

УДК 620.179.15;621.396.965.8

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.А. Баранов, В.В. Бразовский, В.К. Кулешов, У. Эверт*

Томский политехнический университет

*Bundesanstalt für Materialforschung und Prüfung, г. Берлин, Германия

E-mail: altaikompozit@mail.ru

Рассмотрен широкий класс новых методов обработки изображений, основанный на статистической оценке инвариантов группы автоморфизмов изображения. Разработан теоретико-групповой статистический подход к решению обратных задач реконструкции изображений, позволяющий визуализировать структурно-функциональные связи в объекте контроля. Предложенные методы применены для решения задач восстановления зашумленных изображений в неразрушающем контроле.

Ключевые слова:

Математическая модель, прямая задача, обратная задача, некорректно-поставленная задача, структурный инвариант, группа преобразований, группа Ли, теоретико-групповой инвариант, статистическая гипотеза, обработка изображений, реконструкция изображений, пространственная фильтрация.

Key words:

Mathematical model, direct problem, inverse problem, ill-posed problem, structural invariant, group of transformations, Lie group, group-theoretical invariant, statistical hypothesis, image processing, image reconstruction, spatial filtering.

Структурно-ориентированный подход к реконструкции изображений

При математическом описании того или иного круга явлений важнейшую роль играет *математическая модель* [1]. Ее ценность — в предсказательных возможностях. Модель служит основой для теоретических выводов, проверяемых затем экспериментально. Извлечение такого рода следствий называется решением *прямой задачи* [1]. Если уточняется сама модель (например, корректируются ее функциональные и параметрические характеристики после сопоставления с экспериментальными данными), то говорят, что решается *обратная задача* [1]. Циклы усовершенствования модели, включающие поочередное решение прямых и обратных задач, могут повторяться многократно. Обратные задачи реконструкции изображений чаще всего бывают остро некорректными. По критерию Адамара задача корректна, если решение: 1) существует, 2) единственно, 3) устойчиво. На практике условия 2 и 3 обычно нарушены. Трудности реконструкции дополнительно усугубляются еще и тем, что информация о формирующей исходное изображение передаточной функции часто остается недоступной. Отмеченные обстоятельства стимулируют разработку унифицированного подхода к математическим моделям обработки изображений (ОИ), основанных на конструктивных «интегрирующих идеях», позволяющую эффективно выделять характеристические особенности реконструируемого объекта на фоне интенсивных шумов. Один из реалистичных путей осуществления этого основан на статистическом выявлении теоретико-групповых инвариантов объекта контроля в рамках *структурного подхода*.

Структура в обыденном понимании это *строение* или *форма*. В науке и философии *структурой* называют совокупность устойчивых связей и отношений в объекте, обеспечивающих его целостность

и *самотождественность* при различных внешних и внутренних изменениях. Такое, более строгое, понимание складывалось постепенно и окончательно оформилось в конце XIX-го столетия, сначала в химии, в связи с возникновением «теории химического строения», а затем распространилось как в естественных, так и в гуманитарных науках. В этом же смысле понятие *структура* трактуется и в современной математике. Оно применяется к множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить структуру (не элементы) задаются соотношения, в которых находятся между собой элементы множества (*типовая характеристика структуры*), которые затем используются как *аксиомы структуры*. Все, происходящее в структуре изменения, реализуются на уровне ее элементов. В математизированных моделях они обычно описываются *теоретико-групповыми преобразованиями* [2]. В структуре отражены интегративные свойства объекта (называемые также, системоприобретенными, которые не могут быть непосредственно «выведены» из свойств составляющих ее элементов. В «структурно-ориентированных методах ОИ» [3–10] они участвуют на правах унифицированных статистических гипотез о группе автоморфизмов изображения, на основе которой выявляется структура. Связи и отношения между элементами (*структурно-функциональные связи*), остающиеся при преобразованиях неизменными, называются *структурными инвариантами*. Основная задача как структурного подхода вообще, так и структурно-ориентированных методов это выявление и классификация таких инвариантов.

В рамках структурного подхода обратная некорректная задача представима как дедуктивная система с исходным набором аксиом структуры A_0 — «объективных утверждений» об объекте, неявным образом ограничивающих множество возможных решений этой задачи (иногда для этого используют

еще нестрогий термин: «пространство решений»). В простейшем случае аксиомами могут быть сами исходные уравнения задачи для конкретного объекта (т. е. в них входят реальные экспериментальные данные, например для вычислительной томографии это измеренные луч-суммы). Они могут быть преобразованы также в эквивалентный набор аксиом, например, в тех случаях, когда задача решается на основе Фурье-методов в пространстве частот, на основе методов проекций на выпуклые множества [6], на основе методов нелинейного обратного проецирования [3–5, 8, 9] и т. д. Система исходных уравнений может быть преобразована в систему неравенств, как это делается, например, в методе минимальных проекций [6], где «пространство решений» представляет собой выпуклое множество. Кроме того, исходный набор данных может быть подвергнут предобработке с целью устранения его внутренней противоречивости, т. е. возможной несовместности уравнений, возникающей благодаря зашумленности данных.

Решается всегда не исходная некорректная задача, а некоторая другая, корректная, для которой набор аксиом структуры A является пересечением наборов аксиом A_0 и A_S , где A_S это переменный набор, вносимый субъектом исследования в качестве гипотез и предположений, т. е. $A = (A_0 \cap A_S)$. Возникающий при этом субъективный произвол принципиально неустраним, что, однако, не лишает задачу четкости постановки. Математическая модель в рамках структурного подхода может быть как детерминистской, так и статистической. При решении обратных задач на основе чисто детерминистского подхода аксиомы A_0 и A_S часто оказываются несовместными, а при их совместности предположения A_S малоинформативными. Наиболее гибкие методы решения обратных задач основаны на оценке статистической совместности A_0 и A_S и на исследовании различных форм статистической зависимости между ними. Для проверки статистических выводов из A в структурно-ориентированном подходе строится адекватный математический аппарат и развивается математическая техника для оценки неточных структурных инвариантов. В связи с этим разработаны и введены в употребление множественные меры сходства и меры различия [4, 5, 8, 9] для набора изображений, порождаемых группой автоморфизмов G_S , связанной с гипотезой A_S .

Меры сходства являются неклассическими статистиками, выводимыми на основе нелинейного обратного проецирования [8]. Используются и традиционные методы математической статистики, таким образом создается аппарат статистической поддержки структурных инвариантов. Группа G_S является адекватным формальным инструментом для унификации подхода к различным задачам и «проблемным областям» A , порождаемым исходной некорректной задачей A_0 . В рамках структурно-ориентированного подхода таких проблемных областей столько, сколько существует групп G_S , т. е.

на основе множества таких групп осуществляется структурная классификация всего проблемного поля для исходной задачи A_0 , включая алгоритмизируемые области для корректных задач.

На основе обрисованного здесь подхода [9, 10] разработаны многие конкретные методы ОИ. Однако, в рамках данной публикации необходимо более подробно остановиться на легко алгоритмизируемых методах, основанных на «локальной симметрии структурно-функциональных связей» фона изображения, описываемой «группой локальной симметрии» L_S [9, 10]. Это группа Ли, в вырожденных случаях — конечная группа. Если предположить, что первоначальное, еще неразрушенное (в частности, разного рода шумами) изображение представляет собой гладкое *многообразие*, то для него в бесконечно малой окрестности каждой точки применимы соображения *геометрии в малом*. Структурные инварианты являются в этом случае инвариантами относительно автоморфизмов групп Ли. При разрушении объекта его топология, конечно, также нарушается. Тем не менее, если степень разрушения не превышает некоторого «порога необратимости», то инварианты продолжают еще сохраняться в видеоизмененной деградированной форме, — не в бесконечно малой, а в некоторой конечной окрестности элемента изображения, где они могут быть восстановлены на основе теоретико-групповых статистических методов. Группа L_S предназначена как раз для неявного (на основе ее автоморфизмов в этой окрестности) статистического выявления этих инвариантов.

Структурно-ориентированная фильтрация проекционных изображений железобетонной стены

Рассмотрим некоторые конкретные примеры применения структурно-ориентированных методов ОИ на практике. Одной из трудных и актуальных задач, вставших перед Федеральным институтом по контролю и исследованию материалов в Берлине «BAM-Berlin» был радиационный контроль строительных конструкций с последующей томографической визуализацией [9]. В течение ряда лет в этом направлении в Берлине осуществлялась широкая программа исследований, проводившаяся при технической поддержке Fuji Film Europe (Дюссельдорф, Германия) и ее европейского директора д-ра М. Калинга. В задаче томографической реконструкции внутреннего строения железобетонной стены с ограниченным доступом (участок старого моста) для регистрации радиографических проекций использовались источник излучения на основе ^{60}Co и фотолюминесцентные экраны с биомедицинской системой «BAS2000» (Fuji Film). Геометрия подсистемы измерения проекционных данных — копланарная (как в классическом томосинтезе). Было зарегистрировано 14 проекционных изображений. Проекция размером 400×800 мм регистрировались на сдвоенных фотолюминесцентных экранах размером 400×400 мм. Простран-

ственное разрешение — 10 пар лин./мм. Толщина стены — 400 мм. Расстояние от экрана до плоскости источника — 1000 мм. Источник последовательно смещался вдоль прямой линии в плоскости источника (с шагом 200 мм) в направлении, перпендикулярном стальным стержням в железобетоне.

В качестве математического метода томографической реконструкции стены нелинейный томосинтез [3–5, 7, 8] был вполне адекватен, однако благодаря шумам, вызываемым рассеянным излучением, потребовались существенно новые методы обработки проекций. Предложенный для этой цели метод структурно-ориентированной фильтрации, основанный на «локальной симметрии», оказался успешным [9]. Было исследовано несколько вариантов метода, в принципе приводящих к одним и тем же результатам. При всем разнообразии вариантов эти методы часто можно представить в традиционной форме алгоритма пространственной фильтрации со «скользящим окном», общая схема которого знакома и привычна большинству потребителей программного обеспечения для ОИ. При этом возникает квазитомографическая задача для оценки микроизображения внутри окна. Для непрерывной группы «число» внутренних ракурсов континуально-бесконечно, однако в конкретных практических алгоритмах используется какое-то конечное подмножество из них. По их набору оцениваются характеристики элементов изображения внутри окна, чаще всего это результирующая яркость центрального элемента.

В строительных конструкциях вторичные элементы, отвечающие за определенные структурно-функциональные связи, представляют собой протяженные образования. Им соответствует и определенная материальная субструктура (арматура в бетоне). Если такие вторичные элементы не дают никакого вклада в проекционное локальное изображение внутри скользящего окна, то данное изображение в пределах статистической значимости уместно считать изотропным. В противном случае возникают значимые отклонения от изотропности, отождествляемые с инцидентностью вторичного элемента центральному элементу микроизображения. В данном случае группой локальной симметрии L_S (теоретико-групповым фильтром) служит группа вращения (называемая также группой $SO(2)$) локального изображения вокруг центрального элемента. Она описывает фон, пустое пространство без сигнала.

Все элементы исходного изображения, рассматриваемые как центры локальных микроизображений и удовлетворяющие локальной изотропии, эквивалентны. Напротив, статистически значимая анизотропия свидетельствует о появлении *смыслового сигнала* (вторичного элемента, например, арматуры, в других случаях дефекта, допустим фрагмента трещины и т. п.). Здесь применимы слова П. Кюри «диссимметрия творит явление», сказанные им по другому поводу. Отклонения от нормы

реже, чем норма, их информационная нагруженность выше, поэтому естественно строить алгоритм распознавания таким образом, что симметрия описывает *фон* и *норму*, т. е. наиболее вероятное и тривиальное из того, что может произойти. Наличие симметрии рассматривается, таким образом, как нулевая теоретико-групповая статистическая гипотеза, а появление *вторичного элемента*, как альтернативная гипотеза.

Рассмотрим один из алгоритмов распознавания анизотропии этого класса (с вычислительными затратами близкими к минимальным). В нем все выборочные статистики вычисляются на некоторых подмножествах локального изображения, а именно вдоль прямых линий, проходящих через центральный элемент. Рассматривались N различных фиксированных направлений, соответствующих N группам данных для этих подмножеств. Для определенности предположим скользящее окно квадратным с полушириной M . Пусть p_{ij} и r_{ij} — яркости элементов исходного и итогового изображений ($i=1, 2, \dots, I, j=1, 2, \dots, J$, где I и J — размерности изображения), n ($n=1, 2, \dots, N$) — номер произвольного направления, $a_{1ij}, a_{2ij}, \dots, a_{Nij}$ — средние значения и $q_{1ij}, q_{2ij}, \dots, q_{Nij}$ — среднеквадратичные в N группах данных (при вычислении этих значений центральный элемент не принимался во внимание). Для того, чтобы в дальнейшем не делать формулы громоздкими, индексы i и j будут опущены. Рассмотрим параметр n как фактор, предположительно влияющий на средние значения $a_1, a_2, \dots, a_N$. В соответствии с основными принципами дисперсионного анализа может быть построена статистика (F -отношение Фишера, т. е. межгрупповая дисперсия, поделённая на общую внутригрупповую) с $N-1$ и $N(2M-1)$ степенями свободы:

$$F = \frac{N(2M-1)}{(N-1)2M} \frac{\sum_{n=1}^N \left(a_n - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N a_l \right)^2}{\sum_{n=1}^N (q_n^2 - a_n^2)},$$

описывающая итоговое изображение. Более точно, к полученной формуле может быть применено некоторое нелинейное преобразование $r_{ij}=f(F_{ij})$ типа «look-up-table» так, чтобы обеспечить приемлемую для человеческого глаза гистограмму яркости. Итоговое изображение, таким образом, «рисует» статистикой Фишера, являющейся в данном случае мерой различия между средними по различным направлениям. В данном подходе предполагалось, что та же самая статистика, на основе которой отвергается или принимается гипотеза, может быть использована как количественная мера отклонения от точной симметрии (здесь от изотропии) и служить как характеристика яркости результирующего изображения.

На рисунке представлены результаты структурно-ориентированной фильтрации с привлечением оценки дисперсионного анализа при $N=4$ и $M=32$.

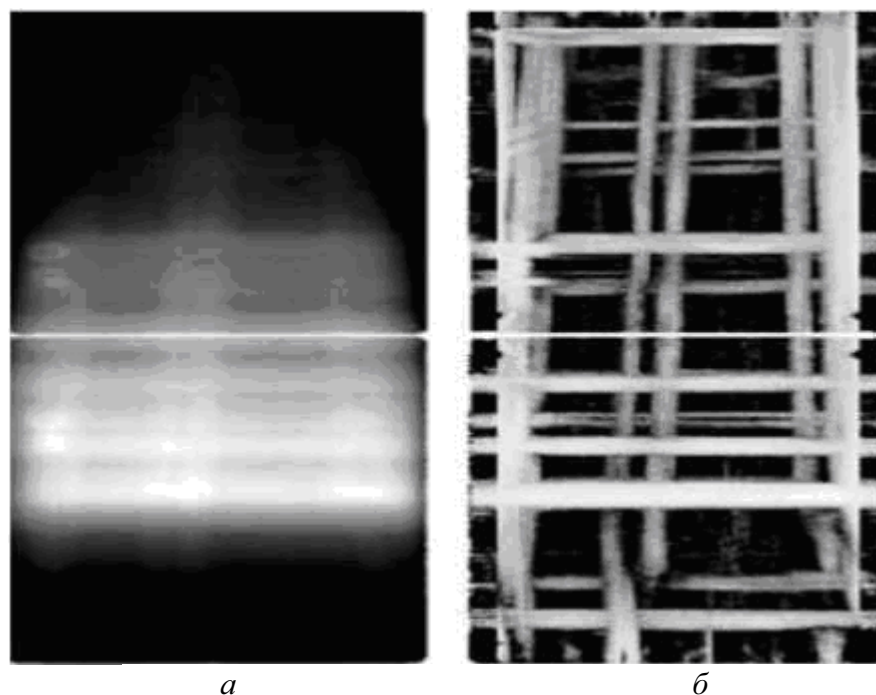


Рисунок. Структурно-ориентированная фильтрация проекции железобетонной стены. Проекция: а) исходная; б) отфильтрованная

Слева (а) — нефильтрованная, справа (б) — фильтрованная проекции. «Черное» на фильтованной проекции справа соответствует тем областям, где нулевая теоретико-групповая гипотеза (в данном случае предположение об изотропности микроизображения в локальном пятне вблизи исследуемого центрального элемента) не отвергается. Напротив, «белое» — это свидетельства статистики Фишера о неправомерности нулевой гипотезы при различных уровнях значимости.

При контроле железобетонных конструкций [9] структурно-ориентированная фильтрация полностью (даже без томографии) решает практическую проблему, поставленную заказчиком, т. е. инженерами-строителями, осуществляющими надзор за сооружениями. Отметим, что соответствующая математическая задача — некорректная в острой форме, когда даже сам «оператор размытия» исходного незашумленного изображения если и известен, то весьма приблизительно. Фактически, в качестве его параметра использовалась только полуширина окна M . Разными авторами предпринимались также попытки решить эту задачу (фильтрацию предельно зашумленных проекций) на основе хорошо известных и новых методов обработки изображений (модифицированная инверсная фильтрация, процедуры, основанные на соображениях теории фракталов, «Wavelets» и т. д.), однако они не привели к позитивному результату. В исходном проекционном изображении содержится еще много другой смысловой информации, которую можно выявить, меняя ключевую группу L_S . Можно, например, визуализировать грануляцию бетона, если бы такая задача была практически актуальной.

В том случае, когда принципиальный теоретический результат уже получен, плодотворны попытки максимально упростить его до тех пределов, когда основанные на этих упрощениях алгоритмы еще работают, давая приближенные практические результаты, не очень сильно отличающиеся от настоящих. Варианты таких упрощенных процедур можно найти в [9].

Область приложений разработанных методов: вычислительная диагностика и неразрушающий контроль, в особенности проблемы на стыке дефектоскопии и материаловедения. Перспективно также использование этих методов для морфологического анализа изображений и ситуационного распознавания образов.

Выводы

1. Разработан статистический теоретико-групповой подход для решения обратных задач обработки изображений и предложены методы пространственной фильтрации, основанные на проверке статистической гипотезы о «локальной симметрии» микроизображения в скользящем окне, пригодные для реконструкции предельно зашумленных изображений.
2. Развита конкретные статистические теоретико-групповые алгоритмы обработки изображений, основанные на распознавании «локальной анизотропии» с использованием свойств группы $SO(2)$, нашедшие широкое применение в неразрушающем контроле.

Авторы благодарят д-ра М. Калинга (Fuji Film Europe) за помощь в экспериментальной части работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. Математическая модель // Математический энциклопедический словарь. — М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1995. — С. 343–344.
2. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: Иностран. лит-ра, 1947. — 408 с.
3. Баранов В.А., Чекалин А.С. Система цифрового томосинтеза для неразрушающего контроля // Дефектоскопия. — 1988. — № 5. — С. 30–36.
4. Baranov V., Chakhlov V., Kröning M., Morgner W. High speed computerized tomography on thickwalled steel and concrete components using a portable 6 MeV betatron // 6th European Conference on Non-destructive testing: Collect. of papers. — Nice, France, 1994. — № 2. — P. 1287–1291.
5. Baranov V.A., Temnik A.K., Chakhlov V.L., Chekalin A.S. Betatron tomography with the use of nonlinear backprojection techniques // International Symposium on Computerized Tomography for Industrial Applications: Collect. of papers. — Berlin, 1994. — P. 271–277.
6. Baranov V.A. Convex projections reconstruction algorithms on the basis of non-linear backprojection approach // International Symposium on Computerized Tomography for Industrial Applications: Collect. of papers. — Berlin, 1994. — P. 88–95.
7. Ewert U., Schumm A., Nockeman C., Baranov V.A. Fortschritte auf dem Gebiet der digitalen Laminographie // Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung e.V., Jahrestagung 1995 (100 Jahre Röntgenstrahlen und die heutige Vielfalt Industrieller ZfP-Praxis), Aachen. — 1995. — P. 471–475.
8. Baranov V.A. A Variational Approach to Non-Linear Backprojection // Computerized Tomography: Collect. of papers / Editor-in-Chief: M.M. Lavrent'ev. — Utrecht, Netherlands, 1995. — P. 82–97.
9. Ewert U., Baranov V., Borchard K. Cross-sectional imaging of building elements by new non-linear tomosynthesis technique using imaging plates and Co⁶⁰ radiation // NDT & E International. — 1997. — V. 30. — № 4. — P. 243–248.
10. Baranov V., Ewert U. A group-theoretical approach to ill-posed problems // Computer Methods and Inverse Problems in NDT and Diagnostics: Book of abstracts to 3rd Intern. Scient. Conf. (CM NDT – 2001). — M., 2002. — P. 11–12.

Поступила 30.09.2009 г.

УДК 519.2:519.688

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

В.С. Аврамчук, В.Т. Чан

Томский политехнический университет
E-mail: tranvietchau@yahoo.com

Предложен и проанализирован способ расчета частотно-временной корреляционной функции, позволяющий выявить взаимосвязь сигналов на различных частотах.

Ключевые слова:

Частотно-временной корреляционный анализ, корреляция, спектральный анализ.

Key words:

Time-and-frequency correlation analysis, correlation analysis, spectral analysis.

Цифровая обработка сигналов в настоящее время используется для фильтрации, спектрального анализа, свертки и корреляции. Корреляция также может быть использована для установления сходства одного набора данных с другим.

На практике в основном используют быструю корреляцию, основываясь на соответствующей теореме [1]. Этот широко используемый и эффективный способ анализа сигналов обладает существенным ограничением — по его результатам невозможно определить, в каком частотном диапазоне сигналы коррелированы. Предлагаемый способ расчета частотно-временной корреляционной функции позволяет детализировать информацию об общих свойствах двух сигналов.

Положим, имеются дискретные сигналы x_i и y_i , взаимную связь которых, если она существует, следует выявить. Задача состоит в обнаружении взаимной связи этих сигналов и частотного спектра, на котором она проявляется.

Рассмотрим взаимно-корреляционную функцию

$$r_{12} = F^{-1}[F(x_i)F^*(y_i)], \quad (1)$$

где F — прямое дискретное преобразование Фурье первого сигнала, F^* — комплексно-сопряженное значение результатов прямого дискретного преобразования Фурье второго сигнала, F^{-1} — обратное дискретное преобразование Фурье. Идея предлагаемого способа состоит в следующем. Прежде чем подвергнем произведение $F(x_i)F^*(y_i)$ обратному преобразованию Фурье, составим m его копий M^k , $k=0, \dots, m-1$, предварительно обнулив весь спектр, кроме k -ой части. В результате обратного преобразования Фурье каждой из этих копий получим взаимно-корреляционную функцию на соответствующих частотах. Совокупность всех результатов обратного дискретного преобразования Фурье дает частотно-временную корреляционную функцию. Формульная запись будет иметь следующий вид: