Таким образом, с учетом (3.7)–(3.10) с отображением $V_m^n:E_m \to E_n$, $(m>n)$ ассоциируется поля гиперконусов

1. $B_{n-1}^2 \subset E_m$;
2. B_{n-1}^2 и r_{n-1}^2 в $A_n = V_m^n E_m$.

Поэтому в евклидовом пространстве E_m и в аффинном пространстве A_n можно определить поля двумерных площадок по аналогии с пунктами 2.5 и 2.6 данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства E_m в аффинное A_n $(m<n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 5–9.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Ивлев Е.Т., Тыртый-оол, Бразевич М.В. О некоторых геометрических образах многообразий двойственных линейных подпространств в многомерном проективном пространстве // Математический сборник. Изд-во Томского госуниверситета. – Томск, 1974. – Вып. 1. – С. 68–91.

Поступила 06.05.2009 г.

УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.Г. Кожобеков

Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская республика
E-mail: kudash_3012@rambler.ru

Доказаны теоремы существования и единственности решения задач сопряжений для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка.

***Ключевые слова**:*
Задача сопряжения, нелокальная задача, нелинейные уравнения, принцип сжатых отображений.
***Key words**:*
Conjugation problem, nonlocal problem, nonlinear equations, principle of contraction mapping.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами, часто сводится к задачам сопряжения для уравнений в частных производных [1–3].

В области $D=\{(x,y):0<x<\ell, -h_2<y<h_1\}(\ell,h_1,h_2>0)$ рассмотрим задачу сопряжения для следующих нелинейных уравнений третьего порядка

$$u_{xxx}(x,y)-u_y(x,y)=f_1(x,y,u(x,y),u_x(x,y)),$$
$$(x,y)\in D_1 = D\cap(y>0), \quad (1)$$

$$u_{xyy}(x,y)=f_2(x,y,u(x,y),u_y(x,y)),\ (x,y)\in D_2 =$$
$$= D\cap(y<0), \quad (2)$$

где $f_i(i=1,2)$ – заданные функции.

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D),\ u_{xxx}\in C(D_1),\ u_{xyy}\in C(D_2),$$

удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно и краевым условиям

$$u(0,y)=\phi_1(y),\ \ u(\ell,y)=\phi_2(y),$$
$$u_x(0,y)=\phi_3(y),\ 0\le y\le h_1, \quad (3)$$

$$u(0,y)=\chi(y),\ \ -h_2\le y\le 0, \quad (4)$$

$$u(x,-h_2)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (5)$$

где $\phi_i(y)(i=\overline{1,3})$, $\phi(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Уравнения (1) и (2) по классификации работы [4] принадлежат к разным типам уравнений с частными производными третьего порядка относительно старших производных.

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $y=0$ выполняются условия сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ \ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell. \quad (6)$$

Отметим, что прямая $y=0$ является одновременно характеристикой как для уравнения (1), так и для уравнения (2). Уравнения (1) и (2) в совокупности с условиями сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [5] в области D. Краевые задачи для нелинейных уравнений смешанного типа второго порядка рассмотрены в работах [6, 7], а для нелинейных уравнений третьего порядка в [8, 9].

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций:

1) $\phi_i(y) \in C^1[0, h_1]\,(i = \overline{1,3}),\ \chi(y) \in C^2[-h_2, 0],$

$\quad (x) \in C^1[0, \ell],\quad {}_1(0) = \quad (0),\quad (-h_2) = \quad (0);$

2)
$$f_i(x, y, u, p) \in C(\bar{D} \times R^2),$$
$$\forall (x, y, u, p) \in \bar{D} \times R^2 : \max\left|f_i(x, y, u, p)\right| \le H,$$
$$i = 1, 2,$$

H=const>0,R^2 – двумерное пространство переменных (u,p);

3)
$$\forall u, p, \bar{u}, \bar{p} \in R^2\ \exists L = const > 0:$$
$$\left|f_i(x, y, u, p) - f(x, y, \bar{u}, \bar{p})_i\right| \le$$
$$\le L(|u - \bar{u}| + |p - \bar{p}|), i = 1, 2.$$

Введем следующие обозначения
$$u(x, 0) = \tau(x),\ u_y(x, 0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \ell. \qquad (7)$$

Переходя к пределу при ψ+0 из уравнения (1), получаем
$$\tau'''(x) - \nu(x) = f_1(x, 0, \tau(x), \tau'(x)),\ 0 < x < \ell. \qquad (8)$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая краевые условия (4), (7), имеем
$$u(x, y) = \tau(x) + y\nu(x) + \chi(y) - \chi'(0)y - \chi(0) +$$
$$+\int_0^x d\xi \int_0^y (y - \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta,\ (x, y) \in D_2. \qquad (9)$$

Используя условие (5) из (9), получаем соотношение
$$\tau(x) - h_2\nu(x) = \Psi(x) -$$
$$-\int_0^x d\xi \int_{-h_2}^0 (h_2 + \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta;$$
$$0 \le x \le \ell, \qquad (10)$$

где $\Psi(x) = \psi(x) - \chi(-h_2) - h_2\chi'(0) + \chi(0)$.

Исключая $\nu(x)$ из (8) и (10) относительно $\tau(x)$, приходим к следующей задаче
$$\tau'''(x) - \frac{1}{h_2}\tau(x) = f_1(x, 0, \tau(x), \tau'(x)) - \frac{1}{h_2}\Psi(x) +$$
$$+\frac{1}{h_2}\int_0^x d\xi \int_{-h_2}^0 (h_2 + \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta,$$
$$0 < x < \ell, \qquad (11)$$
$$\tau(0) = \phi_1(0),\ \tau(\ell) = \phi_2(0),\ \tau'(0) = \phi_3(0). \qquad (12)$$

Уравнение (11) запишем в виде
$$\tau'''(x) = F(x),\ 0 < x < \ell, \qquad (13)$$

где $F(x) = \frac{1}{h_2}\tau(x) + f_1(x, 0, \tau(x), \tau'(x)) - \frac{1}{h_2}\Psi(x) +$
$$+\frac{1}{h_2}\int_0^x d\xi \int_{-h_2}^0 (h_2 + \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta.$$

Введем функцию $\tau(x) = \tau_1(x) + \Phi_1(x)$, где
$$\text{Ц}_1(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)\phi_1(0) + \frac{x^2}{\ell^2}\phi_2(0) + \left(x - \frac{x^2}{\ell}\right)\phi_3(0).$$

Тогда с учетом (12) и (13) для $\tau_1(x)$ приходим к следующей задаче
$$\tau_1'''(x) = F(x),\ 0 < x < \ell,$$
$$\tau_1(0) = 0,\ \tau_1(\ell) = 0,\ \tau_1'(0) = 0. \qquad (14)$$

Решение задачи (14) имеет вид
$$\tau_1(x) = \int_0^\ell G(x, \xi) F(\xi)\, d\xi,$$

где
$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi\ell - x\xi}{2\ell^2}(x\xi + \xi\ell - 2x\ell),\ 0 \le \xi \le x, \\ -\frac{x^2}{2\ell^2}(\ell - \xi)^2,\ x \le \xi \le \ell. \end{cases}$$

– функция Грина.

Таким образом, для $\tau(x)$ получим следующее соотношение
$$\tau(x) = \Phi(x) + \frac{1}{h_2}\int_0^\ell G(x, \xi)\tau(\xi)\, d\xi +$$
$$+\int_0^\ell G(x, \xi) f_2(\xi, 0, \tau(\xi), \tau'(\xi))\, d\xi +$$
$$+\int_0^\ell d\xi \int_{-h_2}^0 E(x, \xi, \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta, \qquad (15)$$

где
$$\Phi(x) = \Phi_1(x) - \frac{1}{h_2}\int_0^\ell G(x, \xi)\Psi(\xi)\, d\xi,$$
$$E(x, \xi, \eta) = \frac{h_2 + \eta}{h_2}\int_\xi^\ell G(x, s)\, ds.$$

Дифференцируя (15), имеем
$$\tau'(x) = \Phi'(x) + \frac{1}{h_2}\int_0^\ell G_x(x, \xi)\tau(\xi)\, d\xi +$$
$$+\int_0^\ell G_x(x, \xi) f_1(\xi, 0, \tau(\xi), \tau'(\xi))\, d\xi +$$
$$+\int_0^\ell d\xi \int_{-h_2}^0 E_x(x, \xi, \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta. \qquad (16)$$

Тогда для $\nu(x)$ получим соотношение
$$\nu(x) = \frac{1}{h_2}\Phi(x) + \frac{1}{h_2^2}\int_0^\ell G(x, \xi)\tau(\xi)\, d\xi +$$
$$+\frac{1}{h_2}\int_0^\ell G(x, \xi) f_1(\xi, 0, \tau(\xi), \tau'(\xi))\, d\xi +$$
$$+\frac{1}{h_2}\int_0^\ell d\xi \int_{-h_2}^0 E(x, \xi, \eta) f_2(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_\eta(\xi, \eta))\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{h_2}\int_0^x d\xi \int_{-h_2}^0 (h_2+\eta) f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{h_2}\Psi(x). \qquad (17)$$

С учетом (15) и (17) для $u(x,y)$ приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\frac{h_2+y}{h_2^2}\int_0^\ell G(x,\xi)\tau(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{h_2+y}{h_2}\int_0^\ell G(x,\xi) f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))\,d\xi+$$

$$+\frac{h_2+y}{h_2}\times$$

$$\times\int_0^\ell d\xi\int_{-h_2}^0 E(x,\xi,\eta) f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_y^0 (\eta-y) f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_{-h_2}^0 \frac{y(h_2+\eta)}{h_2} f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta, \qquad (18)$$

где

$$u_0(x,y)=\frac{h_2+y}{h_2}\Phi(x)-\frac{y}{h_2}\Psi(x)+$$

$$+\chi(y)-\chi'(0)y-\chi(0).$$

Дифференцируя по y, из (18) получим

$$u_y(x,y)=u_{0y}(x,y)+\frac{1}{h_2^2}\int_0^\ell G(x,\xi)\tau(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{h_2}\int_0^\ell G(x,\xi) f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{h_2}\int_0^\ell d\xi\int_{-h_2}^0 E(x,\xi,\eta) f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta-$$

$$-\int_0^x d\xi\int_y^0 f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_{-h_2}^0 \frac{h_2+\eta}{h_2} f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))\,d\eta. \qquad (19)$$

Таким образом, разрешимость задачи 1 сведена к решению системы уравнений (15), (16), (18), (19), которая является замкнутой системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для ее решения применим принцип сжатых отображений. С этой целью систему уравнений запишем в виде операторного уравнения

$$g=Ag, \qquad (20)$$

в котором $g=(g_1,g_2,g_3,g_4)$ – вектор-функция с компонентами $g_1=\tau(x)$, $g_2=\tau'(x)$, $g_3=u(x,y)$, $g_4=u_y(x,y)$, а оператор $A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ определен на множестве функций $g\in C(\overline{D}_2)$ и его компоненты в соответствии с равенствами (15), (16), (18), (19) определяются формулами

$$A_i g\equiv g_{0i}+\int_0^\ell K_{i1}g_1(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^\ell K_{i2}f_1(\xi,0,g_1(\xi),g_2(\xi))\,d\xi+$$

$$+\int_0^\ell d\xi\int_{-h_2}^0 K_{i3}f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_y^0 K_{i4}f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_{-h_2}^0 K_{i5}f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))\,d\eta,\ \ i=\overline{1,4}, \qquad (21)$$

где

$$K_{11}=\frac{1}{h_2}G(x,\xi),\ K_{12}=G(x,\xi),$$

$$K_{13}=E(x,\xi,\eta),\ K_{14}=0,\ K_{15}=0,$$

$$K_{21}=\frac{1}{h_2}G_x(x,\xi),\ K_{22}=G_x(x,\xi),$$

$$K_{23}=E_x(x,\xi,\eta),\ K_{24}=0,\ K_{25}=0,$$

$$K_{31}=\frac{h_2+y}{h_2^2}G(x,\xi),\ K_{32}=\frac{h_2+y}{h_2}G(x,\xi),$$

$$K_{33}=\frac{h_2+y}{h_2}E(x,\xi,\eta),\ K_{34}=\eta-y,\ K_{35}=\frac{y(h_2+y)}{h_2},$$

$$K_{41}=\frac{1}{h_2^2}G(x,\xi),\ K_{42}=\frac{1}{h_2}G(x,\xi),$$

$$K_{43}=\frac{1}{h_2}E(x,\xi,\eta),\ K_{44}=-1,\ K_{45}=\frac{h_2+\eta}{h_2},$$

а $g_{01}=\Phi(x)$, $g_{02}=\Phi'(x)$, $g_{03}=u_0(x,y)$, $g_{04}=u_{0y}(x,y)$ – компоненты вектора $g_0=(g_{01},g_{02},g_{03},g_{04})$.

Пусть оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)=\{g:\|g-g_0\|\le M\}$ в себя, где M – некоторое заданное число. Норму g определим равенством $\|g\|=\max\limits_{1\le i\le 4}\max|g_i|$. Для элементов g, принадлежащих шару $S(g_0,M)$, имеет место оценка $\|g\|\le\|g_0\|+M=Q$. В силу свойств заданных функций (условие 1, 2) заключаем, что $\max|K_{ij}|\le T$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,5}$.

Покажем, что оператор является на шаре $S(g_0,M)$ оператором сжатия. Пусть $g\in S(g_0,M)$. Тогда $Ag\in C(\overline{D}_2)$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$|A_i g-g_{0i}|\le\int_0^\ell |K_{i1}||g_1(\xi)|\,d\xi+$$

$$+\int_0^\ell |K_{i2}||f_1(\xi,0,g_1(\xi),g_2(\xi))|\,d\xi+$$

$$+\int_0^\ell d\xi\int_{-h_2}^0 |K_{i3}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|\,d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi \int_y^0 |K_{i4}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|d\eta +$$

$$+\int_0^x d\xi \int_{-h_2}^0 |K_{i5}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|d\eta \leq$$

$$\leq T\ell(Q+H+3Hh_2),\ i=\overline{1,4}.$$

Отсюда заключаем, что если $T\ell(Q+H+3Hh_2)\leq M$, то оператор отображает шар $S(g_0,M)$ в себя. Если учесть, что $Q=\|g_0\|+M$, то из предыдущего неравенства имеем $T\ell M+T\ell(\|g_0\|+H+3Hh_2)\leq M$. Очевидно, что оно имеет место, если $T\ell<1$ и

$$M\geq\frac{T\ell}{1-T\ell}(\|g_0\|+H+3Hh_2).$$

При таком подборе M имеем, что

$\forall g\in S(g_0,M):\|Ag-g_0\|\leq M$, то есть $Ag\in S(g_0,M)$.

Пусть $g^{(1)}=(g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)})$, $g^{(2)}=(g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_3^{(2)},g_4^{(2)})$ произвольные два элемента, принадлежащие шару $S(g_0,M)$. Тогда с помощью условия 3) имеем

Используя это условие из (21), получаем

$$\left|A_i g^{(1)}-A_i g^{(2)}\right|\leq\int_0^\ell |K_{i1}|\cdot\left|g_1^{(1)}(\xi)-g_1^{(2)}(\xi)\right|d\xi+$$

$$+\int_0^\ell |K_{i2}|\cdot\left|\begin{array}{l}f_1(\xi,0,g_1^{(1)}(\xi),\ g_2^{(1)}(\xi))-\\-f_1(\xi,0,g_1^{(2)}(\xi),g_2^{(2)}(\xi))\end{array}\right|d\xi+$$

$$+\int_0^\ell d\xi\int_{-h_2}^0 |K_{i3}|\cdot\left|\begin{array}{l}f_2(\xi,\eta,g_3^{(1)}(\xi,\eta),g_4^{(1)}(\xi,\eta))-\\-f_2(\xi,\eta,g_3^{(2)}(\xi,\eta),g_4^{(2)}(\xi,\eta))\end{array}\right|d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_y^0 |K_{i4}|\cdot\left|\begin{array}{l}f_2(\xi,\eta,g_3^{(1)}(\xi,\eta),g_4^{(1)}(\xi,\eta))-\\-f_2(\xi,\eta,g_3^{(2)}(\xi,\eta),g_4^{(2)}(\xi,\eta))\end{array}\right|d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_{-h_2}^0 |K_{i5}|\cdot\left|\begin{array}{l}f_2(\xi,\eta,g_3^{(1)}(\xi,\eta),g_4^{(1)}(\xi,\eta))-\\-f_2(\xi,\eta,g_3^{(2)}(\xi,\eta),g_4^{(2)}(\xi,\eta))\end{array}\right|d\eta\leq$$

$$\leq T\ell(1+2L+6Lh_2)\left\|g^{(1)}-g^{(2)}\right\|.$$

Отсюда следует, что если

$$T\ell<\frac{1}{1+2L+6Lh_2}, \tag{22}$$

то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)$ в себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха в шаре $S(g_0,M)$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение уравнения (20). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, мы однозначно определим все компоненты вектора g, в том числе $g_1(x)=\tau(x)$ и $g_3(x,y)=u(x,y)$ в области $\overline{D}_2$ Тем самым определяем решение задачи 1 в области D_2.

Решение задачи 1 в области D_1 определим как решение следующей задачи: найти в области D_1 регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) и $u(x,0)=\tau(x)$.

Однозначная разрешимость этой задачи в случае линейного уравнения (1) рассмотрена в работе [10], а для нелинейного уравнения – в работах [11, 12].

Таким образом, доказано следующая теорема.

Теорема. Если выполняются условия 1–3 и уравнение (22), то решение задачи 1 существует и единственно.

Аналогично исследуется

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1, если вместо условия (5) выполняется условие $u_y(x,-h_2)+\alpha(x)u(x,-h_2)=\psi(x)$ $0\leq x\leq\ell$, где $\alpha(y)$ – заданная функция, причем $1-h_2\alpha(x)\neq0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – Вып. 3 (87). – С. 3–19.
2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
3. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. – 1964. – Т. 7. – № 1. – С. 89–92.
4. Джураев Т.Д., Попелёк Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
6. Гвазава Дж.К. О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа. – Тбилиси: Мецниереба, 1981. – 94 с.
7. Майоров И.В. Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 2. – С. 280–283.
8. Сопуев У.А. Краевые задачи для нелинейного уравнения смешанного типа третьего порядка // Естественные и технические науки. – 2005. – № 6. – С. 14–20.
9. Сопуев А., Кожобеков К. Г. Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 146–151.
10. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari // Annali della seuola normale Superiore di pisa. – 1959. – V. XIII. – Serie III. – Fasc. II. – P. 163–203.
11. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
12. Абдиназаров С. Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ташкент, 1992. – 239 с.

Поступила 18.02.2009 г.