Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 62-50

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ОБЛАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУХОВА

А.Г. Аветисян, С.О. Симонян, Д.А. Казарян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван
E-mail: cybinf@seua.am; ssimonyan@seua.am; davidghazaryan@rambler.ru

Показана возможность решения задач оптимального быстродействия на основе новейшего операторного метода дифференциальных преобразовании Пухова. С помощью дифференциальных преобразований динамическая задача сводится к эквивалентной ей задаче нелинейного программирования, сравнительно легко поддающейся к решению. Рассмотрен модельный пример и показана эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова:
Оптимальное быстродействие, принцип максимума, многоточечные краевые задачи, дифференциальные преобразования.
Key words:
Optimal speed, principle of maximum, multipoint boundary problems, differential conversions.

Введение. Рассмотрим следующую задачу линейного быстродействия [1–4]

$$I=\int_0^T 1dt = T \to \min_{U(t)}, \tag{1}$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \tag{2}$$

$$X(0) = ?,\ \ X(T) = ?, \tag{3}$$

$$|u_k(t)| \le 1\ ,\ \ k=\overline{1,r}, \tag{4}$$

где (1) – критерий качества, (2) – система уравнений движения, (3) – краевые условия (заметим, что на каждом краю фазовых траекторий должна быть задана хотя бы одна координата, в противном случае задача быстродействия лишается смысла), (4) – амплитудные ограничения, наложенные на управляющие переменные, A – матрица переменных состояния (матрица системы), $X(t)=(x_1(t), x_2(t),...,x_n(t))^T$ – n-мерный вектор переменных состояния, $U(t)=(u_1(t), u_2(t),...,u_r(t))^T$ – r-мерный вектор управляющих переменных ($r \le n$), T – время перехода.

С целью получения обобщенной математической модели задачи можно допустить, что как на левом, так и на правом концах фазовых траекторий все координаты переменных состояния неизвестны. Затем, подставив известные (заданные) краевые условия в эту математическую модель, получим эквивалентную к исходной задачу с соответствующими неизвестными краевыми условиями.

Пусть система полностью управляема и собственные числа матрицы A действительны (отрицательные и/или нулевые). Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина (или теоремой Фельдбаума). Известно, что при этом, кроме известного затруднения по определению вектора начальных значений сопряженных переменных $\Psi(0)$ (относительно которых принцип максимума никакой регулярной информации не несет), добавляются и дополнительные, так называемые условия трансверсальности на левом и на правом концах фазовых траекторий, соответствующие неизвестным переменным состояния, что еще больше усугубляет затруднения, связанные с определением векторной функции оптимального управления $U_{opt}(t)$.

С целью исключения отмеченных затруднений в настоящей работе в качестве основного математического аппарата используются дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [5], в частности, дифференциально-тейлоровские преобразования

$$X(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{\partial^K x(t)}{\partial t^k}_{|t=t_v},$$

$$K=\overline{0,\infty}\quad \risingdotseq\ x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_v}{\mathrm{H}}\right)^k X(K),$$

(здесь $X(K)$ – изображение оригинала $x(t)$ (вектор целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$ (номера дискрет)), H – масштабный коэффициент, введенный с целью выравнивания размерностей векторов дискрет и возможности суммирования слагаемых оригинала $X(t)$, t_v – центр аппроксимации разложения Тейлора), которые значительно облегчают решение рассматриваемой задачи.

Математический аппарат. По предлагаемому подходу рассматриваемая задача (1–4) сначала решается как краевая задача (2, 3), с этой целью используя подход, предложенный в работах [6, 7], а затем к полученной трансцендентной и/или нелинейной алгебраической системе добавляются критерий качества (1) и ограничения типа (4). В итоге имеем эквивалентную (1–4) задачу нелинейного программирования (НЛП).

Для решения краевой задачи (2, 3) в области дифференциальных преобразований будем иметь спектральную модель [8–10]

$$X(K+1)=$$
$$=\frac{H}{K+1}\left(\sum_{P=0}^{K}[A(P)\cdot X(K-P)+B(P)\cdot U(K-P)]\right),$$
$$K=0,1,\ldots, \qquad (5)$$

где $X(K)=(x_1(K),...,x_n(K))^T$ – изображение вектора $X(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T$, $A(P)$ и $B(P)$ – соответственно P-ые матричные дискреты матриц A и B. Заметим, что $A(P=0)\equiv A$, $A(P\geq 1)=[0]$, а также $B(P=0)\equiv B$, $B(P\geq 1)=[0]$, что дает возможность упростить соотношение (5). При этом будем иметь:

$$X(K+1)=\frac{H}{K+1}(A\cdot X(K)+B\cdot U(K)),\ K=0,1,\ldots \qquad (6)$$

Для рассматриваемого класса задач (согласно теореме Фельдбаума [11]) функция оптимального управления кусочно-постоянна, знакопеременна и для каждой компоненты $u_k(t)$ $k=\overline{1,r}$ вектора $U_{\text{opt}}(t)$ количество моментов переключений не может превосходить $(n-1)$. Следовательно на отрезке $[0, T]$ в общем случае будем иметь $r(n-1)+1$ подынтервалов знакопостоянства $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$,..., $[t_P, t_{P+1}]$, ..., $p=\overline{1,r(n-1)}$, и $[t_{r(n-1)}, T]$, а количество моментов переключений в общем случае будет равно $r(n-1)$. Имея ввиду также, что на каждом подынтервале времени каждая компонента $u_k(t)$ $k=\overline{1,r}$ вектора $U_{\text{opt}}(t)$ постоянна, т. е.

$$u_{kp}(t)\equiv u_{kp}=\{+1\ \text{ или }\ -1\}=U_p(0),$$
$$U_p(K\geq 1)\equiv 0,k=\overline{1,r},\ p=\overline{1,r\cdot(n-1)+1},$$

то окончательно (6) примет вид:

$$X(K+1)=\frac{H}{K+1}(A\cdot X(K)+B\cdot U(K)Ъ(K)),$$
$$K=0,1,\ldots$$

где $Ъ(K)$ – так называемая тейлоровская единица [5]), или

$$X(K+1)=H^{K+1}\cdot[B_{K+1}\cdot X(0)+C_{K+1}(U(0))],$$
$$K=0,1,\ldots$$

Здесь матрицы-изображения B_{K+1}, K=0,1,... и векторы-изображения $C_{K+1}(U(0))$, K=0,1,... определяются в соответствии со следующими реккурентными соотношениями [9, 10]

$$B_{K+1}=\frac{1}{K+1}A\cdot B_K,\ K=0,1,...,$$

$$C_{K+1}(U(0))=\frac{1}{K+1}(A\cdot C_K(U(0))+BU(K)Ъ(K)),$$
$$K=0,1,....,$$

где $B_0=E_{n\times n}$ – единичная матрица порядка n; $C_0=(0)_{n\times 1}$ – нулевой вектор-столбец с размерами $n\times 1$.

Для восстановления оригинала $X(t)$ воспользуемся обратным дифференциально-тейлоровским преобразованием вида

$$X(t)=X(0)+X(1)(t-t_\upsilon)+$$
$$+X(2)(t-t_\upsilon)^2+\cdots+X(K)(t-t_\upsilon)^K=$$
$$=X(0)+(B_1X(0)+C_1)(t-t_\upsilon)+$$
$$+(B_2X(0)+C_2)(t-t_\upsilon)^2+\cdots+$$
$$+(B_KX(0)+C_K)(t-t_\upsilon)^K,$$
$$t\in[0,T]. \qquad (7)$$

Учитывая, что правый конец траекторий каждой подзадачи является левым концом траекторий последующей подзадачи, то при этом будем иметь для:

- первой подзадачи на интервале времени $t\in[0,t_1]$:

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_1;$$
$$X(0)=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})^T,\ \ X(t_1)=(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})^T,$$

- i-ой подзадачи на интервале времени $t\in[t_{i-1},t_i]$:

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_i;$$
$$X(t_{i-1})=(x_{1,i-1},x_{2,i-1},\ldots,x_{n\,i-1})^T,$$
$$X(t_i)=(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ni})^T,$$

- для $r(n-1)+1$-ой подзадачи на интервале времени $t\in[t_{r(n-1)},T]$:

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_{r\cdot(n-1)+1};$$
$$X(t_{r\cdot(n-1)})=(x_{1,r\cdot(n-1)},x_{2,r\cdot(n-1)},\ldots,x_{n\,r\cdot(n-1)})^T,$$
$$X(T)=(x_{1T},\ldots x_{nT}).$$

В соответствии с предложенным в работе [10] подходом для решения задач оптимального управления с незакрепленными правыми условиями, рассмотрим ту же систему уравнений движения в обратном направлении времени перехода, т. е. с конца к началу. Это действие эквивалентно замене пределов интегрирования в функционале качества, что позволяет вместо зависящих от неизвестных переменных в правом конце линейных зависимостей получить гораздо более сильные нелинейные зависимости от тех же неизвестных переменных, что, в свою очередь, позволяет организовать более эффективные-сходящиеся вычислительные процедуры.

Тот же подход применим и в рассматриваемой задаче. Имея в виду наличие взаимнооднозначного соответствия между переменных обоих задач, можно сократить количество переменных одной задачи соответствующей группой переменных другой.

Теперь, более конкретно: наряду с исходной задачей (1–4) рассмотрим и эквивалентную ей следующую задачу

$$I = -\int_T^0 1dt = \int_0^{\bar{T}} 1dt = \bar{T} \to \min_{U(t)},$$

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + BU(t),$$

$$Y(0) = X(T) = ?,\ Y(\bar{T}) = X(0) = ?,$$

$$\left|\bar{u}_k(t)\right| \le 1\ ,\ \ k = \overline{r, 2\cdot r},$$

где, очевидно, $\bar{T} = -T$.

Из этой задачи с обратным переходом (временем) будем иметь для:

- первой подзадачи на интервале времени $t \in [0, t_{r(n-1)+1}]$:

$$\dot{Y}(t) = A\cdot Y(t) + B\cdot U_{r+1};$$

$$Y(0) = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^T,\ \ Y(\bar{t}_1) = (y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})^T,$$

- j-ой подзадачи на интервале времени $t \in [t_{j-1}, t_j]$:

$$\dot{Y}(t) = A\cdot Y(t) + B\cdot U_j;$$

$$Y(t_{j-1}) = (y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{n,j-1})^T,$$

$$Y(\bar{t}_j) = (y_{1,j}, y_{2,j}, \ldots, y_{n,j})^T,$$

- $r(n-1)+1$-ой подзадачи на интервале времени $t \in [t_{2r(n-1)}, \bar{T}]$:

$$Y(t) = A\cdot Y(t) + B\cdot U_{2(r\cdot(n-1)+1)};$$

$$Y(t_{2r\cdot(n-1)}) = (y_{1,r\cdot(n-1)}, y_{2,r\cdot(n-1)}, \ldots, y_{n\,r\cdot(n-1)})^T,$$

$$Y(\bar{T}) = (y_{1T}, \ldots y_{nT}).$$

Таким образом, исходную задачу (1)–(4) на интервале времени $[0, T]$ заменим двумя взаимодополняющими друг друга задачами (точнее, последовательностью стыкующихся друг с другом $2\times(r(n-1)+1)$ двухточечными краевыми задачами), для решения которых будем использовать подход, предложенный в работах [6, 7].

В итоге решения прямой задачи получим трансцендентную (алгебраическую) систему конечных уравнений

$$\phi_m\begin{pmatrix} t_p,\ \ p = \overline{1, r(n-1)};\ \ T; \\ u_{kp},\ \ k = \overline{1, r}, p = \overline{1, r(n-1)}; \\ x_{i0},\ \ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} - x_m(T) = 0,$$

$$m = \overline{1, n},$$

а в итоге решения обратной задачи-аналогичную систему конечных уравнений

$$\chi_m\begin{pmatrix} t_p,\ \ p = \overline{r(n-1)+1, 2\times r(n-1)};\ \ \bar{T}; \\ u_{kp},\ \ k = \overline{r+1, 2r}, p = \overline{1, r(n-1)}; \\ y_{i0},\ \ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} -$$

$$-y_m(\bar{T}) = 0,\ \ m = \overline{1, n},$$

которые будут выступать в качестве ограничений вида равенств в соответствующей задаче НЛП.

Очевидно, что между переменными прямой и обратной задач имеют место следующие зависимости:

$$X(0) = Y(\bar{T}),\quad X(T) = Y(0),$$

$$T = -\bar{T},\ \ t_1 = -t_{2r(n-1)},\quad t_{r(n-1)} = -t_{r(n-1)+1},$$

$$U_1 = U_{2(r(n-1)+1)},\quad U_{r(n-1)} = U_{r(n-1)+1}.$$

Ввиду последних соотношений количество неизвестных параметров можно сократить вдвое, исключив одну группу этих параметров. Далее, учитывая теорему Фельдбаума, ограничения типа (4) можно заменить эквивалентными им ограничениями типа равенств $u_{kr}^2 - 1 = 0$, $k = \overline{1, r}$, $p = \overline{1, r(n-1)+1}$. Кроме того, полученной системе ограничений можно добавить и ограничения $t_{p-1} - t_p \le 0$, $p = \overline{1, r(n-1)+1}$, $t_{r(n-1)} - T \le 0$, $t_0 = 0$, получаемые из вверх направленной последовательности моментов переключений-цепочки $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{r(n-1)} \le T$.

Окончательно, будем иметь следующую задачу НЛП:

$$T \to \min_{t_1,\ldots t_{r\cdot(n-1)+1}, T, u_{11}\ldots u_{1,r\cdot(n-1)+1}, \ldots u_{r1}\ldots u_{r,r\cdot(n-1)+1}, x_{10}, \ldots, x_{n0}, x_{1T}, \ldots, x_{nT}},$$

$$\phi_m\begin{pmatrix} t_p,\ \ p = \overline{1, r\cdot(n-1)};\ \ T;\ \ u_{kp}, \\ k = \overline{1, r}, p = \overline{1, r\cdot(n-1)};\ \ x_{i0},\ \ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} - x_m(T) = 0,$$

$$m = \overline{1, 2, \ldots, 2\cdot n};$$

$$u_{kp}^2 - 1 = 0,\ k = \overline{1, r}, p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1},$$

$$t_{p-1} - t_p + v_p^2 = 0,\ p = \overline{1, r\cdot(n-1)},\ t_{r\cdot(n-1)} - T + v_{r\cdot(n-1)+1}^2 = 0,$$

где v_p, v_p, $p = \overline{1, r(n-1)+1}$ – дополнительные неизвестные параметры, также подлежащие определению.

Пример.

$$T \to \min_{U(t)},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \right.;$$

$$\begin{cases} x_1(0) = -1, & x_1(T) = ?, \\ x_2(0) = x_{20} = ?, & x_2(T) = 0, \\ x_3(0) = x_{30} = ?; & x_3(T) = 0\ ; \end{cases}$$

$$|u_k(t)| \le 1\ ,\ k = \overline{1,3}\ .$$

Очевидно, что $\lambda_i=0$, $\forall i=\overline{1,3}$, а матричные дискреты

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A(K \ge 1) = [0];$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B(K \ge 1) = [0].$$

Кроме того, для матриц и векторов при промежуточных вычислениях имеем:

$$B_1 = A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

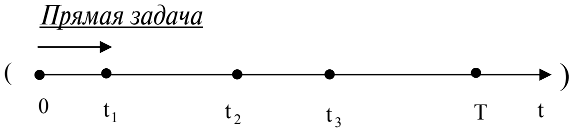
$$B_2 = \frac{1}{2}(A(0)B_1 + A(1)) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{\ge 3} = [0];$$

$$C_1 = B(0)U(0) = \begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_2(0) \\ U_3(0) \\ 0 \end{pmatrix},\ C_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} U_3(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_{\ge 4} = (0).$$

Таким образом, в общем случае для этой задачи будем иметь $r(n-1)=6$ моментов переключений, $r(n-1)+1=7$ подзадач и $r(r(n-1)+1)=21$ составляющих для управляющих переменных. Однако, для конкретной задачи в итоге проведения дополнительного анализа выясняется, что действительное количество моментов переключений не может превосходить значение 3, иными словами имеем 4 подзадачи с 12-ю составляющими переменных.

Прямая задача



Подзадача 1

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{11}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{21}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{31}\ ; \end{cases} \quad X(0)_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix},$$

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[0, t_1]$ согласно (7)

$$X(t) = X(0)_0 + (B_1X(0)_0 + C_1)t +$$
$$+(B_2X(0)_0 + C_2)t^2 + (B_3X(0)_0 + C_3)t^3 + \cdots,$$

откуда при $t=t_1$ имеем следующую систему уравнений

$$X(t_1) = X(0)_0 + (B_1X(0)_0 + C_1)t_1 + (B_2X(0)_0 + C_2)t_1^2 +$$
$$+(B_3X(0)_0 + C_3)t_1^3 + \cdots = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^T$$

или, в явном виде

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}\right]t_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{31} \\ 0 \end{pmatrix}\right]t_1^2 + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u_{31} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}t_1^3 =$$

$$= X(t_1) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_{10} + (x_{20} + u_{11})t_1 + \dfrac{1}{2}(x_{30} + u_{21})t_1^2 + \dfrac{1}{6}u_{31}t_1^3 = x_{11}, \\ x_{20} + (x_{30} + u_{21})t_1 + \dfrac{1}{2}u_{31}t_1^2 = x_{21}, \\ x_{30} + u_{31}t_1 = x_{31}. \end{cases}$$

Подзадача 2

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{12}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{22}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{32}\ ; \end{cases} \quad X(0)_1 = X(t_1) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix},$$

$$X(t_2) = \begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \\ x_3(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[t_1, t_2]$ согласно (7)

$$\begin{cases} x_{11}+(x_{21}+u_{12})(t_2-t_1)+\dfrac{1}{2}(x_{31}+u_{22})(t_2-t_1)^2+ \\ \quad +\dfrac{1}{6}u_{32}(t_2-t_1)^3=x_{12}, \\ x_{21}+(x_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+\dfrac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2=x_{22}, \\ x_{31}+u_{32}(t_2-t_1)=x_{32}. \end{cases}$$

<u>Подзадача 3</u>

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_{13}, \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)+u_{23}, \quad X(0)_2=X(t_2)=\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \\ \dot{x}_3(t)=u_{33}; \end{cases}$$

$$X(t_3)=\begin{pmatrix} x_1(t_3) \\ x_2(t_3) \\ x_3(t_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[t_2, t_3]$ согласно (7)

$$\begin{cases} x_{12}+(x_{22}+u_{13})(t_3-t_2)+\dfrac{1}{2}(x_{32}+u_{23})(t_3-t_2)^2+ \\ \quad +\dfrac{1}{6}u_{33}(t_3-t_2)^3=x_{13}, \\ x_{22}+(x_{32}+u_{23})(t_3-t_2)+\dfrac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2=x_{23}, \\ x_{32}+u_{33}(t_3-t_2)=x_{33}. \end{cases}$$

<u>Подзадача 4</u>

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_{14}, \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)+u_{24}, \quad X(0)_3=X(t_3)=\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \\ \dot{x}_3(t)=u_{34}\ ; \end{cases}$$

$$X(T)=\begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \\ x_3(T) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{pmatrix}.$$

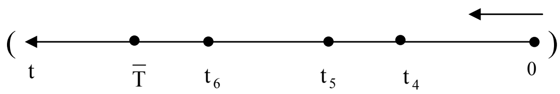
На подынтервале времени $[t_3, T]$ согласно (7)

$$\begin{cases} x_{13}+(x_{23}+u_{14})(T-t_3)+\dfrac{1}{2}(x_{33}+u_{24})(T-t_3)^2+ \\ \quad +\dfrac{1}{6}u_{34}(T-t_3)^3=x_{1T}, \\ x_{23}+(x_{33}+u_{24})(T-t_3)+\dfrac{1}{2}u_{34}(T-t_3)^2=x_{2T}, \\ x_{33}+u_{34}(T-t_3)=x_{3T}. \end{cases}$$

Таким образом, учитывая зависимости, полученные на предыдущих подзадачах и исключив промежуточные значения $x_{11}, x_{121}, x_{13}; x_{211}, x_{221}, x_{23}; x_{311}, x_{321}, x_{33}$ переменных состояния в моментах переключений, окончательно будем иметь:

$$\begin{cases} x_{10}+(x_{20}+u_{11})t_1+(\dfrac{1}{2}x_{30}+\dfrac{1}{2}u_{21})t_1^2+\dfrac{1}{6}u_{31}t_1^3+ \\ +(x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\dfrac{1}{2}u_{31}t_1^2+u_{12})(t_2-t_1)+ \\ +\dfrac{1}{2}(x_{30}+u_{31}t_1+u_{22})(t_2-t_1)^2+\dfrac{1}{6}u_{32}(t_2-t_1)^3+ \\ +(x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\dfrac{1}{2}u_{31}t_1^2+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+ \\ +\dfrac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+u_{13})(t_3-t_2)+\dfrac{1}{2}(x_{30}+t_1u_{31}+(t_2-t_1)u_{32}+ \\ +u_{23})(t_3-t_2)^2+\dfrac{1}{6}u_{33}(t_3-t_2)^3+(x_{20}+ \\ +(x_{30}+u_{21})t_1+\dfrac{1}{2}u_{31}t_1^2+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+ \\ +\dfrac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+(x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{23})(t_3-t_2)+ \\ +\dfrac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+u_{14})(T-t_3)+\dfrac{1}{2}(x_{30}+t_1u_{31}+(t_2-t_1)u_{32}+ \\ +(t_3-t_2)u_{33}+u_{24})(T-t_3)^2+\dfrac{1}{6}u_{34}(T-t_3)^3-x_{1T}=0; \\ x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\dfrac{1}{2}u_{31}t_1^2+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+ \\ +\dfrac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+(x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+ \\ +u_{23})(t_3-t_2)+\dfrac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{32}(t_2-t_1)+ \\ +u_{33}(t_3-t_2)+u_{24})(T-t_3)+\dfrac{1}{2}u_{34}(T-t_3)^2-x_{2T}=0; \\ x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{33}(t_3-t_2)+u_{34}(T-t_3)-x_{3T}=0. \end{cases}$$

<u>Обратная задача</u>



$$\overline{T}\to\min_{U(t)},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{pmatrix};\right.$$

$$\begin{cases} y_1(0)=y_{10}=?=x_{1T}, & y_1(\overline{T})=-1=x_{10}, \\ y_2(0)=0=x_{2T}, & y_2(\overline{T})=y_{2T}=?=x_{20}, \\ y_3(0)=0=x_{3T}; & y_3(\overline{T})=y_{3T}=?=x_{30}; \end{cases}$$

$$|u_k(t)|\le 1,\ \ k=\overline{4,6}.$$

<u>Подзадача 1</u>

Имеем

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t)=y_2(t)+u_{41}, \\ \dot{y}_2(t)=y_3(t)+u_{51}, \\ \dot{y}_3(t)=u_{61}; \end{cases}$$

$$Y(0)_0=\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{10}\\y_{20}\\y_{30}\end{pmatrix},$$

$$Y(t_4)=\begin{pmatrix}y_1(t_4)\\y_2(t_4)\\y_3(t_4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[0, t_4]$ согласно (7)

$$\begin{pmatrix}y_{10}\\y_{20}\\y_{30}\end{pmatrix}+\left[\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_{10}\\y_{20}\\y_{30}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{41}\\u_{51}\\u_{61}\end{pmatrix}\right]t_4+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_{10}\\y_{20}\\y_{30}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{51}\\u_{61}\\0\end{pmatrix}\right]t_4^2+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}u_{61}\\0\\0\end{pmatrix}t_4^3=$$

$$=Y(t_4)=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}y_{10}+(y_{20}+u_{41})t_4+\frac{1}{2}(x_{30}+u_{51})t_4^2+\frac{1}{6}u_{61}t_4^3=y_{11},\\ y_{20}+(y_{30}+u_{51})t_4+\frac{1}{2}u_{61}t_4^2=y_{21},\\ y_{30}+u_{61}t_4=y_{31}.\end{cases}$$

Подзадача 2

Имеем

$$\begin{cases}\dot y_1(t)=y_2(t)+u_{42},\\ \dot y_2(t)=y_3(t)+u_{52},\\ \dot y_3(t)=u_{62}\ ;\end{cases}$$

$$Y(0)_1=Y(t_4)=\begin{pmatrix}y_1(t_4)\\y_2(t_4)\\y_3(t_4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix},$$

$$Y(t_5)=\begin{pmatrix}y_1(t_5)\\y_2(t_5)\\y_3(t_5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[t_4, t_5]$ согласно (7)

$$\begin{cases}y_{11}+(y_{21}+u_{42})(t_5-t_4)+\frac{1}{2}(y_{31}+u_{52})(t_5-t_4)^2+\\ \quad+\frac{1}{6}u_{62}(t_5-t_4)^3=y_{12},\\ y_{21}+(y_{31}+u_{52})(t_5-t_4)+\frac{1}{2}u_{62}(t_5-t_4)^2=y_{22},\\ y_{31}+u_{62}(t_5-t_4)=y_{32}.\end{cases}$$

Подзадача 3

Имеем

$$\begin{cases}\dot y_1(t)=y_2(t)+u_{43},\\ \dot y_2(t)=y_3(t)+u_{53},\\ \dot y_3(t)=u_{63}\ ;\end{cases}$$

$$Y(0)_2=Y(t_5)=\begin{pmatrix}y_1(t_5)\\y_2(t_5)\\y_3(t_5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\end{pmatrix},$$

$$Y(t_6)=\begin{pmatrix}y_1(t_6)\\y_2(t_6)\\y_3(t_6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{13}\\y_{23}\\y_{33}\end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[t_5, t_6]$ согласно (10)

$$\begin{cases}y_{12}+(y_{22}+u_{43})(t_6-t_5)+\frac{1}{2}(y_{32}+u_{53})(t_6-t_5)^2+\\ \quad+\frac{1}{6}u_{63}(t_6-t_5)^3=y_{13},\\ y_{22}+(y_{32}+u_{53})(t_6-t_5)+\frac{1}{2}u_{63}(t_6-t_5)^2=y_{23},\\ y_{32}+u_{63}(t_6-t_5)=y_{33.}\end{cases}$$

Подзадача 4

Имеем

$$\begin{cases}\dot y_1(t)=y_2(t)+u_{44},\\ \dot y_2(t)=y_3(t)+u_{54},\\ \dot y_3(t)=u_{64};\end{cases}$$

$$Y(0)_3=Y(t_6)=\begin{pmatrix}y_1(t_6)\\y_2(t_6)\\y_3(t_6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{13}\\y_{23}\\y_{33}\end{pmatrix},$$

$$Y(\overline{T})=\begin{pmatrix}y_1(\overline{T})\\y_2(\overline{T})\\y_3(\overline{T})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{1T}\\y_{2T}\\y_{3T}\end{pmatrix}.$$

На подынтервале времени $[t_6, T]$ согласно (7)

$$\begin{cases}y_{13}+(y_{23}+u_{44})(\overline{T}-t_6)+\frac{1}{2}(y_{33}+u_{54})(\overline{T}-t_6)^2+\\ \quad+\frac{1}{6}u_{64}(\overline{T}-t_6)^3=y_{1T},\\ y_{23}+(y_{33}+u_{54})(\overline{T}-t_6)+\frac{1}{2}u_{64}()\overline{T}-t_6{}^2=y_{2T},\\ y_{33}+u_{64}(\overline{T}-t_6)=y_{3T}.\end{cases}$$

Таким образом, учитывая зависимости, полученные на предыдущих подзадачах, и исключив промежуточные значения y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, y_{33} переменных состояния в моментах переключений, окончательно будем иметь:

$$\begin{cases}
y_{10}+(y_{20}+u_{41})t_4+\frac{1}{2}(y_{30}+u_{51})t_4^2+\frac{1}{6}u_{61}t_4^3+ \\
+(y_{20}+(y_{30}+u_{51})t_4+\frac{1}{2}u_{61}t_4^2+u_{42})(t_5-t_4)+ \\
+\frac{1}{2}(y_{30}+u_{61}t_4+u_{52})(t_5-t_4)^2+ \\
+\frac{1}{6}u_{62}(t_5-t_4)^3+(y_{20}+(y_{30}+u_{51})t_4+\frac{1}{2}u_{61}t_4^2+ \\
+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{52})(t_5-t_4)+ \\
+\frac{1}{2}u_{62}(t_5-t_4)^2+u_{43})(t_6-t_5)+\frac{1}{2}(y_{30}+u_{61}t_4+ \\
+u_{62}(t_5-t_4)+u_{53})(t_6-t_5)^2+\frac{1}{6}u_{63}(t_6-t_5)^3+ \\
+(y_{20}+(y_{30}+u_{51})t_4+\frac{1}{2}u_{61}t_4^2+ \\
+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{52})(t_5-t_4)+\frac{1}{2}u_{62}(t_5-t_4)^2+ \\
+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{62}(t_5-t_4)+u_{53})(t_6-t_5)+ \\
+\frac{1}{2}u_{63}(t_6-t_5)^2+u_{44})(\overline{T}-t_6)+\frac{1}{2}(y_{30}+u_{61}t_4+ \\
+u_{62}(t_5-t_4)+u_{63}(t_6-t_5)+u_{54})(\overline{T}-t_6)^2+ \\
+\frac{1}{6}u_{64}(\overline{T}-t_6)^3-y_{1T}=0; \\
y_{20}+(y_{30}+u_{51})t_4+\frac{1}{2}u_{61}t_4^2+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{52})(t_5-t_4 \\
+\frac{1}{2}u_{62}(t_5-t_4)^2+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{62}(t_5-t_4)+u_{53})(t_6- \\
+\frac{1}{2}u_{63}(t_6-t_5)^2+(y_{30}+u_{61}t_4+u_{62}(t_5-t_4)+ \\
+u_{63}(t_6-t_5)+u_{54})(\overline{T}-t_6)+\frac{1}{2}u_{64}(\overline{T}-t_6)^2-y_{2T}=0; \\
y_{30}+u_{61}t_4+u_{62}(t_5-t_4)+u_{63}(t_6-t_5)+ \\
+u_{64}(\overline{T}-t_6)-y_{3T}=0.
\end{cases}$$

Отсюда, учитывая однозначные зависимости между двумя группами переменных,

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{1T} \\ y_{2T} \\ y_{3T} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{44} \\ u_{54} \\ u_{64} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{43} \\ u_{53} \\ u_{63} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{42} \\ u_{52} \\ u_{62} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{41} \\ u_{51} \\ u_{61} \end{pmatrix}$$

и что

$$t_1 \equiv T-t_6,\ t_2 \equiv T-t_5,\ t_3 \equiv T-t_4,\ T \equiv -\overline{T},$$

вторую группу переменных y_{10}, y_{20}, y_{30}; y_{11}, y_{12}, y_{13}; y_{21}, y_{22}, y_{23}; y_{31}, y_{32}, y_{33}; y_{1T}, y_{2T}, y_{3T} и u_{41}, u_{51}, u_{61}; u_{42}, u_{52}, u_{62}; u_{43}, u_{53}, u_{63}; u_{44}, u_{54}, u_{64} можно заменить переменными первой группы x_{10}, x_{20}, x_{30}; x_{11}, x_{12}, x_{13}; x_{21}, x_{22}, x_{23}; x_{31}, x_{32}, x_{33}; x_{1T}, x_{2T}, x_{3T} и u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}; u_{13}, u_{23}, u_{33}; u_{14}, u_{24}, u_{34}. В итоге получим следующую систему вида равенств:

$$\begin{cases}
x_{1T}+(x_{2T}+u_{14})(t_3-T)+\frac{1}{2}(x_{3T}+u_{24})(t_3-T)^2+ \\
+\frac{1}{6}u_{34}(t_3-T)^3+(x_{2T}+(x_{3T}+u_{24})(t_3-T)+ \\
+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+u_{13})(t_2-t_3)+ \\
+\frac{1}{2}(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)^2+\frac{1}{6}u_{33}(t_2-t_3)^3+ \\
+(x_{2T}+(x_{3T}+u_{24})(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+ \\
+(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)+ \\
+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+u_{12})(t_3-T)^3+\frac{1}{2}(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+ \\
+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})(t_1-t_2)^2+\frac{1}{6}u_{32}(t_1-t_2)^3- \\
-(x_{2T}+(x_{3T}+u_{24})(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+ \\
+(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+ \\
+(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})(t_1-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}u_{32}(t_1-t_2)^2+u_{11})t_1+\frac{1}{2}(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+ \\
+u_{33}(t_2-t_3)+u_{32}(t_1-t_2)+u_{21})t_1^2-\frac{1}{6}u_{31}t_1^3-x_{10}=0; \\
x_{2T}+(x_{3T}+u_{24})(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+ \\
+(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+ \\
+(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})(t_1-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}u_{32}(t_1-t_2)^2-(x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+ \\
+u_{32}(t_1-t_2)+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2-x_{20}=0; \\
x_{3T}+u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+ \\
+u_{32}(t_1-t_2)-u_{31}t_1-x_{30}=0.
\end{cases}$$

Таким образом, учитывая известные координаты $x_{10}=-1$, $x_{2T}=0$, $x_{3T}=0$ переменных состояния и равенства, полученные в результате использования прямой и обратной задач, а также ограничения, наложенные на управляющие воздействия, окончательно получим следующую задачу нелинейного программирования

$$T \to \min_{\substack{t_1,t_2,t_3,T,u_{11},u_{21},u_{31},\\ u_{12},u_{22},u_{32},u_{13},u_{23},u_{33},u_{14},u_{24},u_{34},x_{1T},x_{20},x_{30}}} ;$$

$$\begin{cases}
-1+(x_{20}+u_{11})t_1+(\frac{1}{2}x_{30}+\frac{1}{2}u_{21})t_1^2+\frac{1}{6}u_{31}t_1^3+ \\
+(x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+u_{12})(t_2-t_1)+ \\
+\frac{1}{2}(x_{30}+u_{31}t_1+u_{22})(t_2-t_1)^2+\frac{1}{6}u_{32}(t_2-t_1)^3+ \\
+(x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+ \\
+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+ \\
+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+u_{13})(t_3-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}(x_{30}+t_1u_{31}+(t_2-t_1)u_{32}+u_{23})(t_3-t_2)^2+ \\
+\frac{1}{6}u_{33}(t_3-t_2)^3+(x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+ \\
+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+ \\
+(x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{23})(t_3-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+u_{14})(T-t_3)+ \\
+\frac{1}{2}(x_{30}+t_1u_{31}+(t_2-t_1)u_{32}+(t_3-t_2)u_{33}+ \\
+u_{24})(T-t_3)^2+\frac{1}{6}u_{34}(T-t_3)^3-x_{1T}=0; \\
x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+ \\
+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+ \\
+(x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{23})(t_3-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+(x_{30}+t_1u_{31}+ \\
+u_{32}(t_2-t_1)+u_{33}(t_3-t_2)+u_{24})(T-t_3)+ \\
+\frac{1}{2}u_{34}(T-t_3)^2=0; \\
x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+ \\
+u_{33}(t_3-t_2)+u_{34}(T-t_3)=0;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_{1T}+u_{14}(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{24}(t_3-T)^2+\frac{1}{6}u_{34}(t_3-T)^3+ \\
+(u_{24}(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+u_{13})(t_2-t_3)+ \\
+\frac{1}{2}(u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)^2+\frac{1}{6}u_{33}(t_2-t_3)^3+ \\
+(u_{24}(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+(u_{34}(t_3-T)+ \\
+u_{23})(t_2-t_3)+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+u_{12})(t_1-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}(u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})(t_1-t_2)^2+ \\
+\frac{1}{6}u_{32}(t_1-t_2)^3-(u_{24}(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+ \\
+(u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3)+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+ \\
+(u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})(t_1-t_2)+ \\
+\frac{1}{2}u_{32}(t_1-t_2)^2+u_{11})t_1+\frac{1}{2}(u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+ \\
+u_{32}(t_1-t_2)+u_{21})t_1^2-\frac{1}{6}u_{31}t_1^3+1=0; \\
u_{24}(t_3-T)+\frac{1}{2}u_{34}(t_3-T)^2+(u_{34}(t_3-T)+u_{23})(t_2-t_3) \\
+\frac{1}{2}u_{33}(t_2-t_3)^2+(u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+u_{22})\times \\
\times(t_1-t_2)+\frac{1}{2}u_{32}(t_1-t_2)^2-(u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+ \\
+u_{32}(t_1-t_2)+u_{21})t_1+\frac{1}{2}t_1^2u_{31}-x_{20}=0; \\
u_{34}(t_3-T)+u_{33}(t_2-t_3)+ \\
+u_{32}(t_1-t_2)-u_{31}t_1-x_{30}=0;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
u_{11}^2-1=0,\ u_{12}^2-1=0,\ u_{13}^2-1=0,\ u_{14}^2-1=0, \\
u_{21}^2-1=0,\ u_{22}^2-1=0,\ u_{23}^2-1=0,\ u_{24}^2-1=0, \\
u_{31}^2-1=0,\ u_{32}^2-1=0,\ u_{33}^2-1=0,\ u_{34}^2-1=0; \\
-t_1+v_1^2=0,\ t_1-t_2+v_2^2=0,\ t_2-t_3+v_3^2=0,\ t_3-T+v_4^2=0.
\end{cases}$$

В результате решения этой задачи НЛП для неизвестных значений переменных состояния, моментов переключений и управляющих переменных имеем следующие значения:

$$x_{20}=-0,07435,\ \ x_{30}=-0,07731,\ \ x_{1T}=-0,92558;$$
$$t_1=t_2=t_3=T=0,773246;$$
$$u_{11}=1,\ \ u_{21}=1,\ \ u_{31}=1,\ u_{12}=1,\ \ u_{22}=-1,\ \ u_{32}=1,$$
$$u_{13}=1,\ \ u_{23}=-1,\ \ u_{33}=-1,\ u_{14}=1,\ \ u_{24}=-1,\ \ u_{34}=1.$$

При этом, анализируя полученные результаты, будем иметь $u_{1opt}(t)=1$, $u_{1opt}(t)=1$, $u_{1opt}(t)=1$ $u_{2opt}(t)=1$, $u_{3opt}(t)=1$, а переменные состояния:

$$x_1(t) = \frac{1}{6}t^3 + 0,46135t^2 + 0,92565t - 1;$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0,92269t - 0,07435; \ \ x_3(t) = t - 0,07731.$$

Резюме. При предложенном в настоящей работе подходе для определения $U_{opt}(t)$ не используются сопряженные переменные $\Psi(t)$, ввиду чего исключаются как проблема по определению вектора $\Psi(0)$, так и проблема по удовлетворению условиям трансверсальности на левом и/или на правом концах фазовых траекторий. Эти обстоятельства намного упрощают решение рассматриваемой задачи, несмотря на увеличение при этом размерности эквивалентной задачи НЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 554 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
3. Симонян С.О. Прикладная теория оптимального управления. – Ереван: ГИУА, 2005. – 180 с. (на армянском языке).
4. Симонян С.О. Основы синтеза специализированных вычислителей динамических задач нелинейного программирования: Автореф. дис. ... д.т.н. – Ереван, 1993. – 47 с.
5. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
6. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прямой метод решения линейных многоточечных краевых задач // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Технические науки. – 2002. – Т. 55. – № 1. – С. 95–103.
7. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А. Метод решения линейных многоточечных краевых задач, основанный на дифференциально-дирихлеевских преобразованиях // Вестник ИАА. – 2007. – Т. 2. – С. 253–257 (на армянском языке).
8. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А. Метод решения задач оптимального управления, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. – 2007. – Т. 2. – Вып. 10. – С. 102–114.
9. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А Решение задач линейного быстродействия с закрепленными краевыми условиями в области дифференциальных преобразований (общий случай) // Радиоэлектроника. Информатика. Управление (Запорожский государственный технический университет). – 2009. – Т. 1. – С. 137–144.
10. Казарян Д.А. Об одном методе решения одного класса задач линейного оптимального быстродействия // Вестник-76 Государственного инженерного университета Армении (Политехник). Сб. научных и методических статей, Ереван. – 2009. – Т. 1. – № 1. – С. 491–497 (на армянском языке).
11. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 623 с.

Поступила 29.06.2009 г.

УДК 519.233.22

ОДНОЭТАПНОЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.А. Маляренко

Томский государственный университет
E-mail: anna.malyarenko@gmail.com

Построена и исследована одноэтапная последовательная процедура оценивания параметров нелинейных регрессионных процессов с дискретным временем. Построенная процедура применена к двумерной модели авторегрессии с дрейфующими параметрами и двумерной модели AR/ARCH.

Ключевые слова:
Оценивание параметров, стохастические системы, процессы авторегрессии, последовательный анализ, асимптотический анализ.
Key words:
Parameter estimation, stochastic systems, autoregressive processes, sequential analysis, asymptotic analysis.

Известно, что нелинейные стохастические системы широко используются для описания реальных процессов в экономике, технике, медицине и т. д. Асимптотические методы идентификации, такие, например, как метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов и др. позволяют находить оценки неизвестных параметров моделей с известными статистическими свойствами при неограниченном увеличении объема наблюдений. В то же время, последовательный метод оценивания параметров динамических систем позволяет получить оценки с гарантированным качеством в среднеквадратическом смысле за конечное время. Время оценивания определяется моментом