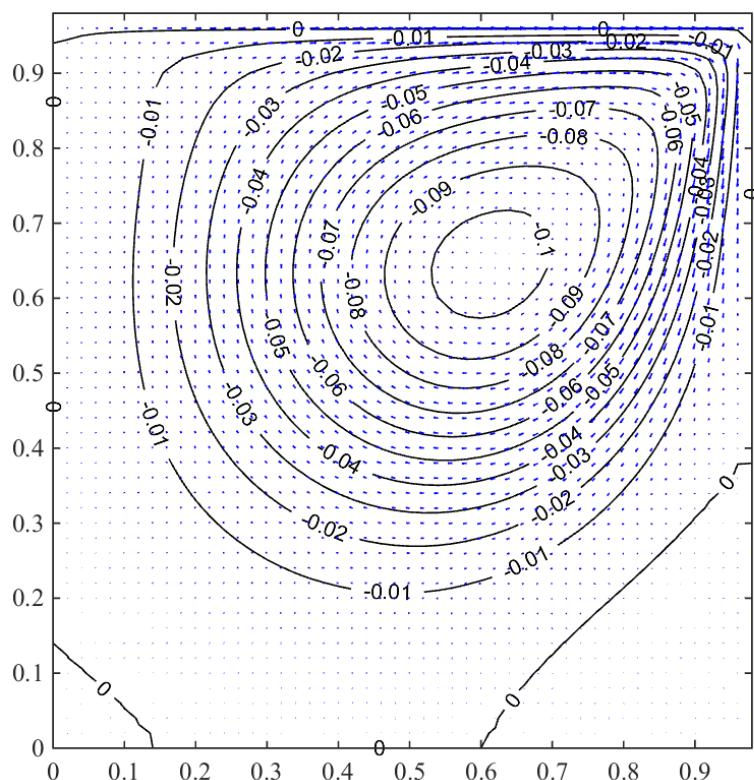


Рисунок 2.3 – типичные линии тока и поле скоростей при  $Re = 100$ .

Таблица 1 – Сравнение значений  $\Psi$  и  $\Omega$  в центре основного вихря

Re	Результаты, полученные в настоящей работе	Rogers, Kwak [43] аппроксимация 5-го порядка	Chia [44]
	$\Psi_{min}, (\Omega)$	$\Psi_{min}, (\Omega)$	$\Psi_{min}, (\Omega)$
00	-0.1031 (3.174)	-0.1030 (3.104)	-0.1034 (3.166)
	100x100	81x81	129x129
00	-0.1043 (2.951)	-0.1131 (2.296)	-0.1139 (2.294)
	100x100	81x81	129x129

### 2.9.2. Естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области

Среда находится в замкнутой области [39] с твердыми стенками, имеющими высоту  $H$  и длину  $L$ , при наличии некоторого распределения температур на границе области, а именно на двух боковых границах ( $x = 0, L$ ) поддерживаются постоянные по высоте, но различные температуры  $T_1$  и  $T_2, T_1 >$

$T_2$ , а верхнее и нижнее основания области ( $y = 0, H$ ) предполагаются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси  $Y$  (см рисунок 2.4).

При численном моделировании будем рассматривать случай квадратной области ( $L = H$ ). В качестве масштаба длины выберем  $L$ , а безразмерную температуру введем следующим образом:

$$\Theta = \frac{T - T^*}{T_1 - T_2}, \text{ где } T^* = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Тогда математическая постановка тепловой гравитационной конвекции для рассматриваемой области в безразмерных переменных примет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2.9.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -2\Omega, \quad (2.9.2.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.9.2.3)$$

Безразмерные граничные условия для предложенной системы уравнений (2.9.2.1) – (2.9.2.3) имеют вид:

$$Y = 0, Y = 1 \quad 0 \leq X \leq 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0.5;$$

$$X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = -0.5.$$

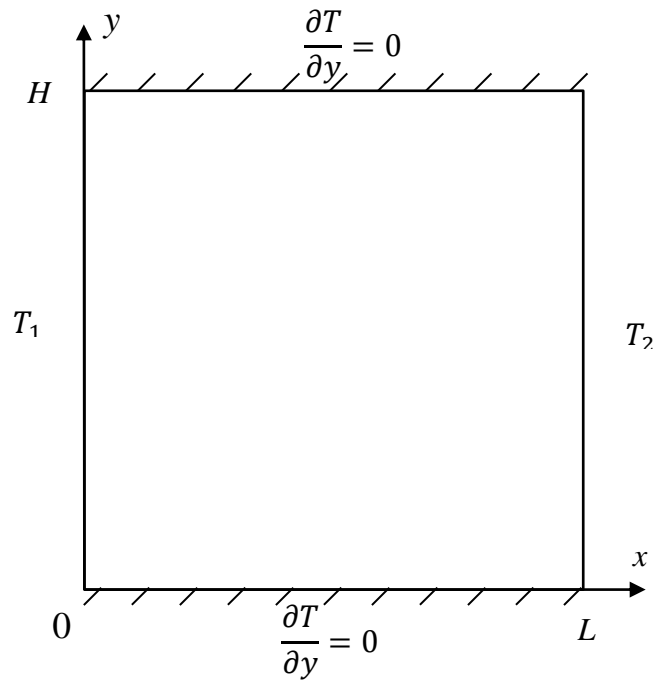


Рисунок 2.4 – Область решения тестовой задачи

Необходимо отметить, что на стационарном режиме для обоснования достоверности полученных результатов проверялось выполнение интегральных балансов энергии и расхода массы [40]:

На рисунках 2.5, 2.6 показаны типичные линии тока, поля скорости и поля температуры.

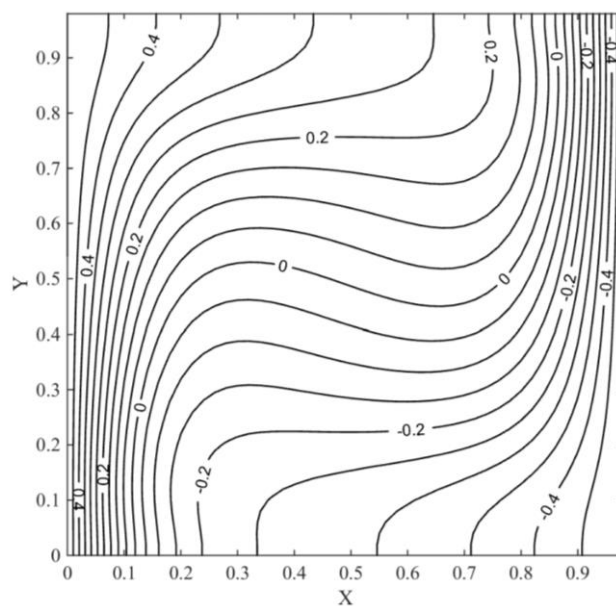


Рисунок 2.5 – Типичное поле температуры при  $Gr = 2.7 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 0.727$

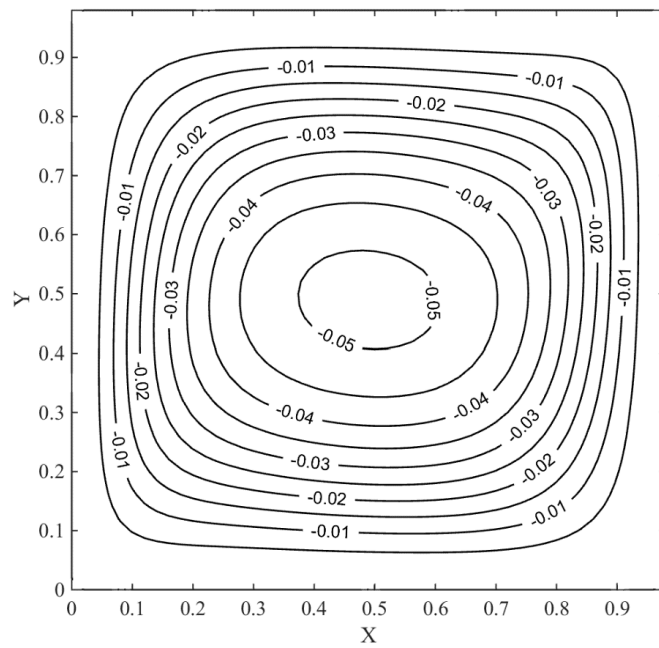


Рисунок 2.6 – Типичное поле скоростей и линии тока при:  $Gr = 2.7 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 0.727$

Линии тока, полученные в настоящей работе, находятся в достаточно хорошем качественном согласовании с результатами работы [41].



### **3. ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ**

Целью данного раздела работы является технико-экономическое обоснование научно-исследовательских работ (НИР). Оно проводится с целью определения и анализа трудовых и денежных затрат, направленных на реализацию НИР, а также уровня научно-технической результативности НИР.

Рамки данной работы НИР включают в себя создание математической модели для моделирования состояния конвективных течений в хранилищах сжиженного природного газа путем создания программного комплекса. При создании комплекса использовались среда программирования и отладки матричная лаборатория MatLab. На основе НИР оформлена диссертационная работа в пакете программ Microsoft Office.

#### **3.1. Предпроектный анализ.**

##### **3.1.1. Потенциальные потребители результатов исследования.**

Изучение теплопереноса в хранилищах сжиженного природного газа (СПГ) имеет большое значение при моделировании и оптимизации физических процессов, связанных с хранением и транспортировкой СПГ. Увеличение количества хранилищ и объемов производства СПГ и неотложность проблем охраны окружающей среды приводят к тому, что возникает необходимость знать о том, что может привести к аварии на больших хранилищах СПГ и вовремя предотвратить это. Таким образом, изучение процессов теплопереноса в различных хранилищах СПГ сложно переоценить.

Конвективный теплоперенос играет важную роль в природе и во многих отраслях техники, представляющих значительный интерес. В частности, от масштабов естественной конвекции зависит безопасность эксплуатации хранилищ СПГ.

В данной работе впервые получено решение задачи конвективного теплопереноса в хранилище СПГ.

Создан вычислительный комплекс для моделирования конвективного теплопереноса в хранилище СПГ.

Полученные новые численные результаты могут быть использованы для совершенствования существующих методик расчета теплового состояния хранилищ СПГ, а также позволят прогнозировать оптимальный режим их эксплуатации. Разработанная математическая модель может быть применена для определения параметров теплового режима хранилища СПГ. При этом могут быть учтены факторы старения материалов теплоизоляционных конструкций.

Так же теоретически определены рынки сбыта разработанного программного обеспечения, это крупнотоннажные заводы СПГ, такие как: Балтийский СПГ, Владивосток-СПГ и Сахалин-2.

### **3.2. Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения**

Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения позволяет провести оценку сравнительной эффективности научной разработки и определить направления для ее будущего повышения.

В результате научно-исследовательской работы необходимо проанализировать влияние конвективного теплообмена в прямоугольной области, что наглядно видно на графических изображениях. Поэтому для исследования выбрано программное обеспечение MatLab, так как в нем встроен графический модуль, что исключает необходимость использовать дополнительные программы для построения зависимостей.

Таблица 3.1 – Оценочная карта для сравнения конкурентного программного обеспечения (технических разработок)

Наименование ПО	Преимущества	Недостатки
MatLab	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Удобный графический интерфейс;</li> <li>2. Проверка результатов в режиме реального времени;</li> <li>3. Содержит обширную библиотеку компонентов блок-схемы, а также удобный редактор компонентов;</li> <li>4. Возможность исследовать работоспособность систем, выявлять ошибки, исправлять недостатки.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Дороговизна лицензий;</li> <li>2. Неполная поддержка статических функций.</li> </ol>
Pascal	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Качественная среда разработки, включающая мощный отладчик;</li> <li>2. Высокая скорость компиляции;</li> <li>3. Высокая скорость выполнения откомпилированных программ.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Недостаточно полно реализовано объектно-ориентированное программирование;</li> <li>2. Компилятор рассчитан на реальный режим DOS, который сейчас практически не используется</li> </ol>
C++	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Пользовательские функции-операторы позволяют кратко и ёмко записывать выражения над пользовательскими типами в естественной алгебраической форме;</li> <li>2. Поддерживаются различные стили и технологии программирования;</li> <li>3. Эффективность. Язык спроектирован так, чтобы дать программисту максимальный контроль над всеми аспектами структуры и порядка исполнения программы.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Сложность и избыточность, из-за которых C++ трудно изучать.</li> <li>2. В языке практически полностью сохранён набор конструкций Си.</li> <li>3. Шаблоны в своём исходном виде приводят к порождению кода очень большого объём.</li> <li>4. Метапрограммирование на основе шаблонов C++ сложно и при этом ограничено в возможностях.</li> </ol>
Python	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. встроенные структуры данных, словари, кортежи;</li> <li>2. простой и удобный синтаксис;</li> <li>3. мощные интерфейсы к конкретным ОС.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. медленное выполнение;</li> <li>2. плохо читается код;</li> <li>3. отсутствуют встроенные современные типы данных.</li> </ol>

### 3.3. SWOT-анализ

SWOT – Strengths (сильные стороны), Weaknesses (слабые стороны), Opportunities (возможности) и Threats (угрозы) – представляет собой комплексный анализ научно-исследовательского проекта. SWOT анализ применяют для исследования внешней и внутренней среды проекта.

Таблица 3.2 – Матрица SWOT

	<b>Сильные стороны научно-исследовательского проекта:</b> С1. Низкая стоимость программного обеспечения С2. Низкая стоимость исследования в целом (в сравнении с другими видами исследования) С3. Ненадобность в дорогостоящем лицензировании продукта С4. Доступная замена зарубежным аналогам С5. Легкий и быстрый доступ к расчетам на любых компьютерных системах	<b>Слабые стороны научно-исследовательского проекта:</b> СЛ1. Продолжительное время отладки кода программного обеспечения СЛ2. Узкий выбор исследуемых веществ (природный газ)
<b>Возможности:</b> В1. Использование инновационной инфраструктуры ТПУ В2. быстрое развитие углеводородной отрасли В3. Появление дополнительного спроса на данный продукт В4. Импортзамещение на российском рынке.		
<b>Угрозы:</b> У1. Сложности экспорта технологий У2. сложности с сертификацией технологий У3. Повышение цен на стоимость программного обеспечения У4. Рост конкуренции на рынке подлобных продуктов		

Таблица 3.3 – Интерактивная матрица проекта

	Сильные стороны проекта					
		С1	С2	С3	С4	С5
Возможности проекта	В1	0	0	0	0	0
	В2	0	0	0	1	0
	В3	1	2	1	1	2
	В4	1	1	0	2	0
	Слабые стороны проекта					
		СЛ1	СЛ2	СЛ3	СЛ4	СЛ5
Возможности проекта	В1	0	0			
	В2	0	0			
	В3	0	2			
	В4	0	0			
	Сильные стороны проекта					
		С1	С2	С3	С4	С5
Угрозы	У1	1	0	0	0	0
	У2	0	1	1	1	0
	У3	1	2	0	1	0
	У4	1	1	0	1	0

Где «2» - означает сильное соответствие сторон, «1» - слабое соответствие, «0» - отсутствие соответствия вообще.

Исходя из результатов интерактивных таблиц, на наличие соответствий сторон с возможностями и угрозами, можно сделать вывод о том, что научно-исследовательский проект имеет ряд преимуществ, а именно низкая стоимость проекта, его доступность, дают ряд возможностей для его развития.

### 3.4. Оценка готовности проекта к коммерциализации

Для того чтобы оценить готовность проекта к коммерциализации составим бланк оценки степени готовности проекта.

Таблица 3.4 – Бланк оценки степени готовности научного проекта к коммерциализации.

№ п/п	Наименование	Степень проработанности научного проекта	Уровень имеющихся знаний у разработчика
1.	Определен имеющийся научно-технический задел	3	3
2.	Определены перспективные направления коммерциализации научно-технического задела	3	2
3.	Определены отрасли и технологии (товары, услуги) для предложения на рынке	3	2
4.	Определена товарная форма научно-технического задела для представления на рынок	2	1
5.	Определены авторы и осуществлена охрана их прав	2	3
6.	Проведена оценка стоимости интеллектуальной собственности	1	2
7.	Проведены маркетинговые исследования рынков сбыта	2	2
8.	Разработан бизнес-план коммерциализации научной разработки	3	2
9.	Определены пути продвижения научной разработки на рынок	3	1
10.	Разработана стратегия (форма) реализации научной разработки	3	2
11.	Проработаны вопросы международного сотрудничества и выхода на зарубежный рынок	1	1
12.	Проработаны вопросы использования услуг инфраструктуры поддержки, получения льгот	1	1
13.	Проработаны вопросы финансирования коммерциализации научной разработки	2	1
14.	Имеется команда для коммерциализации научной разработки	1	1
15.	Проработан механизм реализации научного проекта	3	1
	<b>ИТОГО БАЛЛОВ</b>	<b>34</b>	<b>25</b>

При проведении анализа по таблице, приведенной выше, по каждому показателю ставится оценка по пятибалльной шкале. При этом система

измерения по каждому направлению (степень проработанности научного проекта, уровень имеющихся знаний у разработчика) отличается. Так, при оценке степени проработанности научного проекта 1 балл означает не проработанность проекта, 2 балла – слабую проработанность, 3 балла – выполнено, но в качестве не уверен, 4 балла – выполнено качественно, 5 баллов – имеется положительное заключение независимого эксперта. Для оценки уровня имеющихся знаний у разработчика система баллов принимает следующий вид: 1 означает не знаком или мало знаю, 2 – в объеме теоретических знаний, 3 – знаю теорию и практические примеры применения, 4 – знаю теорию и самостоятельно выполняю, 5 – знаю теорию, выполняю и могу консультировать.

После проведения анализа видно, что степень проработанности научного проекта на среднем уровне, а уровень имеющихся знаний у разработчика ниже среднего.

### **3.5. Планирование управления научным проектом.**

#### **3.5.1 Контрольные события проекта.**

При организации процесса реализации конкретного проекта необходимо оптимально планировать занятость каждого из его участников и сроки проведения отдельных работ.

Первоначально составляется полный перечень проводимых работ, и определяются их исполнители и оптимальная продолжительность. Результатом планирования работ является сетевой, либо линейный график реализации проекта. Наиболее удобным, простым и наглядным способом для этих целей является использование линейного графика. Для его построения составим перечень работ и соответствие работ своим исполнителям в таблице 1. Основные исполнители в проекте: инженер (И) и научный руководитель (НР).

Таблица 3.5 – Перечень работ и продолжительность их выполнения

Этапы работы	Исполнители	Загрузка исполнителей
Формулирование задачи	НР	100%
Составление технического задания на проект	НР	90%
	И	10%
Поиск и изучение литературы	НР	20%
	И	80%
Разработка календарного плана	НР	80%
	И	20%
Разработка общего алгоритма программного комплекса	НР	30%
	И	70%
Реализация алгоритма в среде программирования	НР	5%
	И	95%
Отладка полученного программного комплекса	И	100%
Оформление расчетно-пояснительной записки	И	100%
Подведение итогов – сравнение полученных результатов с желаемыми	НР	40%
	И	60%

### 3.5.2. План проекта.

Перейдем к расчету продолжительности этапов работ, который осуществляется опытно-статистическим методом, который реализуется вероятностным способом. Для определения ожидаемого значения продолжительности работ  $t_{ож}$  и других величин воспользуемся следующими формулами (1 – 4)[1].

$$t_{ож} = \frac{3 \cdot t_{\min} + 2 \cdot t_{\max}}{5}, \quad (1)$$

где  $t_{\min}$  – минимальная трудоемкость работ, чел/дн.;



$t_{\max}$  – максимальная трудоемкость работ, чел/дн.

Для построения линейного графика необходимо рассчитать длительность этапов в рабочих днях, а затем перевести в календарные дни. Расчет продолжительности выполнения каждого этапа в рабочих днях,  $T_{рд}$  ведется по формуле

$$T_{рд} = \frac{t_{ож}}{K_{вн}} \cdot K_{д}, \quad (2)$$

где  $t_{ож}$  – трудоемкость работы, чел/дн.;

$K_{вн}$  – коэффициент выполнения работ ( $K_{вн} = 1$ );

$K_{д}$  – коэффициент, учитывающий дополнительное время на компенсации и согласование работ ( $K_{д} = 1,2$ ).

Расчет продолжительности этапа в календарных днях,  $T_{кд}$  ведется по формуле

$$T_{кд} = T_{рд} \cdot T_{к}, \quad (3)$$

где  $T_{к}$  – коэффициент календарности.

Коэффициент календарности,  $T_{к}$  рассчитывается по формуле:

$$T_{к} = \frac{T_{кал}}{T_{кал} - T_{вд} - T_{пд}}, \quad (4)$$

где  $T_{кал}$  – календарные дни ( $T_{кал} = 365$ );

$T_{вд}$  – выходные дни ( $T_{вд} = 52$ );

$T_{пд}$  – праздничные дни ( $T_{пд} = 12$ ).

$$T_{к} = \frac{365}{365 - 52 - 12} = 1,213$$

В таблице 2 приведены длительность этапов работ и число исполнителей, занятых на каждом этапе. На основании таблицы 1 составим линейный график работ и представим его на рисунке 1.

Таблица 3.6 – Трудозатраты на выполнение проекта

Этап	Исполнители	Продолжительность работ, дни			Длительность работ, чел/дн.			
		$t_{\min}$	$t_{\max}$	$t_{\text{ож}}$	ТРД		ТКД	
					НР	И	НР	И
Формулирование задачи	НР	2	4	2,8	3,36	–	4,08	–
Составление технического задания на проект	НР, И	2	3	2,4	2,59	0,29	3,14	0,35
Поиск и изучение литературы	НР, И	12	15	13,2	3,17	12,67	3,84	15,37
Разработка календарного плана	НР, И	2	4	2,8	2,69	0,67	3,26	0,82
Разработка общего алгоритма программного комплекса	НР, И	8	15	10,8	3,89	9,07	4,72	11,00
Реализация алгоритма в среде программирования	НР, И	18	25	20,8	1,25	23,71	1,51	28,76
Отладка полученного программного комплекса	И	15	20	17	–	20,40	–	24,75
Оформление расчетно-пояснительной записки	И	10	15	12	–	14,40	–	17,47
Подведение итогов	НР, И	4	7	5,2	2,50	3,74	3,03	4,54
Итого:				87	19,44	84,96	23,58	103,06

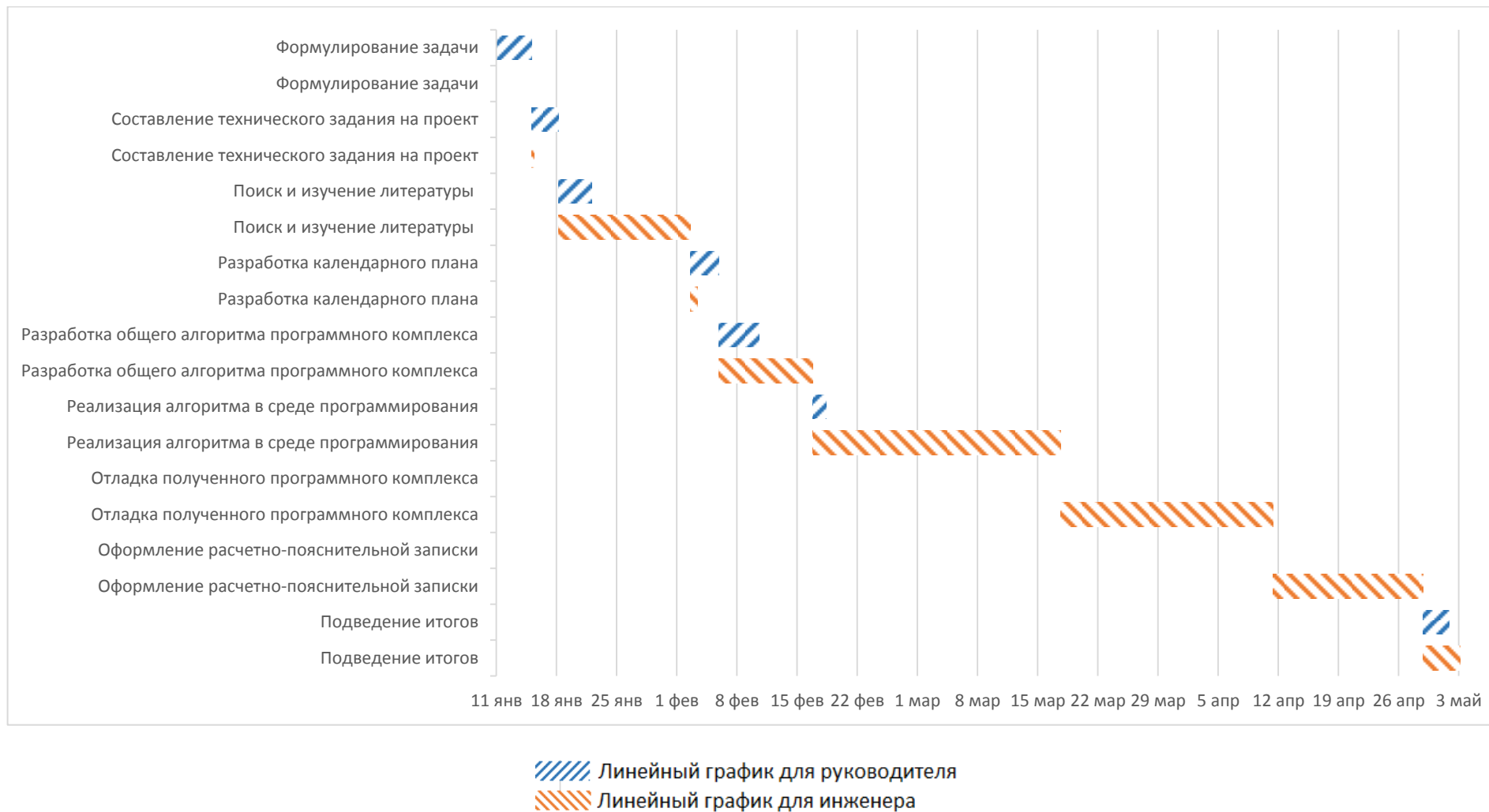


Рисунок 3.1 - Линейный график работ на основе рассчитанного для инженера и научного руководителя времени ТКД

### 3.6. Бюджет научного исследования

Оценим затраты на материалы. К данной статье расходов относится стоимость материалов, покупных изделий, полуфабрикатов и других материальных ценностей, расходуемых непосредственно в процессе выполнения работ. Цена материальных ресурсов определяется по средней рыночной стоимости на 2015 год по соответствующим ценникам и приведена в таблице 3.

Таблица 3.7 – Расходные материалы [2],[3]

Наименование материалов	Цена за ед., руб.	Количество	Сумма, руб.
Офисная техника			
Компьютер	25000	1	25000
Клавиатура	500	1	500
Мышка	500	1	500
Принтер	4000	1	4000
Офисная мебель			
Стол	2000	1	2000
Стул	700	1	700
Программное обеспечение			
MatLab R2014b	2 337.66	1	2 337.66
Microsoft Office 2010	21000	1	21000
Итого:	56037,66		

Расходы на материалы составили  $C_{\text{мат}} = 56037,66$  руб.

Следующей статьей расходов НИР для оценки является заработная плата исполнителей. Данная статья расходов включает заработную плату научного руководителя и инженера, а также премии, входящие в фонд заработной платы. Расчет основной заработной платы выполняется на основе

трудоемкости выполнения каждого этапа и величины месячного оклада исполнителя.

Среднедневная заработная плата рассчитывается по формуле:

$$\text{Дневная з. пл} = \frac{\text{Месячный оклад}}{25,17 \text{ дней}}, \quad [5]$$

Расчет затрат на основную заработную плату приведен в таблице 4.

Таблица 4.8 – Затраты на основную заработную плату

Исполнитель	Оклад, руб./мес	Среднедневная ставка, руб./день	Затраты времени, дни	К	Фонд з/платы, руб.
НР	24600	980,86	24	1,4	32 957
И	15000	598,09	104	1,4	87 081
Итого:			120 038,3		

Таким образом, затраты на основную заработную плату составили  $ЗП_{\text{осн}} = 120038$  руб. При расчете учитывалось, что в году 301 рабочий день и, следовательно, в месяце 25,08 рабочих дня. Затраты времени на выполнение работы по каждому исполнителю брались из таблицы 2. Также был принят во внимание коэффициент, учитывающий коэффициент по премиям  $K_{\text{пр}} = 0,1$  и районный коэффициент  $K_{\text{рк}} = 0,3$ . Итоговый коэффициент ( $K = 1 + K_{\text{пр}} + K_{\text{рк}} = 1 + 0,1 + 0,3 = 1,4$ ).

Дополнительная заработная плата рассчитывается исходя из 10-15% от основной заработной платы, работников, непосредственно участвующих в выполнении темы [1], используемые формулы (6 – 15) взяты [1]

$$ЗП_{\text{доп}} = 0,1 \cdot ЗП_{\text{осн}}, \quad (6)$$

$$ЗП_{\text{доп}} = 0,1 \cdot 120038 = 12000,38 \text{ руб.}$$

В результате научно-исследовательской работы необходимо проанализировать влияние конвективного теплообмена в прямоугольной области, что наглядно видно на графических объектах. Поэтому для

исследования выбрано программное обеспечение MatLab, так как в нем встроен графический модуль, что исключает необходимость использовать дополнительные программы для построения зависимостей. Фонд заработной платы:

$$\text{ФЗП} = \text{ЗП}_{\text{осн}} + \text{ЗП}_{\text{доп}}, \quad (7)$$

$$\text{ФЗП} = 120038 + 12000,38 = 132042,1 \text{ руб}$$

Расчет отчислений от фонда оплаты труда

Отчисления по заработной плате определяются по следующей формуле:

$$C_{\text{соц}} = K_{\text{соц}} \cdot \text{ФЗП}, \quad (8)$$

где  $K_{\text{соц}}$  – коэффициент отчислений на уплату во внебюджетные фонды (пенсионный фонд, фонд обязательного страхования и пр.). Данный коэффициент составляет 30% от затрат на заработную плату.

$$C_{\text{соц}} = 0,3 \cdot 132042,1 = 39612,63 \text{ руб.}$$

Перейдем к расчету затрат на электроэнергию. Данный вид расходов включает в себя затраты на электроэнергию при работе оборудования а также затраты на электроэнергию, потраченную на освещение. Затраты на электроэнергию при работе оборудования для технологических целей  $\text{Э}_{\text{об}}$  рассчитываются по формуле

$$\text{Э}_{\text{об}} = P_{\text{об}} \cdot C_{\text{э}} \cdot t_{\text{об}}, \quad (9)$$

где  $P_{\text{об}}$  – мощность, потребляемая оборудованием, кВт;

$C_{\text{э}}$  – тарифная цена за 1 кВт·час, принимаем  $C_{\text{э}} = 1,8 \text{ руб/кВт} \cdot \text{час}$ ;

$t_{\text{об}}$  – время работы оборудования, час.

Время работы оборудования вычисляется на основе данных для  $T_{\text{рд}}$  таблицы 2 для инженера из расчета, что продолжительность рабочего дня равна 8 часов

$$t_{\text{ОБ}} = T_{\text{РД}} \cdot 8, \quad (10)$$

$$t_{\text{ОБ}} = 85 \cdot 8 = 680 \text{ час.}$$

Мощность, потребляемая оборудованием  $P_{\text{ОБ}}$ , принимаем равную мощности блока питания компьютера и монитора

$$P_{\text{ОБ}} = P_{\text{БП}} + P_{\text{М}}, \quad (11)$$

$$P_{\text{ОБ}} = 0,4 + 0,1 = 0,5 \text{ кВт,}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ОБ}} = 0,5 \cdot 1,8 \cdot 680 = 612 \text{ руб.}$$

Затраты на электроэнергию для освещения помещения, где осуществлялось выполнение проекта  $\mathcal{E}_{\text{ОС}}$ , рассчитываются по формуле

$$\mathcal{E}_{\text{ОС}} = P_{\text{ОС}} \cdot \text{Ц}_{\text{Э}} \cdot t_{\text{ОС}}, \quad (12)$$

где  $P_{\text{ОС}}$  – мощность, потребляемая осветительными приборами, кВт;

$t_{\text{ОС}}$  – время работы осветительных приборов, час.

Мощность, потребляемая освещением  $P_{\text{ОС}}$ , определяется по формуле

$$P_{\text{ОС}} = P_{\text{УСТ.ОС}} \cdot K_{\text{С}}, \quad (13)$$

где  $P_{\text{УСТ.ОС}}$  – установленная мощность осветительных приборов,

принимаем  $P_{\text{УСТ.ОС}} = 1,28 \text{ кВт}$ ;

$K_{\text{С}}$  – коэффициент спроса для внутреннего освещения,

принимаем  $K_{\text{С}} = 0,9$ .

$$P_{\text{ОС}} = 1,28 \cdot 0,9 = 1,15 \text{ кВт.}$$

Время работы освещения  $t_{\text{ОС}}$ , час, определяется по формуле

$$t_{\text{ОС}} = t_{\text{СУТ}} \cdot T, \quad (14)$$

где  $t_{\text{СУТ}}$  – длительность работы освещения за смену, час;

$T$  – время, затраченное на проведение работ,



принимаем  $T = 85$  дней.

$$t_{OC} = 5 \cdot 85 = 425 \text{ час},$$

$$\mathcal{E}_{OC} = 1,15 \cdot 1,8 \cdot 425 = 881,28 \text{ руб.}$$

Общие затраты на электроэнергию  $\mathcal{E}$ , руб, определяются по формуле

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{OB} + \mathcal{E}_{OC}, \quad (15)$$

$$\mathcal{E} = 612 + 881,28 = 1561,28 \text{ руб.}$$

Следующим этапом расчёта затрат является расчет амортизационных расходов

Амортизационные отчисления рассчитываются на время использования ЭВМ по формуле

$$C_{AM} = \frac{N_A \cdot C_{OB}}{F_D} \cdot t_{BT}, \quad (16)$$

где  $N_A$  – годовая норма амортизации,

принимаем  $N_A = 25\%$ ;

$C_{OB}$  – цена оборудования,

исходя из таблицы 4 принимаем  $C_{OB} = 25000$  руб.;

$F_D$  – действительный годовой фонд рабочего времени,

принимаем  $F_D = 2416$  часов;

$t_{BT}$  – время работы вычислительной техники при создании программного продукта, по таблице 10  $t_{BT} = 104 \cdot 8 = 832$  час.;

$$C_{AM} = \frac{0,25 \cdot 25000}{2416} \cdot 832 = 2152,32 \text{ руб.}$$

Для оценки не учтённых в предыдущих статьях расходов рассчитаем прочие расходы [1].

Прочие расходы составляют 16 % от единовременных затрат на выполнение технического продукта и проводятся по формуле:

$$C_{\text{ПРОЧ}} = (C_{\text{МАТ}} + C_{\text{ОСН}} + C_{\text{СОЦ}} + Э + C_{\text{АМ}}) \cdot 0,16, \quad (17)$$

$$C_{\text{ПРОЧ}} = (73700 + 120038 + 39612,63 + 1561,28 + 2152,32) \cdot 0,16 = \\ = 37930,32 \text{ руб.}$$

Определим общую себестоимость НИР путем сведения рассчитанных статей расчета в смету (таблица 6).

Таблица 3.9 – Смета затрат на НИР

Статья затрат	Условное обозначение	Сумма, руб.
1	2	3
Материалы и покупные изделия	$C_{\text{МАТ}}$	56037,66
Фонд оплаты труда	$C_{\text{ОСН}}$	120 038
Отчисления из ФОТ	$C_{\text{СОЦ}}$	39612,63
Расходы на электроэнергию	Э	1561,28
Амортизационные отчисления	$C_{\text{АМ}}$	2 152,32
Работы, выполняемые сторонними организациями	$C_{\text{СТОП}}$	–
Прочие расходы	$C_{\text{ПРОЧ}}$	37930,32
Итого:		257332,21

Таким образом, расходы на НИР составили:  $C = 257332,21$  руб.

### 3.7. Расчет нарастания технической готовности работ

Следующим этапом является расчет нарастания технической готовности работ. Величина нарастания технической готовности работы  $H_i$  показывает на сколько процентов выполнена работа на каждом этапе. Данная величина вычисляется по формуле (17)[1]:

$$H_i = \frac{t_{H_i}}{t_0} \cdot 100\%, \quad (17)$$

где  $t_{H_i}$  - нарастающая трудоемкость с момента начала работы  $i$ -го этапа;

$t_0$  - общая трудоемкость.

Общая трудоемкость  $t_0$ , вычисляется по формуле (18):

$$t_0 = \sum_{i=1}^n t_{ож_i}, \quad (18)$$

где  $t_{ож_i}$  - ожидаемая продолжительность  $i$ -го этапа.

Удельный вес каждого этапа  $Y_i$  определяется по формуле (19)[1]:

$$Y_i = \frac{t_{ож_i}}{t_0} \cdot 100\%. \quad (19)$$

Результаты вычислений  $H_i$  и  $Y_i$  отражены в таблице 3.

Таблица 3.10 – Нарастание технической готовности работы и удельный вес каждого этапа

	Этап	$H_i$ , %	$Y_i$ , %
1	Формулирование задачи	3,22	3,22
2	Составление технического задания на проект	5,98	2,76
3	Поиск и изучение литературы	21,15	15,17
4	Разработка календарного плана	24,37	3,22
5	Разработка общего алгоритма программного комплекса	36,78	12,41
6	Реализация алгоритма в среде программирования	60,69	23,91
7	Отладка полученного программного комплекса	80,23	19,54
8	Оформление расчетно-пояснительной записки	94,02	13,79
9	Подведение итогов	100,00	100,00

Таким образом мы видим процесс нарастания технической готовности в плоть до полного выполнения с течением времени по ходу последовательного выполнения определенных этапов.

В данном разделе работы определены этапы и трудоемкость работ, составлены план-график и смета затрат, произведен расчет нарастания технической готовности программного комплекса. Программный комплекс завершен на 100% и готов к использованию.

Согласно сметы затрат расходы на НИР составили  $C = 257332,21$  руб.

Данный проект является экономически эффективным, так как при затратах около четверти миллиона рублей позволяет спрогнозировать аварии на хранилищах сжиженного природного газа и тем самым предотвратить потери объемом в стоимость постройки нового хранилища сжиженного природного газа и ущерба окружающей среде.

В ходе получения результатов расчета программы заказчики могут иметь представление о погрешностях уже разработанных хранилищ сжиженного природного газа и, при необходимости для предотвращения аварий, внести изменения в конструкцию или режим работы резервуаров СПГ.

В первой главе диссертации говорится, что при возникновении чрезвычайной ситуации в хранилище сжиженного природного газа (СПГ) и последующем его разрушении в следствии протекания необратимых физических процессов тепломассопереноса, наносится большой ущерб как самому хранилищу, так и окружающей среде из-за утечек СПГ в атмосферу. Исходя из этого видно, что затраты на разработку математической модели, позволяющей смоделировать процессы происходящие внутри хранилища, и предотвратить разрушение хранилища, незначительны по сравнению с возможными расходами необходимыми на восстановление хранилища после возникновения чрезвычайной ситуации.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ**

Shestakov, I.A., Dolgova A.A., Maksimov V.I. Mathematical simulation of convective heat transfer in the low-temperature storage of liquefied natural gas. Smart Grids Conference/ Tomsk, Russia – sep 28-oct 02, 2015, 37-№01050