Математика и механика
Физика

УДК 514.76

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_m НА АФФИННОЕ A_n ($m \geq n$)

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: lutchinin@mail.ru

Рассматривается дифференцируемое отображение V_m^n:$E_m \to A_n (m \geq n)$ евклидова пространства E_m на аффинное пространство A_n. Изучаются поля двумерных площадок в E_m и A_n, определяемых фундаментальным геометрическим объектом Г отображения $V_m^n (m \geq n)$ в смысле Г.Ф. Лаптева.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, евклидово пространство, многомерные пространства.
Key words:
Differentiable mapping, Euclidean space, multidimensional spaces.

1. Аналитический аппарат

Данная статья является продолжением статьи [1].

1.1. Рассматривается m-мерное евклидово пространство E_m, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R^*=\{\overline{B},\overline{\varepsilon}_a\}$, $(a,b,c=\overline{1,m})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{B} = \Theta^a \overline{\varepsilon}_a, \; d\overline{\varepsilon}_a = \Theta_a^b \overline{\varepsilon}_b;$$

$$D\Theta^a = \Theta^b \Lambda \Theta_b^a, \; D\Theta_a^b = \Theta_a^c \Lambda \Theta_c^b; \; \Theta_a^b + \Theta_b^a = 0. \quad (1.1)$$

1.2. Рассматривается n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_i\}$, $(i,j,k,l=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{A} = \omega^i \overline{e}_i, \; d\overline{e}_i = \omega_i^k \overline{e}_k;$$

$$D\omega^i = \omega^j \Lambda \omega_j^i, \; D\omega_i^k = \omega_i^j \Lambda \omega_j^k. \quad (1.2)$$

1.3. Реперы $\overset{*}{R}$ в E_m и R в A_n выбираются так, чтобы точки $B \in E_m$ и $A \in A_n$ с радиус-векторами $\overline{B}$ и $\overline{A}$ были текущими точками соответствующих пространств. Тогда 1-формы Θ^a и ω^i в силу (1.1) и (1.2) являются главными, и их можно считать базовыми.

Зададим отображение [1, (1.3)]:

$$V_m^n : E_m \to A_n, \quad (1.3)$$

которое каждой точке $B \in E_m$ ставит в соответствие вполне определенную точку $A \in A_n$. Тогда дифференциальные уравнения [1. Ур. (1.4), (1.5)] отображения (1.3) можно записать с учетом (1.1) и (1.2) в виде:

$$\omega^i = A_a^i \Theta^a; \; dA_a^i + A_a^j \omega_j^i - A_b^i \Theta_a^b = A_{ab}^i \Theta^b,$$

$$A_{[ab]}^i = 0, \; (a,b=\overline{1,m}; i,j=\overline{1,n}). \quad (1.4)$$

Здесь компоненты A_a^i образуют фундаментальный геометрический объект Г [1, (1.6)] отображения (1.3):

$$\Gamma = \{A_a^i\}. \quad (1.5)$$

2. Биективное отображение V_n^n:$E_n \to A_n$

2.1. Всюду в данном пункте используется следующая система индексов:

$$a,b,c=\overline{1,n}; \; i,j,k,l=\overline{1,n}. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что отображение V_n^n:$E_n \to A_n$ является невырожденным в каждой точке $B \in E_m$, т. е.

$$\det[A_a^i] \neq 0. \quad (2.2)$$

Тогда можно ввести в рассмотрение систему величин B_i^a:

$$A_a^i B_i^b = \delta_a^b, \; A_a^i B_j^a = \delta_j^i. \quad (2.3)$$

Из (2.3) и (1.4) получаются дифференциальные уравнения

$$dB_i^a + B_i^b\Theta_b^a - B_j^a\omega_i^j = B_{ib}^a\Theta^b. \qquad (2.4)$$

Здесь явный вид величин B_{ib}^a для нас несущественен. Из (1.4) с учетом (2.2) и (2.3) получаем

$$\Theta^a = B_i^a\omega^i. \qquad (2.5)$$

Заметим, что дифференциальные уравнения (2.5) и (2.4) фактически являются дифференциальными уравнениями отображения $V_n^n: E_n \to A_n$.

2.2. В точке $B\in E_m$ введем в рассмотрение нижеследующие величины, охватываемые компонентами геометрического объекта (1.5) и их продолжениями A_{ab}^i и определяемые с учетом (1.4). (2.4) и (2.5) соответствующими дифференциальными уравнениями:

1. $B_{ij} = \sum_{a=1}^{n} B_i^a B_j^a,\ B_{[ij]} = 0;$

$$dB_{ij} - B_{kj}\omega_i^k - B_{ik}\omega_j^k = B_{ija}\Theta^a = B_{ja}B_k^a\omega^k. \qquad (2.6)$$

2. $B^{ij}: B^{ik}B_{kj} = \delta_j^i,\ B^{[ij]} = 0, \det[B_{ij}] \neq 0;$

$$dB^{ij} + B^{kj}\omega_k^i + B^{ik}\omega_k^j = B_a^{ij}\Theta^a = B_a^{ij}B_k^a\omega^k. \qquad (2.7)$$

3. $A_{ija} = B_{ija} - \frac{1}{n}B_{kla}B^{kl}B_{ij},\ A_{[ij]a} = 0;$

$$dA_{ija} - A_{kja}\omega_i^k - A_{ika}\omega_j^k - A_{ijb}\Theta_a^b = A_{jba}\Theta^a. \qquad (2.8)$$

4. $F_{ijk} = A_{ija}B_k^a,\ F_{[ij]k} = 0;$

$$dF_{ijk} - F_{ljk}\omega_i^l - F_{ilk}\omega_j^l - F_{ijl}\omega_k^l = F_{ijka}\Theta^a. \qquad (2.9)$$

5. $C_{ijk} = \frac{1}{3}(F_{ijk} + F_{jki} + F_{kij}),\ G_{[ijk]} = 0;$

$$dG_{ijk} - G_{ljk}\omega_i^l - G_{ilk}\omega_j^l - G_{ijl}\omega_k^l = G_{ijka}\Theta^a. \qquad (2.10)$$

6. $C_i = C_{ijk}B^{jk} = \frac{1}{3}(2F_{ijk}B^{jk} + F_{jki}B^{jk});$

$$dC_i - C_j\omega_i^j = C_{ia}\Theta^a = C_{ia}B_j^a\omega^j. \qquad (2.11)$$

7. $C^i = C_jB^{ji}; dC^i - C^k\omega_k^i = C_a^i\Theta^a. \qquad (2.12)$

Заметим, что величины (2.6)–(2.12) образуют соответствующие тензоры в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

В следующих пунктам будут рассмотрены в каждой точке $B\in E_m$ и соответствующей точке $A=V_n^nB\in A_n$ геометрические образы, определяемые величинами, о которых идет речь в (2.6)–(2.12).

2.3. Тензор B_{ij} каждой точке $B\in E_m$ ставит в соответствие гиперконус B_{n-1}^2 второго порядка с вершиной в точке $A\in A_n$ (здесь $A=V_n^nB$ – образ точки B в аффинном пространстве A_n), определяемый уравнением

$$B_{ij}x^ix^j = 0. \qquad (2.13)$$

Геометрическая характеристика этого гиперконуса такая же, как и в [1, (2.16), (2.17)]. Этот гиперконус в силу (2.6) в общем случае является невырожденным, т. е. не имеет прямолинейной вершины, проходящей через точку $A\in A_n$.

2.4. Пользуясь условиями инвариантности [2] геометрических образов в аффинном пространстве и учитывая (2.6) и (2.13), получаем, что каждому направлению $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)u^a\in E_n$ в пространстве A_n отвечает алгебраическая $(n-2)$-мерная поверхность $S_{n-2}(u)$ – пересечение гиперконуса $B_{n-1}^2\subset A_n$ со своим близким $(B_{n-1}^2)'$ в направлении u, определяемая уравнениями:

$$S_{n-2}(u): \begin{cases} B_{ij}x^ix^j = 0, \\ B_{ija}x^ix^ju^a - 2B_{ij}A_a^ju^ax^i = 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Пучок $Q_{n-1}^2(u,\lambda)$ гиперквадрик второго порядка в A_n, проходящих через S_{n-2} в силу (2.14) определяется уравнениями:

$$Q_{n-1}^2(u,\lambda): B_{ija}x^ix^ju^a - 2B_{ij}A_a^ju^ax^i + \lambda B_{ij}x^ix^j = 0. \qquad (2.15)$$

Асимптотическими гиперконусами пучка гиперквадрик $Q_{n-1}^2\subset A_n$ в силу (2.15) являются гиперконусы $K_{n-1}^2(u,\lambda)$ второго порядка с вершиной $A\in A_n$, отвечающие направлению $u\in E_n$ и определяемые уравнениями

$$K_{n-1}^2(u,\lambda): B_{ija}x^ix^ju^a + \lambda B_{ij}x^ix^j = 0. \qquad (2.16)$$

2.4. Из пучка гиперконусов $K_{n-1}^2(u,\lambda)$, отвечающих направлению $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)u^a\in E_n$, выделяется в силу (2.13), (2.6), (2.7) гиперконус $Q_{n-1}^2(u)$, отвечающий направлению u и аполярный B_{n-1}^2:

$$K_{n-1}^2(u): A_{ija}x^ix^ju^a = 0. \qquad (2.17)$$

Образу $y=V_n^nu$ в силу (2.17) и (2.9) в аффинном пространстве A_n отвечает гиперконус

$$\overset{*}{K}{}_{n-1}^2(y): F_{ijk}x^ix^jy^k = 0.$$

Отсюда с учетом (2.10) замечаем, что гиперконус $Q_{n-1}^3\subset A_n$ третьего порядка с вершиной в точке $A\in A_n$, определяемый уравнениями:

$$K_{n-1}^3: C_{ijk}x^ix^jx^k = 0, \qquad (2.18)$$

представляет собой совокупность всех направлений $x=(\overline{A},\overline{e}_i)x^i\in A_n$, отвечающих точке $B\in E_n$, которым соответствуют гиперконусы $K_{n-1}^2(x)$.

Из (2.18) в силу (2.11), (2.13) и (2.7) следует, что гиперплоскость

$$\Gamma_{n-1}: C_iy^i = 0 \qquad (2.19)$$

представляет собой совокупность всех прямых $y=(\overline{A},\overline{e}_i)y^i\in A_n$, которым отвечают первые поляры относительно K_{n-1}^3, аполярные гиперконусу $B_{n-1}^2\subset E_n$.

Из (2.6), (2.7), (2.10), (2.12), (2.13) и (2.18) следует, что каждой точке $B\in E_n$ в пространстве A_n отвечает прямая $G=(\overline{A},\overline{e}_i)G^i\in A_n$ – линейный полюс той гиперплоскости относительно гиперконуса B_{n-1}^2, которая является квадратичной полярой для гиперконуса K_{n-1}^3, где величины G^i определяются по формулам

$$G^i = B^{ik}G_k, \quad G_i = C_{ijk}C^jC^k, \qquad (2.20)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dG^i + G^k\omega_k^i = G_a^i\Theta^a = G_a^iB_k^a\omega^k.$$

Из (2.20) и (2.12) следует, что в общем случае направления $C=(A,\bar{e}_i)C^i\in E_n$ и $G=(A,\bar{e}_j)C^j\in E_n$ в точке $A\in E_n$ линейно независимые, т. е.

$$\operatorname{Rang}\begin{bmatrix} C^1 & C^2\ldots & C^n \\ G^1 & G^2\ldots & G^n \end{bmatrix}=2. \qquad (2.21)$$

Здесь прямая C полярно сопряжена гиперплоскости Γ_{n-1} относительно гиперконуса B^2_{n-1}.

Поэтому каждой точке $B\in E_n$ в аффинном пространстве A_n можно поставить в соответствие двумерную площадку

$$L^1_2=C\bigcup G: x^{\alpha_2}=f^{\alpha_2}_{\alpha_1}x^{\alpha_1},$$
$$(\alpha_1,\beta_1=1,2;\alpha_2,\beta_2=\overline{3,m}), \qquad (2.22)$$

где величины $f^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ определяются из системы линейных уравнений:

$$f^{\alpha_2}_{\alpha_1}C^{\alpha_1}=C^{\alpha_2}, f^{\beta_2}_{\beta_1}G^{\beta_1}=G^{\beta_2};$$
$$(\alpha_1,\beta_1=1,2;\alpha_2,\beta_2=\overline{3,m}).$$

2.6. Из (2.20) и (2.12) следует, что направления

$$\overset{*}{C}=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_a)\overset{*}{C}{}^a\in E_m, \overset{*}{G}=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_b)\overset{*}{G}{}^b\in E_m,$$

где

$$\overset{*}{C}{}^a=B^a_iC^i, \overset{*}{G}{}^b=B^b_jG^j \qquad (2.23)$$

являются прообразами направлений $C\in A_n$ и $G\in A_n$ при отображении $V^n_n:E_n\to A_n$.

Легко видеть с учетом (2.21) и (2.23), что в общем случае в точке $B\in E_n$ направления $\overset{*}{C}$ и $\overset{*}{G}$ в E_n линейно независимы. Поэтому в E_n можно определить двумерную площадку

$$\Gamma^1_2:\overset{*}{C}\bigcup\overset{*}{G}:u^{a_2}=\overset{*}{f}{}^{a_2}_{a_1}u^{a_1},$$
$$(a_1,b_1=1,2;a_2,b_2=\overline{3,m}), \qquad (2.24)$$

где величины $\overset{*}{f}{}^{a2}_{a1}$ определяются из системы

$$\overset{*}{f}{}^{a_2}_{a_1}\overset{*}{C}{}^{a_1}=\overset{*}{C}{}^{a_2}, \overset{*}{f}{}^{b_2}_{b_1}\overset{*}{G}{}^{b_1}=\overset{*}{G}{}^{b_2},$$

$$\operatorname{Rang}\begin{bmatrix} \overset{*}{C}{}^1 & \overset{*}{C}{}^2\ldots & \overset{*}{C}{}^n \\ \overset{*}{G}{}^1 & \overset{*}{G}{}^2\ldots & \overset{*}{G}{}^n \end{bmatrix}=2.$$

Таким образом, с биективным отображением $V^n_n:E_n\to A_n$ ассоциируются поля двумерных площадок (2.22) в A_n и (2.24) в E_n, причем $L^1_2=V^n_n\Gamma^1_2$.

3. Сюръективное отображение $V^n_n:E_n\to A_n$ $(m>n)$

3.1. В этом пункте используется следующая система индексов:

$$a,b,c=\overline{1,m};\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n};$$
$$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{n+1,m};i,j,k,l=\overline{1,n}. \qquad (3.1)$$

Из (1.3) и (1.4) с учетом (3.1) получаем, что множество всех направлений $u=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_a)u^a\in E_m$, которые при отображении $V^n_n:E_n\to A_n$ вырождаются в точку A, образуют в E_m линейное подпространство L^1_n размерности n, определяемое уравнениями:

$$L^1_n: A^i_\alpha u^\alpha+A^i_{\hat{\alpha}}u^{\hat{\alpha}}=0. \qquad (3.2)$$

Репер $\overset{*}{R}$ в E_m канонизируем так, чтобы

$$L^1_n=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_1,\ldots,\bar{\varepsilon}_n), \qquad (3.3)$$

что с учетом (3.2), (1.1), (1.2) и (1.4) приводит к соотношениям

$$A^i_{\hat{\alpha}}=0, \det[A^i_\alpha]\neq 0,$$
$$\Theta^{\hat{\alpha}}_\alpha=-\Theta^\alpha_{\hat{\alpha}}=-A^\alpha_{\hat{\alpha}a}\Theta^a, \Theta^{\hat{\alpha}}_\alpha=A^{\hat{\alpha}}_{\alpha a}\Theta^a;$$
$$dA^{\hat{\alpha}}_{\alpha a}+A^{\hat{\beta}}_{\alpha a}\Theta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}-A^{\hat{\alpha}}_{\beta a}\Theta^\beta_\alpha-A^{\hat{\alpha}}_{\alpha b}\Theta^b_a=A^{\hat{\alpha}}_{\alpha ab}\Theta^b;$$
$$A^{\hat{\alpha}}_{\alpha[ab]}=0. \qquad (3.4)$$

Из (3.4) с учетом $(n>m)$ и (1.4) следует, что отображение $V^n_m:E_m\to A_n$ индуцирует отображение $V^n_n:E_n\to A_n$, поскольку

$$\omega^i=A^i_a\Theta^a \xrightarrow{(3.4)} \Theta^a=B^a_i\omega^j;$$
$$B^\alpha_iA^i_\beta=\delta^\alpha_\beta, B^\alpha_iA^j_\alpha=\delta^j_i. \qquad (3.5)$$

Из (3.3) в силу (1.1) следует, что каждой точке $B\in E_m$ отвечает $(n-m)$-плоскость

$$L^2_{m-n}=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_{n+1},\ldots,\bar{\varepsilon}_m). \qquad (3.6)$$

Таким образом, в каждой точке $B\in E_m$ инвариантным образом определены линейные подпространства (3.3) и (3.6). Поэтому в евклидовом пространстве E_m инвариантно определяется конус второго порядка с вершиной B, задаваемый уравнениями:

$$R^2_{m-1}: E_{ab}u^au^b=0, \qquad (3.7)$$

где симметрические величины E_{ab} определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$E_{ab}=\frac{1}{2}A^{\hat{\alpha}}_{\alpha(a}A^\alpha_{|\hat{\alpha}|b)};$$
$$dE_{ab}-E_{cb}\Theta^c_a-E_{ac}\Theta^c_b=E_{abc}\Theta^c. \qquad (3.8)$$

Здесь явный вид величин E_{abc} для нас несущественен. Геометрическая интерпретация гиперконуса (3.7) с учетом (3.8) аналогична геометрической интерпретации основной квадрики Q_{m-2} в [3, (24)].

3.2. Из (3.7) и (3.3) замечаем, что конус $\overset{*}{R}{}^2_{n-1}=R^2_{m-1}\cap L^1_n\subset E_m$ определяется уравнениями:

$$\overset{*}{R}{}^2_{n-1}: E_{\gamma\beta}u^\gamma u^\beta=0, u^{\hat{\alpha}}=0. \qquad (3.9)$$

Этот конус является в силу (3.9) и (3.5) прообразом конуса, принадлежащего A_n:

$$r^1_{n-1}: C_{ij}x^ix^j=0; C_{ij}=E_{\beta\gamma}B^\beta_iB^\gamma_j.$$

Заметим, что в пространстве A_n определен конус B^2_{n-1}:

$$B^2_{n-1}: B_{ij}x^ix^j=0; B_{ij}=\sum_{a=1}^{n}B^a_iB^a_j, \qquad (3.10)$$

аналогичный конусу (2.13).

Таким образом, с учетом (3.7)–(3.10) с отображением $V_m^n: E_m \to E_n$, $(m>n)$ ассоциируется поля гиперконусов

1. $B_{n-1}^2 \subset E_m$;
2. B_{n-1}^2 и r_{n-1}^2 в $A_n = V_m^n E_m$.

Поэтому в евклидовом пространстве E_m и в аффинном пространстве A_n можно определить поля двумерных площадок по аналогии с пунктами 2.5 и 2.6 данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства E_m в аффинное A_n $(m<n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 5–9.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Ивлев Е.Т., Тыртый-оол, Бразевич М.В. О некоторых геометрических образах многообразий двойственных линейных подпространств в многомерном проективном пространстве // Математический сборник. Изд-во Томского госуниверситета. – Томск, 1974. – Вып. 1. – С. 68–91.

Поступила 06.05.2009 г.

УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.Г. Кожобеков

Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская республика
E-mail: kudash_3012@rambler.ru

Доказаны теоремы существования и единственности решения задач сопряжений для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка.

***Ключевые слова**:*
Задача сопряжения, нелокальная задача, нелинейные уравнения, принцип сжатых отображений.
***Key words**:*
Conjugation problem, nonlocal problem, nonlinear equations, principle of contraction mapping.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами, часто сводится к задачам сопряжения для уравнений в частных производных [1–3].

В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_2<y<h_1\}(\ell,h_1,h_2>0)$ рассмотрим задачу сопряжения для следующих нелинейных уравнений третьего порядка

$$u_{xxx}(x,y)-u_y(x,y)=f_1(x,y,u(x,y),u_x(x,y)),$$
$$(x,y)\in D_1=D\cap(y>0), \qquad (1)$$

$$u_{xyy}(x,y)=f_2(x,y,u(x,y),u_y(x,y)),\ (x,y)\in D_2=$$
$$=D\cap(y<0), \qquad (2)$$

где $f_i(i=1,2)$ – заданные функции.

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D),\ u_{xxx}\in C(D_1),\ u_{xyy}\in C(D_2),$$

удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно и краевым условиям

$$u(0,y)=\phi_1(y),\ \ u(\ell,y)=\phi_2(y),$$
$$u_x(0,y)=\phi_3(y),\ 0\le y\le h_1, \qquad (3)$$

$$u(0,y)=\chi(y),\ \ -h_2\le y\le 0, \qquad (4)$$

$$u(x,-h_2)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (5)$$

где $\phi_i(y)(i=\overline{1,3})$, $\phi(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Уравнения (1) и (2) по классификации работы [4] принадлежат к разным типам уравнений с частными производными третьего порядка относительно старших производных.

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $y=0$ выполняются условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ \ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell. \qquad (6)$$

Отметим, что прямая $y=0$ является одновременно характеристикой как для уравнения (1), так и для уравнения (2). Уравнения (1) и (2) в совокупности с условиями сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [5] в области D. Краевые задачи для нелинейных уравнений смешанного типа второго порядка рассмотрены в работах [6, 7], а для нелинейных уравнений третьего порядка в [8, 9].

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций: