УДК 517.3

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ АДАМАРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрены взаимоотношения между операторами Адамара и функциями, на которые они действуют. Показано, что ряд свойств операторов в традиционном и дробном анализе различаются.

Ключевые слова:
Оператор Адамара, коммутативность операторов, коммутатор.
Key words:
Hadamard operator, operator commutability, commutator.

Рассматривая взаимодействие операторов Адамара дробного интегродифференцирования с функциями, можно обратить внимание, что алгебраические свойства операторов не всегда соответствуют их внутренней алгебре [1]. Поэтому имеет смысл рассмотреть данный вопрос более подробно. Отношение операторов Адамара к функциям будем называть внешней алгеброй.

Оператор Адамара линейный, т. е. удовлетворяет условиям однородности и аддитивности.

1. Однородность.

В общем случае, для любых функций $f(x)$, выражающихся через дробностепенные ряды [2], справедливо равенство

$$d^s x{:}af(x)=a\,d^s x{:}f(x),\ \ a=\text{const}.$$

В частном случае, для степенных функций данное равенство будет

$$d^s x : ax^q = ad^s x : x^q .$$

Это соотношение легко получить

$$d^s x : ax^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} ax^{q+s} =$$

$$= a\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} x^{q+s} = ad^s x : x^q .$$

В частности справедливы равенства

$$d^s x{:}\,1f(x)=d^s x{:}f(x),$$

для воздействия оператора Адамара на число a

$$dx^s{:}a=a\,d^s x{:}1,\ \ a=\text{const},$$

$$d^s x{:}0f(x)=0,\ \text{(умножение на ноль)}.$$

Выполняется ещё одно важное свойство во внешней алгебре.

2. Аддитивность.

Для сложения функций

$$d^s x{:}(f(x)+g(x))=d^s x{:}f(x)+d^s x{:}g(x);$$

для сложения операторов

$$(d^s x+d^q x)f(x)=d^q x{:}f(x)+d^s x{:}f(x).$$

Рассмотрим действие произведения операторов Адамара и их композиций на функции.

Теорема. При последовательном действии операторов Адамара $d^s x\cdot d^r x$ и композиции $d^{s+r}x$ на функцию $f(x)$ результаты в общем случае различаются.

В общем случае справедливо неравенство

$$d^{\alpha} x\cdot d^{\beta} x : f(x) \neq d^{\beta+\alpha} x : f(x).$$

Покажем это на примере степенных функций. При последовательном действии операторов $d^{-1}x$ и $d^{-1/2}x$ на константу a получим

$$d^{-1/2}x\cdot d^{-1}x : a = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

При действии на функцию композиции операторов $d^{-3/2}x$ даст

$$d^{-3/2}x : a = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-3/2+1)} x^{0-3/2} =$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2)} x^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Из этого следует, что справедливо неравенство

$$d^{-1/2}x\cdot d^{-1}x : a \neq d^{-3/2}x : a.$$

Расписав последовательно действие двух дробных операторов, получим

$$d^s x\cdot d^{\gamma} x : x^q = d^s x : \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)} x^{q+\gamma} =$$

$$= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma)} \frac{\Gamma(q+1+\gamma)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)} x^{q+s+\gamma} =$$

$$= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+\gamma+s)} x^{q+s+\gamma} = d^{s+\gamma} x : x^q .$$

Из этого равенства видно, что оно справедливо при выполнении условий, которые можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Композиция операторов $d^s x$ и $d^r x$ в оператор $d^{s+r}x$ и декомпозиция оператора $d^{s+r}x$ в последовательность операторов $d^s x\cdot d^r x$ при воздействии их на степенную функцию x^q возможна, когда одновременно выполняются неравенства $q+s\neq-1, -2, -3$ ..., $q+r\neq-1, -2, -3$ ..., $q+s+r\neq-1, -2, -3$ ...

Очевидно, что выполняется равенство $d^{s+r}x=d^{r+s}x$, а декомпозиция правой и левой частей дадут операторы разных последовательностей $d^r x \cdot d^s x$ и $d^s x \cdot d^r x$.

Будут ли эти операторы коммутативны при их действии на функции? Рассмотрим коммутативность операторов Адамара по отношению к функциям, на которые они действуют.

Рассмотрим это на частных примерах

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : 1 = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Вывод данного соотношения

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1}x : 1 = d^{-1/2}x : \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1+1)} x^{-1} =$$

$$= d^{-1/2}x : \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} x^{-1} = d^{-1/2}x : \frac{1}{\infty} x^{-1} = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Для другой последовательности операторов результат будет

$$d^{-1}x \cdot d^{-1/2}x : 1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Вывод данного соотношения

$$d^{-1}x \cdot d^{-1/2}x : 1 = d^{-1}x \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2+1)} x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(-1-1/2+1)} x^{-1-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-1/2)} x^{-3/2} = \frac{1}{\Gamma(-1/2)} x^{-3/2} =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \neq 0.$$

Другой пример воздействия оператора дифференцирования на полином интегрирования $C_s(x)$

$$d^{-1}x : C_{1/2}(x) \neq 0,$$

$$d^{-1/2}x \cdot d^{-1/2}x : C_{1/2}(x) = d^{-1/2}x : 0 = 0.$$

Из сказанного можно сформулировать и более общую теорему.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^s x$ и $d^r x$ на функцию $f(x)$ некоммутативно

$$d^s x \cdot d^r x : f(x) \neq d^r x \cdot d^s x : f(x).$$

Рассмотрим случаи, когда коммутативность возможна.

Теорема. Воздействие произведения двух операторов $d^s x$ и $d^r x$ на степенную функцию x^q некоммутативно, когда одновременно выполняются неравенства $q+s \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q+r \neq -1, -2, -3 \ldots$, $q+s+r \neq -1, -2, -3 \ldots$

Для операторов целочисленных порядков выполняются более простые соотношения.

Теорема. Для композиции и декомпозиции операторов Адамара с целочисленными порядками n и m при их воздействии на функции выполняется равенство

$$d^n x \cdot d^m x : f(x) = d^{m+n} x : f(x).$$

Теорема. Операторы с целочисленными порядками коммутируют с точностью до сложения с полиномами интегрирования

$$d^n x \cdot d^m x : f(x) = d^m x \cdot d^n x : f(x).$$

Эти утверждения верны по причине попадания сумм порядков операторов интегродифференцирования в полюсы гамма-функции.

Причин некоммутативности при воздействии операторов дробного интегродифференцирования на функцию $f(x)$ две. В соответствии с первой некоммутативность связана с соотношением между порядками операторов дифференцирования и показателями степеней степенных функций.

По второй причине некоммутативность связана с появлением полиномов интегрирования $C_s(x)$, когда хотя бы один из двух перемножаемых операторов является оператором интегрирования.

Рассмотрим это на примере пары обратных операторов ненулевого порядка, которые можно записать как

$$d^{-s}x \cdot d^s x : x^q = d^0 x : x^q = \mathbf{1} : x^q = x^q,$$

$$d^s x\ d^{-s}x : x^q = \mathbf{1} : x^q + C_s(x) = x^q + C_s(x).$$

Из этих равенств видна некоммутативность, которая характерна для традиционного анализа.

Можно записать и более общие соотношения для функций $f(x)$

$$d^{-s}x \cdot d^s x : f(x) = d^0 x : f(x) = \mathbf{1} : f(x) = f(x),$$

$$d^s x\ d^{-s}x : f(x) = \mathbf{1} : f(x) + C_s(x) = f(x) + C_s(x).$$

В этом случае справедливо неравенство

$$d^s x \cdot d^{-s}x : f(x) \neq d^{-s}x\ d^s x : f(x).$$

Данный тип некоммутативности удобно выразить через коммутатор

$$[d^s x,\ d^{-s}x] x^q = (d^s x\ d^{-s}x - d^{-s}x \cdot d^s x) x^q = C_s(x).$$

В более общем случае, когда операторы не обратные друг другу, их порядки не равными нулю, и один из них является оператором дифференцирования, а второй оператором интегрирования, коммутативность не выполняется $d^s x \cdot d^{-q}x \neq d^{-q}x\ d^s x$.

Это можно записать в виде коммутатора

$$[d^q x, d^{-s}x] f(x) = (d^q x \cdot d^{-s}x - d^{-s}x \cdot d^q x) f(x) =$$

$$= C_q(x) - d^{-s}x : C_q(x).$$

Покажем это

$$d^{-s}x \cdot d^q x : f(x) = d^{-s}x(\mathrm{F}^{(q)}(x) + C_q(x)) =$$

$$= d^{-s}x : \mathrm{F}^{(q)}(x) + d^{-s}x : C_q(x)),$$

$$d^q x \cdot d^{-s}x : f(x) = d^q x : f^{(s)}(x) \equiv \int f^{(s)}(x) d^q x + C_q(x).$$

Справедливы соотношения

$$d^{-s}x : \mathrm{F}^{(q)}(x) = d^q x : f^{(s)}(x) \equiv \int f^{(s)}(x) d^q x,$$

$$q-s \neq -1, -2, -3 \ldots,\ s-q \neq -1, -2, -3 \ldots$$

Рассмотрим данное соотношение для степенной функции

$$d^{-s}x \cdot d^{q}x : x^{r} = d^{-s}x : \left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)} x^{r+q} + C_{q}(x) \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+q)} \frac{\Gamma(r+q+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + d^{-s}x : C_{q}(x) =$$

$$\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + d^{-s}x : C_{q}(x),$$

$$d^{q}x \cdot d^{-s}x : x^{r} = d^{q}x : \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)} x^{r-s} =$$

$$= \frac{\Gamma(r-s+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-s)} x^{r+q-s} + C_{q}(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1-s)} x^{r+q-s} + C_{q}(x),$$

$$q+r-s \neq -1,\ -2,\ -3...;\ q-s \neq -1,\ -2,\ -3...$$

Окончательно получим

$$[d^{q}x,\, d^{-s}x]x^{r} = (d^{q}x \cdot d^{-s}x - d^{-s}x \cdot d^{q}x)x^{r} =$$

$$= C_{q}(x) - d^{-s}x : C_{q}(x).$$

Когда операторы дифференцирования и интегрирования в коммутаторе стоят в другом порядке, будет справедливо свойство антисимметричности

$$[d^{-s}x,\, d^{q}x]f(x) = -[d^{q}x,\, d^{-s}x]f(x) =$$

$$= (d^{-s}x \cdot d^{q}x - d^{q}x \cdot d^{-s}x)f(x) = d^{-s}x : C_{q}(x) - C_{q}(x).$$

Если оба оператора в коммутаторе будут операторами интегрирования, получим

$$[d^{s}x,\, d^{q}x]x^{r} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} +$$

$$+ d^{s}x : C_{q}(x) - \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1+s)} x^{r+q+s} -$$

$$- d^{q}x : C_{s}(x) = d^{s}x : C_{q}(x) - d^{q}x : C_{s}(x).$$

В общем случае будет выполняться равенство

$$[d^{s}x,\, d^{q}x]f(x) = d^{s}x : C_{q}(x) - d^{q}x : C_{s}(x).$$

Также будет справедливо свойство антисимметричности

$$[d^{s}x,\, d^{q}x]f(x) = -[d^{q}x,\, d^{s}x]f(x).$$

В общем случае произведение операторов и функций не является коммутативным, как это имеет место в обычном анализе

$$d^{s}x : f(x) \neq f(x)\, d^{s}x.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Внутренняя алгебра операторов дробного интегродифференцирования // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 12–15.
2. Чуриков В.А. Степенные ряды с дробным шагом и построение дробного анализа на основе оператора Адамара // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Междунар. Российско-Абхазского симпозиума VII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик-Эльбрус, 2009. – С. 237–242.

Поступила 24.06.2009 г.