УДК 517.3

НАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ВЕТВИ ДРОБНОГО АНАЛИЗА ПОРЯДКА 3/2

В.А. Чуриков, В.М. Шахматов

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Даны начальные представления о ветви дробного анализа порядка 3/2. Рассмотрены экспоненты, тригонометрические и гиперболические функции в дробном анализе порядка 3/2.

Ключевые слова:
Ветвь дробного анализа порядка 3/2, элементарные функции ветви порядка 3/2.
Key words:
Fractional analysis branch of 3/2 power, elementary functions of the branch or 3/2 power.

В работе [1] была рассмотрена ветвь порядка 1/2 как модельная ветвь дробного анализа для порядков меньше единицы. Рассмотрим модельную ветвь рационального порядка больше единицы, но меньше двух. В этом случае удобно выбрать ветвь порядка 3/2.

Дробностепенные ряды с шагом 3/2 для данной ветви можно записать как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n/2-1} = a_0 x^{1/2} + a_1 x^2 + a_2 x^{7/2} + a_3 x^5 + \dots$$
$$+ a_{n-1} x^{3(n-1)/2-1} + a_n x^{3n/2-1} + \dots$$

Ряд частной экспоненты $\exp_{3/2} x$ можно получить как частный случай дробного порядка s=3/2 дробной экспоненты $\exp_\alpha x$ [2]

$$\exp_{3/2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n/2-1}}{\Gamma(3n/2)} = \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \frac{x^{7/2}}{\Gamma(9/2)} +$$
$$+ \frac{x^5}{\Gamma(6)} + \frac{x^{13/2}}{\Gamma(15/2)} + \frac{x^8}{\Gamma(9)} + \frac{x^{19/2}}{\Gamma(21/2)} + \frac{x^{11}}{\Gamma(12)} + \dots$$

Расписав гамма-функцию и перегруппировав элементы ряда, получим

$$\exp_{3/2} x = \frac{x^5}{5!} + \frac{2^7 x^{13/2}}{13!!\sqrt{\pi}} + \frac{x^8}{8!} + \frac{2^{10} x^{19/2}}{19!!\sqrt{\pi}} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots =$$
$$= \left(\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^4 x^{7/2}}{7!!\sqrt{\pi}} + \frac{2^7 x^{13/2}}{13!!\sqrt{\pi}} + \frac{2^{10} x^{19/2}}{19!!\sqrt{\pi}} \dots \right) +$$
$$+ \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} \dots \right).$$

Экспоненту $\exp_{3/2} x$ можно представить как сумму двух функций — экспоненты третьего порядка $\exp_3 x$ и функции $\xi_{3/2} x$, которую можно отнести к отдельному типу элементарных функций дробного анализа

$$\exp_{3/2} x = \xi_{3/2} x + \exp_3 x,$$

$$\exp_3 x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m+2}}{(3m+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} =$$
$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\xi_{3/2} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{3m+1} x^{3m+1/2}}{(6m+1)!!\sqrt{\pi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2} x^{3n-5/2}}{(6n-5)!!\sqrt{\pi}} =$$
$$= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2^4 x^{7/2}}{7!!\sqrt{\pi}} + \frac{2^7 x^{13/2}}{13!!\sqrt{\pi}} + \frac{2^{10} x^{19/2}}{19!!\sqrt{\pi}} \dots =$$
$$= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{2^3 x^3}{7!!} + \frac{2^6 x^6}{13!!} + \frac{2^9 x^9}{19!!} + \dots + \frac{2^{3m} x^{3m}}{(6m+1)!!} + \dots \right) =$$
$$= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{3m} x^{3m}}{(6m+1)!!} \right).$$

Эти две функции при дробном дифференцировании порядка 3/2 циклически переходят друг в друга

$$d^{-3/2} x : \exp_{3/2} x = d^{-3/2} x (\xi_{3/2} x + \exp_3 x) =$$
$$= \exp_3 x + \xi_{3/2} x,$$
$$d^{-3/2} x : \xi_{3/2} x = \exp_3 x, \; d^{-3/2} x : \exp_3 x = \xi_{3/2} x.$$

Для дифференцирования и интегрирования справедливы следующие соотношения

$$d^{-3/2} x : \exp_{3/2} x = \exp_{3/2} x,$$
$$d^{3/2} x : \exp_{3/2} x = \exp_{3/2} x + C_{3/2}(x).$$

Если аргумент экспоненты умножается на константу λ, то будут справедливы более общие формулы

$$d^{-3/2} x : \exp_{3/2}(\lambda x) = \lambda^{3/2} \exp_{3/2}(\lambda x),$$
$$d^{3/2} x : \exp_{3/2}(\lambda x) = \lambda^{-3/2} \exp_{3/2}(\lambda x) + C_{3/2}(x).$$

Данные формулы можно обобщить на любые функции $f(\lambda x)$, λ=const, которые выражаются через дробностепенные ряды

$$d^{-3/2} x : f(\lambda x) = \lambda^{3/2} f(\lambda x),$$
$$d^{3/2} x : f(\lambda x) = \lambda^{-3/2} f(\lambda x) + C_{3/2}(x).$$

Здесь приведён полином интегрирования $C_{3/2}(x)$ порядка 3/2, который выражается через ряд [2]

$$C_{3/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3/2-n} =$$
$$= a_1 x^{1/2} + a_2 x^{-1/2} + a_3 x^{-3/2} + a_4 x^{-5/2} + \dots,$$
$$a_n = \text{const}.$$

Через экспоненту $\exp_{3/2}x$ легко получить некоторые важные элементарные функции для ветви дробного анализа 3/2. Это гиперболические и тригонометрические функции порядка 3/2 на основе соотношений, введённых в [2].

Для гиперболического синуса $\mathrm{sh}_{3/2}x$ и косинуса $\mathrm{ch}_{3/2}x$ порядка 3/2 получим соотношения

$$\mathrm{ch}_{3/2}x = \frac{1}{2}(\exp_{3/2}(x) + \exp_{3/2}(-x)) =$$

$$= \mathrm{ch}_3 x + \frac{1}{2}(\xi_{3/2}(x) + \xi_{3/2}(-x)),$$

$$\mathrm{sh}_{3/2}x = \frac{1}{2}(\exp_{3/2}(x) - \exp_{3/2}(-x)) =$$

$$= \mathrm{sh}_3 x + \frac{1}{2}(\xi_{3/2}(x) - \xi_{3/2}(-x)).$$

Для тригонометрического синуса $\sin_{3/2}x$ и косинуса $\cos_{3/2}x$ порядка 3/2 получим

$$\cos_{3/2}x = \frac{1}{2}(\exp_{3/2}(ix) + \exp_{3/2}(-ix)) =$$

$$= \cos_3 x + \frac{1}{2}(\xi_{3/2}(ix) + \xi_{3/2}(-ix)),$$

$$\sin_{3/2} x = \frac{1}{2i}(\exp_{3/2}(ix) - \exp_{3/2}(-ix)) =$$

$$= \sin_3 x + \frac{1}{2i}(\xi_{3/2}(ix) + \xi_{3/2}(-ix)).$$

Другие гиперболические и тригонометрические функции, обозначения которых соответствуют общепринятым, только с нижним индексом 3/2 (который указывает на порядок ветви дробного анализа), будут выглядеть как

$$\mathrm{th}_{3/2}x = \frac{\mathrm{sh}_{3/2}x}{\mathrm{ch}_{3/2}x},\ \mathrm{cth}_{3/2}\,x = \frac{\mathrm{ch}_{3/2}x}{\mathrm{sh}_{3/2}x},$$

$$\mathrm{sch}_{3/2}x = \frac{1}{\mathrm{ch}_{3/2}x},\ \mathrm{csch}_{3/2}x = \frac{1}{\mathrm{sh}_{3/2}x},$$

$$\mathrm{tg}_{3/2}\,x = \frac{\sin_{3/2}x}{\cos_{3/2}x},\ \mathrm{ctg}_{3/2}\,x = \frac{\cos_{3/2}x}{\sin_{3/2}x},$$

$$\sec_{3/2}x = \frac{1}{\cos_{3/2}x},\ \mathrm{cosec}_{3/2}x = \frac{1}{\sin_{3/2}x}.$$

Полиномы порядка 3/2 степени n можно выразить

$$P_{(3/2)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{3(i+1)/2-1},$$

$$a_i = \mathrm{const},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots,\ n < \infty.$$

Или, расписав подробно,

$$P_{(3/2)|n}(x) = a_0 x^{1/2} + a_1 x^2 + a_2 x^{7/2} + a_3 x^5 + \ldots$$

$$+ a_{n-1} x^{3(n-1)/2-1} + a_n x^{3n/2-1}.$$

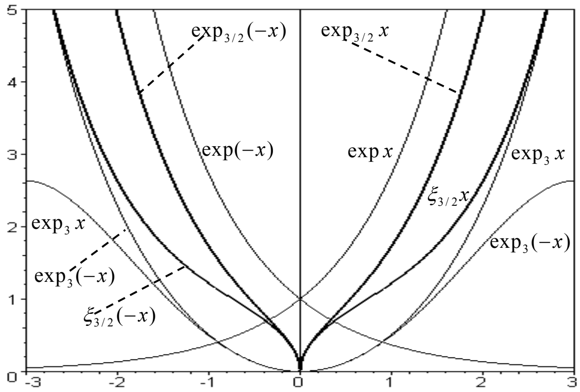

Рис. 1. *Экспоненты exp(–x), expx, $\exp_{3/2}x$, $\exp_{3/2}(-x)$, $\exp_3(-x)$, $\exp_3 x$ и функции $\xi_{3/2}x$, $\xi_{3/2}(-x)$ оси*

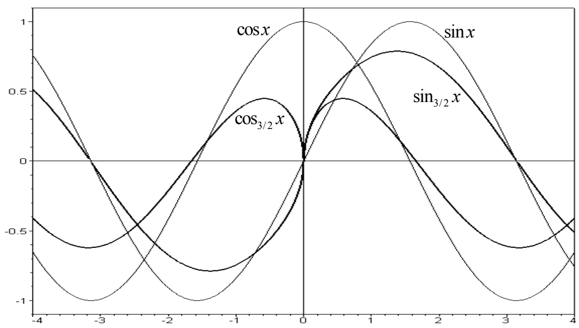

Рис. 2. *Графики функций $\sin_{3/2}x$, $\cos_{3/2}x$, sinx, cosx оси*

Для наглядности на рис. 1 и 2 приведены графики некоторых рассмотренных функций, а для сравнения даны некоторые функции традиционного анализа. На рис. 1 представлены графики функций $\exp_{3/2}x$, $\exp_3 x$, $\exp\ x$, $\xi_{3/2}x$, $\exp_{3/2}(-x)$, $\exp_3(-x)$, $\exp(-x)$, $\xi_{3/2}(-x)$. На рис. 2 изображены графики функций $\sin_{1/2}x$, $\cos_{1/2}x$, $\sin x$, $\cos x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ порядка 1/2 на основе подхода Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 21–23.
2. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.

Поступила 24.06.2009 г.