

УДК 550.053:51-7

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПО ФУНКЦИЯМ ИХ ГРУППОВОЙ ЗАДЕРЖКИ

А.И. Кочегуров

Томский политехнический университет

E-mail: kai@cc.tpu.edu.ru

На основе анализа статистик функций групповой задержки построены алгоритмы определения временного положения сейсмических сигналов. Получены дисперсии оценок временного положения сильного сигнала для коррелированной и не коррелированной выборки функций групповой задержки смеси сигнала с помехой. Показано, что наличие корреляции не меняет структуры алгоритма, а изменяет лишь значения весовых коэффициентов.

**Ключевые слова:**

Временное положение сейсмических сигналов, фазочастотная характеристика, функция групповой задержки.

**Key words:**

Time position of seismic signals, phase-frequency characteristic, function of group delay.

При исследовании распространения волн в реальных геологических средах было обнаружено явление дисперсии скорости, зависимость ее от частоты или длины волны [1].

Так как сейсмический сигнал имеет широкий спектр, то в условиях дисперсии форма регистрируемой волны вдоль профиля наблюдения будет изменяться. Когда форма волны, наблюдаемой в точке А, отличается от формы волны в точке В, но при этом огибающая энергии в точке А похожа на задержанную огибающую энергию в точке В, тогда появляется новая характеристика распространения волн – групповая скорость, которая характеризует скорость распространения огибающей энергии [1].

В общем случае групповая скорость является частотно-зависимой функцией и может определяться как:

$$F_{gp}(\omega) = \frac{B - A}{t_{gp}(\omega)} = \frac{Y}{t_{gp}(\omega)},$$

где  $t_{gp}(\omega)$  – групповая задержка на частоте  $\omega$ .

Под групповой задержкой обычно понимают задержку максимума огибающей негармонического колебания, образованного наложением группы предельно близких по частоте гармонических колебаний, величина которой определяется первой производной фазового спектра [2]:

$$t_{gp}(\omega) = \frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega},$$

где  $\phi(\omega)$  – ФЧХ сейсмического сигнала на частоте  $\omega$ .

Однако, если данное определение достаточно для узкополосных колебаний, то для сейсмических сигналов, имеющих широкий спектр, оно вносит некоторую неоднозначность. В этой связи следует пользоваться теоремой о стационарной фазе, согласно которой в условиях дисперсии среды основная энергия сигнала сосредоточена в области частот  $\Omega$ , где фазовый спектр изменяется медленно.

В этой области частот гармонические колебания складываются в фазе, усиливая друг друга, в результате чего на трассе наблюдается возрастание амплитуды, соответствующей максимуму огибающей сигнала [1]. В то же время сейсмограммы обычно представляют кривые колебаний  $x(t,y)$ , зарегистрированные в определенном месте, при фиксированном  $y$ , а поэтому они являются лишь функциями переменной  $t$ . Следовательно, время  $t$  будет параметром, определяющим конкретные кривые семейства фазовых спектров  $\phi(w,t)$ , а, в свою очередь, области стационарной фазы будет соответствовать конкретное значение  $t=\tau$ . Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{d\phi(w,\tau)}{dw} \approx 0, w \in \Omega,$$

$$t_{gp}(w) = -\frac{d(\phi(w,\tau) - w\tau)}{dw} \approx \tau.$$

Таким образом, для оценки временного положения сейсмических сигналов в дисперсионных средах необходимо построить алгоритм, в котором оптимальной обработке подвергаются функции групповой задержки ( $\Phi\Gamma\mathcal{Z}$ ) участков сейсмогравитационных трасс.

Будем считать, что анализируемый участок сейсмогравитационной трассы представляет собой аддитивную смесь сейсмического сигнала и гауссовой помехи. Предварительно рассмотрим случай сильного сигнала, т. е. случай, когда отношение сигнал/помеха  $\gamma(\omega_k) > 1$  для любого  $k=1, m$ . Тогда из критерия максимального правдоподобия следует, что оценку  $\tau_{opt}$  можно найти, решив уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\ln I[t_{gp}^x / \tau]]_{\tau_{opt} = \hat{\tau}} = 0, \quad (1)$$

где в качестве функции правдоподобия примем статистику отношения правдоподобия:

$$I[t_{gp}^x / \tau] = \frac{L_{t_{gp}^x}(\tau)}{L_{t_{gp}^x}(\tau_0)}, \quad (2)$$

в которой  $\tau_0$  – фиксированное значение  $\tau$ ;  $L_{t_{ep}^x}(\tau) = W(t_{ep}^x / \tau)$  – условная апостериорная мно-

гомерная функция распределения ФГЗ смеси.

Для дальнейших выводов введем следующие обозначения выборок ФГЗ:

$t_{ep}^x(\omega_k)$  – смеси;

$t_{ep}^s(\omega_k)$  – сигнала;

$t_{ep}^N(\omega_k)$  – помехи.

Теперь учитывая, что мы рассматриваем сильный сигнал, для которого апостериорные вероятности ФГЗ смеси распределены нормально, представим их в матричном виде:

$$W(t_{ep}^x \setminus \tau) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det K}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (t_{ep}^x - t_{ep}^s(\tau))^T \cdot K^{-1} \cdot (t_{ep}^x - t_{ep}^s(\tau)) \right]; \quad (3)$$

$$W(t_{ep}^x \setminus \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det K}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (t_{ep}^x - t_{ep}^s(\tau_0))^T \cdot K^{-1} \cdot (t_{ep}^x - t_{ep}^s(\tau_0)) \right], \quad (4)$$

где  $K = [R_i(\omega_j, \omega_j)]$  – матрица (положительно определенная) размером  $m \times m$ ;  $K^{-1}$  – матрица обратная к  $K$ ;  $R_i(\omega_i, \omega_j)$  – элемент межчастотной корреляционной функции ФГЗ смеси.

Подставим (3) и (4) в (2) и получим:

$$I(t_{ep}^u / \tau) = \exp \left[ \frac{1}{2} (t_{ep}^s(\tau) + t_{ep}^s(\tau_0)) \cdot K^{-1} \cdot (t_{ep}^s(\tau) - t_{ep}^s(\tau_0)) - \right. \\ \left. t_{ep}^s(\tau_0) \right] = \\ = \exp \left\{ \left[ (t_{ep}^x)^T - \frac{1}{2} (t_{ep}^s(\tau) + t_{ep}^s(\tau_0)) \right] \times \right. \\ \left. \times K^{-1} \cdot (t_{ep}^s(\tau) - t_{ep}^s(\tau_0)) \right\}. \quad (5)$$

Учитывая, что операция логарифмирования не меняет положения максимума, возьмем логарифм от (5) и получим:

$$\ln I[t_{ep}^x / \tau] = \\ = \left\{ \left[ (t_{ep}^x)^T - \frac{1}{2} (t_{ep}^s(\tau) + t_{ep}^s(\tau_0))^T \right] K^{-1} (t_{ep}^s - t_{ep}^s(\tau_0)) \right\}. \quad (6)$$

Введем вектор

$$V(\tau) = K^{-1} \cdot (t_{ep}^x(\tau) - t_{ep}^s(\tau_0)). \quad (7)$$

Тогда

$$t_{ep}^x(\tau) - t_{ep}^s(\tau_0) = K \cdot V(\tau). \quad (8)$$

Записывая компоненты вектора  $V(\tau)$  в виде  $V(\omega_j^1; \tau) \cdot \Delta \omega_j^1$ , представим (7) интегральной суммой:

$$t_{ep}^x(\omega, \tau) - t_{ep}^s(\omega, \tau_0) = \sum_{j=1}^m R_i(\omega, \omega_j^1) \cdot V(\omega_j^1, \tau) \cdot \Delta \omega_j^1. \quad (9)$$

Переходя в (9) к пределу при  $m \rightarrow \infty$  (или при  $\max \Delta \omega_j^1 \rightarrow 0$ ) на заданном интервале  $\Omega$ , получаем неоднородное интегральное уравнение

$$\int_{\Omega} R_i(\omega, \omega^1) \cdot V(\omega^1, \tau) d\omega^1 = t_{ep}^x(\omega, \tau) - t_{ep}^s(\omega, \tau_0), \quad (10)$$

из которого можно определить функцию  $V(\omega_j^1; \tau)$ .

Представим теперь (6) стохастической интегральной суммой

$$\ln I[t_{ep}^x / \tau] = \\ = \sum_{j=1}^m V(\omega_j, \tau) \left[ \frac{t_{ep}^x(\omega_j) - t_{ep}^s(\omega_j, \tau) + t_{ep}^s(\omega_j, \tau_0)}{2} \right] \Delta \omega_j. \quad (11)$$

С учетом теоремы запаздывания можно записать  $t_{ep}^x(\omega, \tau) = t_{ep}^x(\omega, \tau_0) + \tau$  и, приняв  $\tau_0 = 0$ , получить:

$$t_{ep}^s(\omega_j, \tau) + t_{ep}^s(\omega_j, \tau_0) = 2t_{ep}^s(\omega_j) + \tau. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\ln I[t_{ep}^x / \tau] = \sum_{j=1}^m V(\omega_j, \tau) [t_{ep}^x(\omega_j) - t_{ep}^s(\omega_j) - \tau / 2] \Delta \omega_j. \quad (13)$$

Переходя в (13) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , имеем

$$\ln I[t_{ep}^x / \tau] = \int_{\Omega} V(\omega, \tau) [t_{ep}^x(\omega) - t_{ep}^s(\omega) - \tau / 2] d\omega. \quad (14)$$

С учетом (12), (10) перепишется в виде

$$\int_{\Omega} R_i(\omega, \omega^1) \cdot V(\omega^1, \tau) d\omega^1 = \tau. \quad (15)$$

Из (15) получим

$$\int_{\Omega} R_i(\omega, \omega^1) \cdot V(\omega^1) d\omega^1 = 1, \quad (16)$$

а из (16) имеем

$$V(\omega^1, \tau) = \tau V(\omega^1). \quad (17)$$

Теперь подставим (14) в (1) и с учетом (17) получим

$$\int_{\Omega} V(\omega) [t_{ep}^x(\omega) - t_{ep}^s(\omega) - \tau] d\omega = 0, \quad (18)$$

откуда

$$\hat{\tau}_{onm} = \frac{\int_{\Omega} V(\omega) [t_{ep}^x(\omega) - t_{ep}^s(\omega)] d\omega}{\int_{\Omega} V(\omega) d\omega}. \quad (19)$$

Выражение (19) определяет оптимальную процедуру оценки временного положения сильного сигнала по коррелированной выборке ФГЗ смеси сигнала с аддитивной гауссовой помехой.

Из (16) можно получить, что

$$V(\omega) = \int_{\Omega} R_i^{-1}(\omega, \omega^1) \cdot d\omega^1. \quad (20)$$

В этом случае дисперсию оценки временного положения можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} D[\tilde{\tau}_{onm}] &= \frac{1}{\left(\int_{\Omega} V(\omega) \cdot d\omega\right)^2} \cdot D\left[\int V(\omega) \cdot t_{cp}^x(\omega) \cdot d\omega\right] = \\ &= \frac{1}{\left(\int_{\Omega} V(\omega) \cdot d\omega\right)^2} \cdot \iint_{\Omega} V(\omega) \cdot V(\omega') \cdot R_t(\omega, \omega') d\omega \cdot d\omega'. \quad (21) \end{aligned}$$

Выражение (21) получено из свойства дисперсии для коррелированных величин. Данное выражение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} D[\tilde{\tau}_{onm}] &= \\ &= \frac{1}{\left(\int_{\Omega} V(\omega) d\omega\right)^2} \cdot \int_{\Omega} V(\omega) \int_{\Omega} V(\omega') \cdot R_t(\omega, \omega') d\omega d\omega'. \quad (22) \end{aligned}$$

Теперь с учетом выражения (16), выражение (22) примет вид

$$D[\tilde{\tau}_{onm}] = \frac{1}{\int_{\Omega} V(\omega) \cdot d\omega}. \quad (23)$$

Подставляя выражение (20) в (23), окончательно получим формулу для вычисления дисперсии оценки временного положения:

$$D[\tilde{\tau}_{onm}] = \frac{1}{\iint_{\Omega} R_t^{-1}(\omega, \omega') d\omega \cdot d\omega'}. \quad (24)$$

Перейдем к частному случаю, когда элементы в выборке ФЧХ смеси являются независимыми. Тогда корреляционная матрица будет иметь диагональный вид:

$$R_t(\omega, \omega') = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix},$$

где  $g_{ij}$  – коэффициент корреляции ФГЗ смеси на частотах  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно и следовательно может быть представлена как:

$$R_t(\omega, \omega') = \sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega'), \quad (25)$$

где  $\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)$  – дисперсия групповой задержки смеси на частоте  $\omega$ ;  $\delta$  – дельта-функция.

Тогда, подставляя (25) в (20), а полученный результат в (19), имеем

$$\hat{\tau}_{onm} = \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)} [t_{cp}^x(\omega) - t_{cp}^s(\omega)] d\omega}{\int_{\Omega} \frac{d\omega}{\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)}}, \quad (26)$$

Выражение (26) определяет оптимальную процедуру оценки временного положения сильных

сигналов по их ФГЗ. Как видно из полученного выражения данная процедура сводится к определению средневзвешенного отклонения групповой задержки смеси от групповой задержки сигнала по всему анализированному диапазону частот  $\Omega$ . В качестве весов здесь используются величины, обратные дисперсии групповой задержки смеси в зависимости от частоты  $\omega$ . Нетрудно показать, что эти весовые функции определяют дисперсию получаемой оценки  $\hat{\tau}_{onm}$ . Действительно, находя дисперсию от левой и правой части всего выражения (26), имеем:

$$D[\hat{\tau}_{onm}] = \left[ \int_{\Omega} \frac{d\omega}{\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Такое же выражение можно получить, если подставить (25) в (24).

Так как дисперсия групповой задержки смеси определяет точность оптимальных оценок временного положения, то представляет интерес физический смысл этой дисперсии.

Как показано выше, групповая задержка, находится через первую производную ФЧХ смеси. Поэтому дисперсию групповой задержки можно определить:

$$\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega) = \frac{\partial^2 R(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{\omega_1=\omega_2=\omega} - \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} [M_{\phi_x}(\omega)] \right]^2, \quad (28)$$

где  $R(\omega_1, \omega_2)$  – элементы межчастотной корреляционной матрицы функции ФЧХ смеси;  $M_{\phi_x}(\omega)$  – математическое ожидание ФЧХ смеси.

Из выражения (28) следует, что дисперсия групповой задержки смеси зависит от значений элементов межчастотной корреляционной функции ФЧХ смеси, стоящих на главной диагонали, и значений групповой задержки сигнала (математическое ожидание ФЧХ смеси сигнала равно ФЧХ сигнала). Тогда, учитывая, что диагональные элементы матрицы  $K[R(\omega_1, \omega_2)]$  равны дисперсии ФЧХ смеси  $\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)$ , и, которая в свою очередь равна величине обратной отношению сигнал/помеха

$\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega) = \frac{1}{\gamma^2(\omega)}$ , можно утверждать, что дисперсия групповой задержки смеси будет обратно пропорциональна величине изменения скорости отношения сигнал/помеха по частоте. Назовем эту величину отношением сигнал/помеха в области производных и обозначим:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{1}{\sigma_{t_{cp}^x}^2(\omega)}. \quad (29)$$

Теперь подставим (29) в (26) и (27) и получим:

$$\hat{\tau}_{onm} = \frac{\int_{\Omega} \gamma^2(\omega) [t_{cp}^x(\omega) - t_{cp}^s(\omega)] d\omega}{\int_{\Omega} \gamma^2(\omega) d\omega}, \quad (30)$$

$$D[\hat{\tau}_{omn}] = \left[ \int_{\Omega} \gamma^2(\omega) d\omega \right]^{-1}, \quad (31)$$

где  $\gamma(\omega)$  – отношение сигнал/помеха на частоте  $\omega$  в области производных.

Из сравнения выражения (30) и (19) следует, что наличие корреляции в выборке ФГЗ смеси сигнала с помехой не приводит к изменению структуры алгоритма определения временного положения. Отличия сводятся только к определению весовых коэффициентов, которые, однако, существенно влияют на точность получаемых оценок ((24) и (31) соответственно).

Следует заметить, что для случая слабого сигнала получить оптимальную процедуру оценки временного положения при наличии коррелированных значений функции группового запаздывания не удается. Однако, учитывая тот факт, что в случае сильного сигнала наличие корреляции не приведет к существенным изменениям, можно воспользоваться процедурой оптимальной обработки для независимых значений функции группового запаздывания [3]:

$$L(\tau) = \sum_{k=1}^m \gamma(\omega_k) \cos(\Delta\omega t_{ep}(\omega_k) - \Delta\omega\tau). \quad (32)$$

Выражение (32) определяет функцию правдоподобия  $L(\tau)$  через функции группового запаздывания, которая дает представление о сигнальном процессе в части импульсной сейсмограммы, т. е. позволяет оценить временное положение.

Теперь покажем, что это выражение будет оптимальным и для случая сильного сигнала. Для этого будем считать, что сигнал сильный, тогда

$$\cos(\Delta\omega t_{ep}(\omega) - \Delta\omega\tau) \approx 1 - \frac{1}{2}[\Delta\omega t_{ep}(\omega) - \Delta\omega\tau]^2,$$

и выражение (32) принимает следующий вид:

$$L(\tau) = \sum_{k=1}^m \gamma(\omega_k) \left( 1 - \frac{1}{2}[\Delta\omega t_{ep}(\omega_k) - \Delta\omega\tau]^2 \right).$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

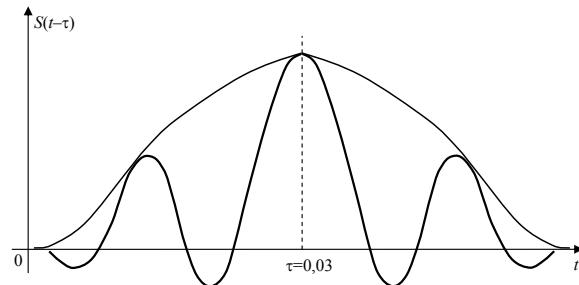
1. Саваренский Е.Ф. Сейсмические волны. – М.: Недра, 1972. – 296 с.
2. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.

Для нахождения оптимальной оценки временного положения необходимо решить уравнение  $\frac{\partial \ln L(\tau)}{\partial \tau} = 0$ , из которого получаем, что

$$\hat{\tau}_{omn} = \frac{\sum_{k=1}^m \gamma^2(\omega_k) [t_{ep}^x(\omega_k) - t_{ep}^s(\omega_k)]}{\sum_{k=1}^m \gamma^2(\omega_k)}.$$

Из полученного выражение видно, что оптимальная обработка для случая слабого сигнала является также оптимальной и для сильного сигнала, но не наоборот.

На рисунке в качестве примера работоспособности предлагаемого алгоритма показано восстановление огибающей импульса Пузырева путем построения функции правдоподобия (32). Из рисунка видно, что максимум функции правдоподобия точно соответствует временному положению сигнала.



**Рисунок.** Восстановление огибающей импульса Пузырева

Таким образом, для реализации оптимальной процедуры определения временного положения сейсмических сигналов в дисперсионных средах необходимо построить функцию правдоподобия вида (32) и выделить ее экстремумы. Для случая сильного сигнала и зависимой выборки ФГЗ дисперсия оценки описывается выражением (24), а для случая сильного сигнала и независимой выборки ФГЗ выражением (31).

3. Кочегуров А.И., Быстров В.Н. Определение временного положения сложных сигналов в среде с дисперсией и поглощением // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2002. – № 3–4. – С. 50–54.

Поступила 13.11.2009 г.