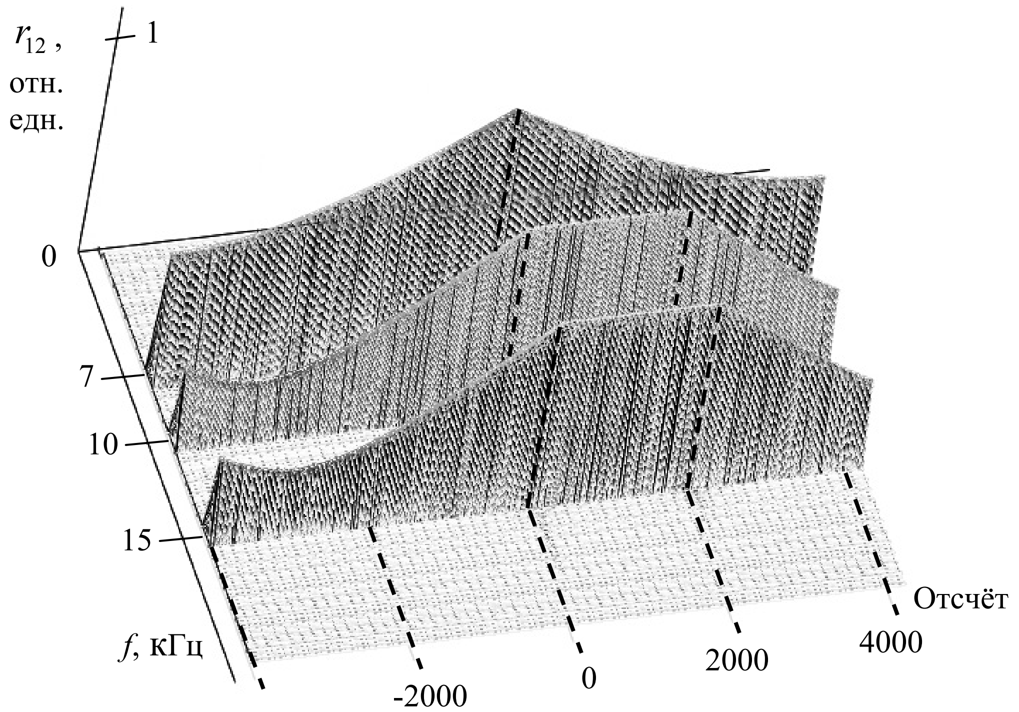

Рис. 4. *Частотно-временная корреляционная функция для тестового примера № 3*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

3. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – М.: Вильямс, 2008. – 992 с.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 536 с.
5. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
6. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры / Под ред. проф. А.М. Трахтмана. – М: Советское радио, 1980. – 224 с.

Поступила 08.07.2009 г.

УДК 004.02.21

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК СТАФФИНГОВАНИЯ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ С ПЕРЕСПРОСОМ

А.Н. Шкердин, О.Ф. Юдин*

Академия Федеральной службы охраны России, г. Орёл
*ФГУП «НИИ «Квант», г. Москва
E-mail: uof@rdi-kvant.ru

Рассматривается аналитическая модель канала и статистика ошибок при передаче данных, приводится оценка эффективности метода повышения достоверности приема информации на основе расчета вероятности ошибок в стандартном пакете HDLC.

Ключевые слова:
Исправление ошибок, переспрос, системы связи, модуляция.
Key words:
Error correction, negative acknowledgement, communication systems, modulation.

В современных системах передачи данных применение переспроса для обеспечения необходимой достоверности передачи информации является обязательной процедурой. Однако, при ведении мониторинга не всегда можно отследить канал обратной связи (ОС), а наличие ошибок приводит к потере информации, передаваемой в канале. Существующие методы исправления ошибок в каналах систем связи с переспросом в настоящее время не удовлетворяют возросшим требованиям к качеству приема. В [1] предложены методы повышения достоверности приема информации при ведении мониторинга, которые используют её избыточность и компенсируют отсутствие канала ОС. Для теоретического обоснования предложенных методов рассмотрим аналитическую модель канала и статистику ошибок, а также оценим их эффективность на основе расчета вероятности ошибок на длине стандартного пакета HDLC.

В канале, описываемом гауссовской моделью, в соответствии с рекомендацией ITU-T V.29 для передачи факсимильных сообщений (ФС) четвёртой группы используется относительная фазовая модуляция (ОФМ) [2]. Известно [3], что информация в этом случае содержится в парах последовательно передаваемых элементарных посылок и, вследствие этого, ошибки на выходе канала имеют тенденцию к группированию. Указанные особенности необходимо учитывать при исправлении ошибок в кадрах ФС. Так, например, при передаче со скоростью 9600 бит/с по рекомендации ITU-T V.29 используется восьмипозиционная относительная амплитудно-фазовая модуляция. Исходя из того, что для гауссовского канала наиболее вероятными будут ошибки, соответствующие минимальным по расстоянию в евклидовом пространстве переходам, существует возможность перебора наиболее вероятных ошибочных векторов [1]. Поскольку имеется 8 позиций фазы и 2 позиции амплитуды для каждой фазы, ошибки следует разделить на «амплитудные» и «фазовые». «Амплитудные» ошибки, например, замена 0011 на 1011, не размножаются на следующем такте демодулятора. «Фазовая» же ошибка размножается, то есть приводит к искажению следующей комбинации, поскольку используется ОФМ. «Фазовая» ошибка всегда будет иметь «чётный» характер, т. е. однократное искажение фазы может привести только к двукратной, четырёхкратной или шестикратной ошибке. Причём две подряд «фазовые» ошибки будут определённым образом налагаться друг на друга, давая в результате также «чётные» ошибки – двукратные, четырёхкратные, шестикратные или восьмикратные. Для доказательства рассмотрим модель канала с ОФМ [4].

Аналитическая модель канала с ОФМ

Множество дискретных значений фазы сигнала образуют циклическую абелеву группу $\Phi=\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{M-1}\}$, порядок которой $M=2^m$ (m – кратность модуляции). Например, при двукратной фазовой модуляции (ФМ) $M=4$, а множество фаз Φ: $\varphi_0=0$, $\varphi_1=\pi/2$, $\varphi_2=\pi$, $\varphi_3=3\pi/2$. Это множество удовлетворяет всем аксиомам группы:

- замкнутость $\varphi_i+\varphi_j=\varphi_k\in\Phi$, $i,j,k=1,2,\ldots,M-1$;
- ассоциативность $\varphi_i+(\varphi_j+\varphi_k)=(\varphi_i+\varphi_j)+\varphi_k$;
- коммутативность $\varphi_i+\varphi_j=\varphi_j+\varphi_i$;
- единичный элемент группы Φ есть φ_0, так как $\varphi_i+\varphi_0=\varphi_i$;
- элемент φ_1 обратен φ_3, а φ_2 обратен самому себе.

В рассматриваемой группе определена операция сложения по модулю 2π. Группа Φ является циклической, так как $\varphi_k=k\varphi_1$ (при $M=4$, $\varphi_2=2\varphi_1$ и $\varphi_3=3\varphi_1$).

Полагаем, что перескоки фазы при формировании опорного колебания происходят достаточно редко. На интервале рассмотрения фаза опорного колебания считается постоянной, выбранной случайным образом, из множества возможных значений фазы сигнала Φ. Поэтому демодуляция в отсутствие помех производиться с постоянной ошибкой. Все варианты неоднозначности образуют циклическую группу подстановок f_i. Порядок этой группы равен M.

Подстановки

$$f_0=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \varphi_3 & \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix},$$

$$f_2=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_0 & \varphi_1\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_0\end{pmatrix}$$

соответствуют расхождению фаз принимаемого сигнала и восстановленной несущей на углы 0, $\pi/2$, π и $2\pi/2$ соответственно. Группа подстановок F изоморфна группе Φ, при этом канал с M-позиционной ФМ и неоднозначностью порядка M можно представить в виде схемы, рис. 1.

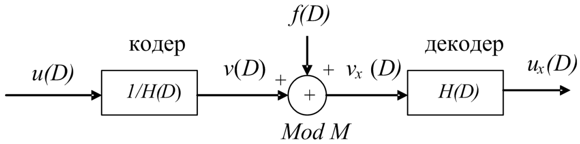

Рис. 1. *Схема работы системы*

Алгебраическая модель канала с ФМ позволяет заменить операции над векторами с начальными фазами φ_i алгебраическими операциями над M-ичными символами [3].

Представим последовательность M-ичных символов u, передаваемых по каналу, в виде формального степенного ряда

$$u(D)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}u_{(r)}D^r,\ u\in R_M, \qquad (1)$$

где R_M – кольцо классов вычетов целых чисел по модулю M. Аддитивная группа кольца изоморфна группе Φ. Неоднозначность, обусловленная скачком фазы в канале в момент времени $r=0$, вносится сумматором по модулю M, на один вход которого поступает передаваемая последовательность (1), а на другой – последовательность идентичных символов f, отображающих расхождение фаз

$$f(D)=\sum_{r=0}^{\infty}fD^r,\ f\in R_M. \qquad (2)$$

В [3] показано, что $f(D)=f/(1-D)$. Пусть $H(D)$ – передаточная функция относительного декодера. Последовательность символов на его выходе имеет вид

$$u_x(D)=v_x(D)H(D)=[v(D)+f(D)]H(D)=$$
$$=v(D)H(D)+f/(1-D)H(D),$$

где знак + означает сложение по модулю M. Если положить $H(D)=1-D$, то при поступлении на вход относительного декодера полубесконечной последовательности идентичных символов неоднозначности (2) на его выходе получим единственный символ f в момент r=0, т. к. $f(D)H(D)=f$. Таким образом, при выборе передаточной функции декодера в виде $H(D)=1-D$ неоднозначность на выходе канала при r>0 не проявляется. Передача информации по такому каналу возможна, если передаточную функцию кодера выбрать обратной функции декодера, т. е. $[H(D)]^{-1}=1/(1-D)$.

Схемы относительного кодера и декодера показаны на рис. 2, где D – элемент задержки; $n(D)$ – последовательность случайных символов ошибок в канале; $n_{(r)}\in R_M$. В дальнейшем будем полагать, что ошибки $n_{(r)}$ образуют поток независимых символов.

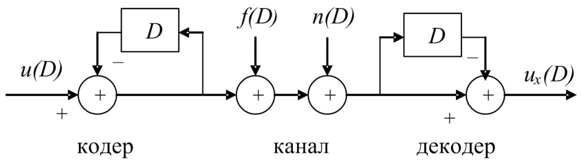

Рис. 2. *Схема относительного кодера и декодера*

Анализ ошибок на выходе декодера основан на групповых свойствах последовательностей и линейности преобразований в схеме, рис. 2. В этом случае можно положить $u(D)$=0 и $f(D)$=0 и рассматривать только действие ошибок $n(D)$ на относительный декодер, как показано на рис. 3.

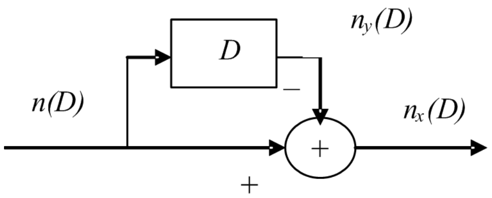

Рис. 3. *Схема анализа ошибок на выходе декодера*

Последовательность ошибочных символов на выходе декодера будет $n_x(D)=n(D)(1-D)$.

Относительный декодер представляет собой автомат с конечным числом состояний, в котором выходные символы $n_x(D)$ зависят как от входных символов, так и от символов $n_y(D)$, поступающих на второй вход сумматора. Работа автомата записывается диаграммой состояний. Число состояний автомата равно числу различных символов n на выходе (числу позиций фазы M). Ветви диаграммы состояний маркируются переменными D и N. Поскольку символы на выходе и входе автомата могут быть и не двоичными, переменным D и N присваивают соответствующие индексы.

На рис. 4 показана диаграмма относительного декодера ОФМ, для случая M=4. Общие правила построения таких диаграмм сводятся к следующему. Состояния обозначают символами $S_0,S_1,...,S_{M-1}$ и располагают в узлах диаграммы. Смена состояний определяется последовательностью входных символов n, поэтому из каждого состояния S_i возможен переход во все остальные состояния, а так же вновь в состояние S_i. Переходы обозначают направленными ветвями. Всего в диаграмме M^2 ветвей, в том числе M петель. Индекс переменной D совпадает с номером состояния, в которое направлена данная ветвь.

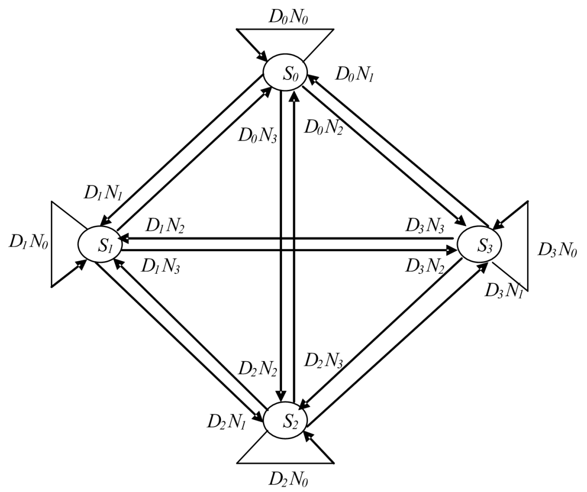

Рис. 4. *Диаграмма относительного декодера ОФМ при М=4*

Ошибка на выходе n_x равна разности $n-n_y$, поэтому индекс при переменной N определяется как разность (по модулю M) номеров данного и предыдущего состояний автомата. Например, ветвь D_1N_1 на рисунке обозначает переход из состояния S_0 в состояние S_0 при действии ошибки n на входе и появлении при этом ошибки $n_{x1}=n_1-n_{y0}$ на выходе. Символы N_0 обозначают отсутствие ошибки на выходе декодера.

Статистика ошибок на выходе декодера ОФМ сигналов может быть определена применительно к передаче информации блоками либо при непрерывной передаче (без разделения на блоки).

Статистика ошибок в каналах с ОФМ

Рассмотрим передачу информации блоками [3]. В этом случае в схеме, рис. 2, последовательность M-ичных символов на входе относительного кодера $u(D)$ подразделяется на блоки длинной n символов каждый. Неоднозначность канала $f(D)$ исключается при относительном декодировании, а оценка передаваемой последовательности состоит из блоков информационных символов $u(D)$ и ошибок $n(D)$, преобразованных относительным декодером. Под действием ошибок $n(D)$ в декодере происходит смена состояний. Последовательность состояний $S_{(t)}$ образует простую Марковскую цепь, поскольку вероятности переходов в состояния $S_{(r)}$ зависят только от предыдущих состояний $S_{(r-1)}$.

Матрица смежностей диаграммы состояний относительного декодера имеет размеры $M{\cdot}M$ элементов и может быть построена по следующим правилам. По строкам расположены номера предыдущих состояний, по столбцам – последующих. Символ N_0 содержится в элементах главной диагонали, символы $N_0, N_1, ..., N_{n-1}$ – в элементах первой строки. В остальных строках расположены циклические перестановки этой последовательности. Все элементы столбца с номером i содержат переменную D_i. Например, при M=2 матрица смежностей диаграммы имеет вид:

$$W^{(2)}=\begin{pmatrix} D_0N_0 & D_1N_1 \\ D_0N_1 & D_1N_0 \end{pmatrix}.$$

Каждую матрицу смежностей можно представить в виде суммы матриц, ненулевые элементы которых содержат переменные с определёнными индексами. Если обозначить

$$W_0^{(2)} = \begin{pmatrix} D_0N_0 & 0 \\ 0 & D_0N_0 \end{pmatrix} \text{ и } W_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & D_1N_1 \\ D_0N_1 & 0 \end{pmatrix},$$

то результирующая матрица будет $W^2=W_0^{(2)}+W_1^{(2)}$. Матрица $W_0^{(2)}$ содержит элементы безошибочных переходов N_0. Тогда $W_1^{(2)}$ – матрица переходов, содержащих ошибку вида N_1. Очевидно, что в общем случае

$$W^{(M)} = \sum_{k=0}^{M-1} W_k^{(M)}.$$

Набор всех возможных переходов за n тактов описывается n-й степенью матрицы смежностей:

$$W_{(n)}^{(M)} = [W^{(M)}]^n =$$

$$= [W_0^{(M)}]^n + \sum_{l=0}^{n-1} [W_0^{(M)}]^l W_1^{(M)} [W_0^{(M)}]^{n-l-1} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-m-2} [W_0^{(M)}]^l W_1^{(M)} [W_0^{(M)}]^m W_1^{(M)} [W_0^{(M)}]^{n-2-m} + \ldots +$$

$$+ [W_{M-1}^{(M)}]^n. \qquad (3)$$

Поскольку произведение матриц в общем случае не коммутативно, при вычислениях в формуле (3) необходимо соблюдать порядок умножения.

Первое слагаемое в этом выражении определяет набор всех безошибочных последовательностей, второе – набор последовательностей, содержащих ошибку вида N_1, третье – две ошибки вида N_1, расположенных произвольно, и т. д. Последнее определяет все последовательности, содержащие ошибку в N_{M-1} во всех символах на длине блока n.

В [3] определяется вероятность безошибочной передачи блока из символов. Матрицы переходных вероятностей марковских цепей могут быть получены из матриц смежностей, их степеней и произведений, если в каждом элементе символ ошибки D_k заменить вероятностью ошибки на входе p_k, а также положить N=1. В общем случае матрицу вероятностей одношагового перехода можно представить в виде совокупности одинаковых строк:

$$p^{(M)} = \begin{pmatrix} p_{(0)} & p_{(1)} & p_{(2)} & \cdots & p_{(M-1)} \\ p_{(0)} & p_{(1)} & p_{(2)} & \cdots & p_{(M-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{(0)} & p_{(1)} & p_{(2)} & \cdots & p_{(M-1)} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Рассматриваемые цепи Маркова являются эргодическими. Для них определены финальные вероятности пребывания дискретного автомата в состояниях $S_0, S_1, \ldots, S_{M-1}$, которые могут быть представлены в виде матрицы-строки:

$$(P^{(M)})^T = (P_{(0)}, P_{(1)}, \ldots, P_{(M-1)}), \qquad (5)$$

где T – символ транспонирования.

Финальные вероятности можно определить из решения матричного уравнения $(P^{(M)})^T = p^{(M)} (P^{(M)})^T$. Используя выражения (4) и (5), в [3] показано, что финальные вероятности совпадают с соответствующими вероятностями переходов, т. е. $P_{(k)}=p_{(k)}$, $k=1,2,\ldots,M-1$.

Матрица условных вероятностей безошибочных переходов на длине блока n:

$$(p_0^{(M)})^n = \begin{pmatrix} p_{(0)}^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_{(1)}^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_{(2)}^n & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{(M-1)}^n \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

а безусловные вероятности безошибочных переходов можно определить как произведение матриц (5) и (6):

$$(P_{N_0}^{(M)})^T = (P^{(M)})^T (P_0^{(M)})^n = (p_{(0)}^{n+1} p_{(1)}^{n+1} p_{(2)}^{n+1} \ldots p_{(M-1)}^{n+1}), \qquad (7)$$

Результирующая безусловная вероятность безошибочной передачи блока из символов по каналу с M-позиционной ОФМ определяется как сумма элементов матрицы-строки (7):

$$p_{(N_0)}^{(M)} = \sum_{k=0}^{M-1} p_{(k)}^{n+1}.$$

Вероятности ошибки на входе декодера $p_{(k)}$ определяют расположением сигнальных точек в ансамбле и шумом в канале.

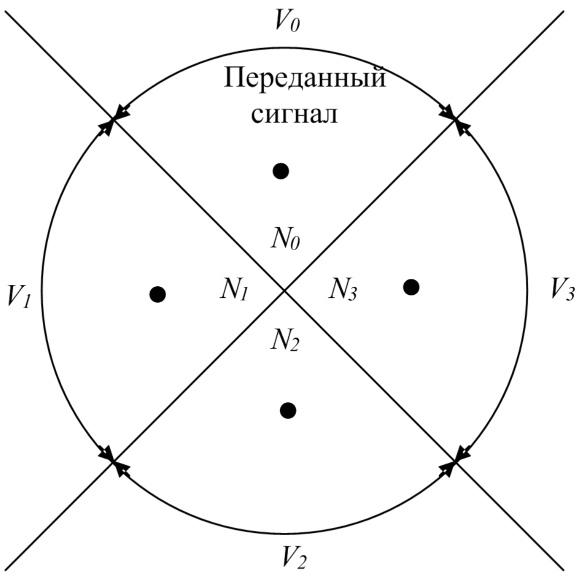

Рис. 5. *Пример расположения сигнальных точек*

На рис. 5 показано расположение сигнальных точек ансамбля ФМ4. Символ N_0 соответствует правильному приёму, т. е. расположению вектора суммы сигнала и помехи в области переданного сигнала V_0. Ошибки N_1, N_2, N_3 соответствуют расположению вектора в областях V_1, V_2, V_3. В [3] получено выражение для расчета безусловной вероятности ошибки вида N_1 в блоке символов длинны n на выходе относительного декодера:

$$P^{(M)}_{(N_1)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}[p^{l+1}_{(0)}p^{n-l}_{(1)} + p^{l+1}_{(1)}p^{n-l}_{(2)} + p^{l+1}_{(2)}p^{n-l}_{(3)} + ... + p^{l+1}_{(M-1)}p^{n-l}_{(0)}].$$

Учитывая, что области ошибок V_1 и V_3 расположены симметрично (рис. 5), их вероятности $p_{(1)}$ и $p_{(3)}$ будут одинаковы. В общем случае $p_{(k)}=p_{(M-k)}$, k=1,2,...,M/2. Вероятность однократной ошибки N_k определяется следующим образом:

$$P^{(M)}_{(N_k)} = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{n-1} p^{l+1}_{(i)} p^{n-l}_{(i+k)}.$$

В этом выражении индекс (i+k) берётся по модулю M.

В [3] показано, что вероятности ошибки N_1 при $p_{(1)}=p_{(3)}$ можно рассчитать по приближенной формуле:

$$P^{(4)}_{(N_1)} \approx 2P_{(1)}P^{n}_{(0)}.$$

Анализ проведенных выше выражений показывает, что однократные ошибки на входе декодера чаще происходят на границе блока. Однократные ошибки внутри блока маловероятны. Вместе с тем, двукратные ошибки на выходе с равной вероятностью могут происходить как на границах, так и внутри блока. Типичными являются последовательности переходов из состояния S_0 в это же состояние через два шага, причём, наиболее вероятны пары смежных ошибок. Если две ошибки в блоке разделены безошибочными символами, вероятность такой конфигурации значительно уменьшается.

В таблице приведены как точные формулы для расчёта вероятностей различных конфигураций ошибок при когерентном приёме ОФМ для числа фаз M =2, 4 и 8, так и приближённые формулы для вероятностей ошибок различной кратности t на длине блока $P(t,n)$.

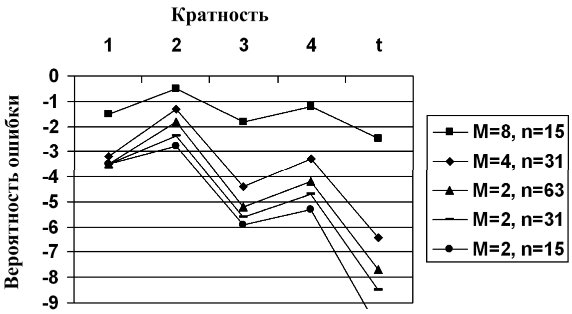

Рис. 6. *График зависимости вероятностей возникновения ошибок в канале от кратности и длины блока*

Из таблицы следует, что при малой вероятности ошибки в канале вероятности ошибок чётной кратности t всегда больше вероятностей ошибки кратностей t–1. Группирование ошибок в пары на выходе канала с ОФМ отмечалось ранее и видно из

Таблица 1. *Формулы для расчёта вероятностей различных конфигураций ошибок при когерентном приёме ОФМ*

Точные формулы	Приближённые формулы
$P(N_0) = p^{n+1}_{(0)} + p^{n+1}_{(1)};$ $P(N_1) = 2\sum_{l=0}^{n-1} p^{l+1}_{(1)} p^{n-l}_{(0)};$ $P(N_1N_1) = (n-1)[p^{n}_{(0)}p_{(1)} + p_{(0)}p^{n}_{(1)}]$	$P(1,n) = 2p_{(1)};$ $P(2,n) = (n-1)p_{(1)};$ $P(3,n) = 2(n-2)p^2_{(1)};$ $P(4,n) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}p^2_{(1)};$ $P(5,n) = (n-3)(n-4)p^3_{(1)}$
$P(N_0) = \sum_{k=0}^{3} p^{n+1}_{(k)};$ $P(N_1,N_3) = \sum_{l=0}^{n-1}\left[\begin{matrix}(p^{l+1}_{(0)}+p^{l+1}_{(2)})\cdot(p^{l-1}_{(1)}+p^{l-1}_{(3)})+ \\ +(p^{l+1}_{(1)}+p^{l+1}_{(3)})\cdot(p^{l-1}_{(0)}+p^{l-1}_{(2)})\end{matrix}\right];$ $P(N_2) = \sum_{l=0}^{n-1}\left[\begin{matrix}p^{l+1}_{(0)}p^{n-l}_{(2)} + p^{l+1}_{(1)}p^{n-l}_{(3)} + \\ +p^{l+1}_{(2)}p^{n-l}_{(0)} + p^{l+1}_{(3)}p^{n-l}_{(1)}\end{matrix}\right]$	$P(1,n) = 4p_{(1)};$ $P(2,n) = 2(n-1)p_{(1)};$ $P(3,n) = 4(n-2)p^2_{(1)}$
$P(N_0) = \sum_{k=0}^{7} p^{n+1}_{(k)};$ $P(N_1N_7) = \sum_{l=0}^{n-1}\left[\begin{matrix}p^{l+1}_{(0)}[p^{n-l}_{(1)}+p^{n-l}_{(7)}]+p^{l+1}_{(1)}[p^{n-l}_{(2)}+p^{n-l}_{(0)}]+ \\ +p^{l+1}_{(2)}[p^{n-l}_{(3)}+p^{n-l}_{(1)}]+...+p^{l+1}_{(7)}[p^{n-l}_{(0)}+p^{n-l}_{(6)}]\end{matrix}\right]$	$P(1,n) = 4p_{(1)};$ $P(2,n) = 2(n-1)p_{(1)};$ $P(3,n) = 4(n-2)p^2_{(1)}$

кривых, рис. 6, где показаны зависимости вероятностей $P(t,n)$ для M=2, 4, 8 и различной длинны блока. На этом рисунке вертикальная шкала проградуирована с шагом, кратным 10^x; $E_б/N_0$=8 дБ.

Расчет вероятности ошибки, при исключении одно- и двукратных ошибок на длине пакета

Вероятность ошибки после канального декодера изменяется от 10^{-4} до 10^{-5}, а для успешного декодирования сжатого сообщения необходимо, чтобы эта вероятность находилась в пределах от 10^{-10} до 10^{-12}. В системах с переспросом такая вероятность достигается путём автоматической повторной передачи данных.

Для решения данной проблемы при отсутствии канала обратной связи в [1] предлагается использовать контрольную проверочную последовательность (FCS). Необходимо оценить эффективность данного метода при исправлении однократных и двукратных ошибок на длине пакета.

Для оценки эффективности данного метода предлагается оценить вероятность ошибки символа, при исключении одно- и двукратных ошибок на длине пакета. Условимся, что длинной пакета будем называть количество бит между флагом начала и флагом конца, включая первый и исключая второй. Таким образом, длинна пакета будет составлять 2104 бита. Произведём расчёт для вероятности ошибки после канального декодера 10^{-5}. Событием «A» (или испытанием) будем называть приём одного бита с ошибкой. Событием «$\overline{A}$» соответственно, приём одного бита без ошибки. Тогда в качестве исходных данных имеем: $P(A)=p=10^{-5}$ (10^{-4}), или $P(\overline{A})=q=0{,}999$ (0,999). Для сравнения результатов параллельно производится расчёт для вероятности ошибки после канального декодера равной 10^{-4} (результат будет указываться в скобках). Необходимо наложить условие, что испытания независимы, и в каждом испытании вероятность наступления определённого события одна и та же. Исходя из этого, приём одного пакета сообщения будет представлять собой 2104 независимых испытания. Из теории вероятности известно, что последовательность таких испытаний называется испытаниями Бернулли. По теореме Бернулли, при произведении n независимых испытаний, в каждом из которых $P(A)=p$ – вероятность того, что событие проявит себя k раз, равна:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний без повторений.

Рассчитаем вероятность того, что пакет будет принят без ошибок. Это событие произойдёт тогда, когда в ходе 2104 испытаний возникнет следующая ситуация: «$\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$, ..., $\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$» – 2104 раза. Т. е. n=2104, k=0, получим:

$$P_{пр.}^{2104} = q^{2104} = 0{,}979\ (0{,}810). \qquad (8)$$

Следующим шагом необходимо рассчитать вероятность того, что на длине 2104 будет любая однократная ошибка – при 2104 испытаниях, событие A проявит себя 1 раз, а событие 2103 раза, т. е.: (A, $\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$, ..., $\overline{A}$, $\overline{A}$), ($\overline{A}$,A, $\overline{A}$, $\overline{A}$, ..., $\overline{A}$, $\overline{A}$), ($\overline{A}$, $\overline{A}$,A, $\overline{A}$, ..., $\overline{A}$, $\overline{A}$), ..., ($\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$, $\overline{A}$, ..., $\overline{A}$,A). Следовательно, в формуле (21) n=2104, k=1.

$$p_{1\_ош}^{2104} = C_{2104}^{1} \cdot p^1 \cdot q^{2103}.$$

Вычислив, получим: $P_{2\_ош}^{2104}$=0,021 (0,0188).

Аналогично рассчитаем вероятность того, что на длине 2104 возникнет любая двукратная ошибка, т. е. в результате испытаний событие A проявит себя 2 раза. В формуле (1) n=2104, k=2:

$$p_{2\_ош}^{2104} = C_{2104}^{2} \cdot p^2 \cdot q^{2102}.$$

Вычислив, получим $P_{2\_ош}^{2104}$=0,0002 (0,0018). Так как все три рассмотренные события независимы, то их вероятности складываются. При их сложении получается вероятность правильного приёма пакета при исправлении в нём всех однократных и всех двукратных ошибок

$$P_{пр\_обр}^{2104} = P_{пр}^{2104} + P_{1\_ош}^{2104} + P_{2\_ош}^{2104}.$$

Подставив значения, получим: $P_{пр\_обр}^{2104}$=0,999 (0,9986). Из формулы (8) для вероятности ошибки, приходящейся на один символ, зная вероятность ошибки на длине пакета, получим $P_{обр}(A)=7{,}275\cdot10^{-10}$ $(6{,}6\cdot10^{-7})$.

Из проведённого расчёта можно сделать вывод о том, что при вероятности ошибки после канального декодера 10^{-5} достаточно исправлять все одно- и двукратные ошибки для успешного декодирования сжатых сообщений. Эффективность предложенного в [1] метода очевидна. При большей вероятности ошибки необходимо применять более сложные методы локализации и исправления ошибок. Продолжение исследований предполагается в направлении разработки комплексных процедур восстановления данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибулин Н.Ф., Шкердин А.Н. Возможность исправления ошибок при использовании полиномиальной проверки // Сб. матер. научно-техн. конф. Военной Академии связи. – СПб.: НТК ВАС, 1997. – С. 142–144.
2. Петрович Н.Т. Передача дискретной информации в каналах с фазовой манипуляцией. – М.: Советское радио, 1965. – 263 с.
3. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
4. Банкет В.Л., Дощечкин А.Е., Савчук А.В. Сверточные коды, прозрачные для неоднозначности фазы в канале // Труды НИИР. – 1981. – № 3. – С. 86–94.

Поступила 05.11.2009 г.