### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев А.В., Победаш П.Н. Применение z-преобразования и дискретного принципа максимума к анализу модели реальных инвестиций // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2006. – № 4 (11). – С. 32–37.
2. Медведев А.В. Применение *z*-преобразования к исследованию многокритериальных линейных моделей регионального экономического развития. – Красноярск: Изд-во СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева, 2008. – 228 с.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.


*Поступила 24.11.2009 г.*

УДК 519.865

# ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик*

Томский государственный университет
*Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске
E-mail: kim47@mail.ru

*Получены уравнения, определяющие плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом. Найдено решение уравнений при экспоненциальном распределении поступающих в фонд премий и в случае малой нагрузки премии.*

***Ключевые слова:***
*Некоммерческий фонд, гистерезисное управление, плотность распределения капитала, малая нагрузка премии.*
***Key words:***
*Uncommercial fund, hysteresis control, distribution density of funds capital, small premium load.*

## Математическая модель изменения капитала фонда

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. К некоммерческим фондам могут быть отнесены, в частности, все государственные внебюджетные фонды РФ. Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены, например, работы [1–4]. В упомянутых работах исследование характеристик деятельности фонда проводилось в предположении, что управление капиталом фонда является релейным. В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда управление капиталом фонда является гистерезисным.

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени $t$. В работе предполагается, что с капиталом $S(t)$ могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda$. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\}=a$ и вторым моментом $M\{x^2\}=a_2$.
2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что расходование денежных средств происходит непрерывно во времени со скоростью $b(s)$, так что за время $\Delta t$ выплата составляет $b(s)\Delta t$. Предполагается, что управление расходованием денежных средств определяется следующим образом. Устанавливаются два пороговых значения капитала $S_1$ и $S_2$, причем $S_1<S_2$. В области $S(t)<S_1$ $b(s)=b_0$, в области $S(t)>S_2$ $b(s)=b_1$. Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$b_0 < \lambda a, \quad b_1 > \lambda a. \tag{1}$$

Таким образом, при $S<S_0$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем собирает, а при $S>S_0$ расходует в среднем больше средств, чем него поступает.

Что касается области $S_1 \le S \le S_2$, то здесь устанавливается $b(s)=b_0$ или $b(s)=b_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошел в эту область. Если он вошел в нее через порог $S_1$ снизу вверх, то остается $b(s)=b_0$; если же он вошел в эту область через порог $S_2$ сверху вниз, то остается $b(s)=b_1$. Таким образом, значение $b(s)=b_1$ устанавливается при достижении капиталом $S(t)$ значения $S_2$ и оканчивается при уменьшении капитала до значения $S_1$. Область $S_1 \le S \le S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении капиталом.

Наконец, будем считать, что при $S<0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

### Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(S)$ величины капитала во всех этих областях в стационарном режиме. Так как сумма поступающих премий представляет собой сложно-пуассоновский процесс [5], то процесс изменения капитала в каждой области есть сумма линейной составляющей и сложно-пуассоновского процесса. Поэтому плотность $P(S)$ существует и может иметь разрывы лишь в точках $S_1$ и $S_2$. Перенесем для удобства начало отсчета в точку $S=S_1$ и обозначим $S_0=S_2-S_1$. При этом нижний порог $S_1=0$.

Начнем с области $S<0$. В этой области плотность вероятностей $P(S)$ будем обозначать как $P_0(S)$. Рассмотрим два близких момента времени $t$ и $t+\Delta t$. За время $\Delta t$ с капиталом фонда могли произойти следующие изменения. С вероятностью $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ премии в фонд не поступали и, следовательно, капитал фонда уменьшился на величину $b_0\Delta t$. С вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ в фонд поступила случайная премия $x$, и капитал фонда увеличился на величину $x-b_0\Delta t$. Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$. Откуда по формуле полной вероятности получим

$$P_0(S)=(1-\lambda\Delta t)P_0(S+b_0\Delta t)+$$
$$+\lambda\Delta t\int_0^{\infty}P_0(S-x)\varphi(x)dx+o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, будем иметь

$$b_0\dot{P}_0(S)=\lambda P_0(S)-\lambda\int_0^{\infty}P_0(S-x)\varphi(x)dx. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) должно удовлетворять граничному условию $P_0(-\infty)=0$.

Перейдем к рассмотрению области $0\le S\le S_0$. Здесь возможны два варианта $b(s)=b_0$ и $b(s)=b_1$.

Рассмотрим сначала случай $b(s)=b_0$. Обозначим

$$g_0(S)=P\{S<S(t)\le S+dS, b(S)=b_0\}/dS.$$

В этом случае значение капитала $S$ в момент времени может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени $t$ капитал фонда равнялся $S+b_0\Delta t$, и за время $\Delta t$ премии не поступали. В момент времени $t$ капитал фонда равнялся $S+b_0\Delta t-x<0$, и за время $\Delta t$ поступила случайная премия $x$. В момент времени $t$ капитал фонда равнялся $S+b_0\Delta t-x>0$, и за время $\Delta t$ поступила случайная премия $x$. Выписывая вероятности соответствующих событий, по формуле полной вероятности получим

$$g_0(S)=(1-\lambda\Delta t)g_0(S+b_0\Delta t)+$$
$$+\lambda\Delta t\int_0^{S}g_0(S-x)\varphi(x)dx+$$
$$+\lambda\Delta t\int_S^{\infty}P_0(S-x)\varphi(x)dx+o(\Delta t). \qquad (3)$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, будем иметь

$$b_0\dot{g}_0(S)=\lambda g_0(S)-\lambda\int_0^{S}g_0(S-x)\varphi(x)dx-$$
$$-\lambda\int_S^{\infty}P_0(S-x)\varphi(x)dx. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) должно удовлетворять граничному условию $g_0(S_0)=0$, которое вытекает из того, что при $b(s)=b_0$ на эту границу возможны переходы только снизу и, следовательно, при $S=S_0$ в правой части соотношения (3) должно отсутствовать первое слагаемое.

Обозначим далее

$$g_1(S)=P\{S<S(t)\le S+dS, b(S)=b_1\}/dS.$$

Аналогично предыдущему получим, что функция $g_1(S)$ удовлетворяет уравнению

$$b_1\dot{g}_1(S)=\lambda g_1(S)-\lambda\int_0^{S}g_1(S-x)\varphi(x)dx. \qquad (5)$$

Рассмотрим, наконец, область $S>S_0$. Обозначим в этой области плотность распределения вероятностей $P(S)$ как $P_2(S)$. Функция $P_2(S)$ соответствует уравнению

$$b_1\dot{P}_2(S)=\lambda P_2(S)-\lambda\int_0^{S-S_0}P_2(S-x)\varphi(x)dx-$$
$$-\lambda\int_{S-S_0}^{S}\left[g_0(S-x)+g_1(S-x)\right]dx-$$
$$-\lambda\int_S^{\infty}P_0(S-x)\varphi(x)dx \qquad (6)$$

с граничными условиями $P_2(S_0)=g_1(S_0)$ и $P_2(\infty)=0$.

Решение системы уравнений (2), (4)–(6) должно отвечать условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{0}P_0(S)dS+\int_0^{S_0}[g_0(S)+g_1(S)]dS+\int_{S_0}^{\infty}P_2(S)dS=1 \qquad (7)$$

и условию сшивания на границе $S=0$, которое может быть получено интегрированием уравнений (2), (4)–(6) по соответствующим областям,

$$b_0P_0(0)=b_0g_0(0)+b_1g_1(0). \qquad (8)$$

### Экспоненциальное распределение страховых премий

В случае, когда распределение поступающих денежных сумм (страховых премий) является экспоненциальным

$$\varphi(S)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{S}{a}\right),$$

точное решение системы уравнений (2), (4)–(6) может быть найдено стандартным путем. Это решение после перехода к старому началу координат имеет вид

$$P(S)=\begin{cases} B\left(\dfrac{\lambda a}{b_0}-e^{-\omega_0(S_2-S_1)}\right)e^{\omega_0(S-S_1)}, & S<S_1,\\ B(1-e^{\omega_0(S-S_2)})+B\dfrac{b_0\omega_0}{b_1\omega_1}\left(1-\dfrac{\lambda a}{b_1}e^{-\omega_1(S-S_1)}\right), & \\ S_1\le S\le S_2, & \\ B\dfrac{b_0\omega_0}{b_1\omega_1}\left(e^{\omega_1(S_2-S_1)}-\dfrac{\lambda a}{b_1}\right)e^{-\omega_1(S-S_1)}, & S>S_2, \end{cases} \qquad (9)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\lambda a - b_0}{b_0 a}, \ \omega_1 = \frac{b_1 - \lambda a}{b_1 a},$$

$$B = \frac{b_1 - \lambda a}{(b_1 - b_0)(S_2 - S_1 + a)}. \qquad (10)$$

Зная плотность распределения капитала фонда, можно найти такие его характеристики, как вероятности неплатежеспособности и повышенных выплат. Неплатежеспособность фонда наступает тогда, когда его капитал становится отрицательным. Поэтому вероятность неплатежеспособности фонда

$$P_н = \int_{-\infty}^{0} P(s)ds = \frac{B}{\omega_0}\left(\frac{\lambda a}{b_0} e^{-\omega_0 S_1} - e^{-\omega_0 S_2}\right). \qquad (11)$$

Повышенные выплаты фонд производит в двух случаях. Либо когда капитал фонда $S>S_2$, либо при $S_1 \le S \le S_2$, когда траектория изменения капитала, начавшись при $S=S_2$, еще не достигла значения $S_1$. Поэтому вероятность повышенных выплат

$$P_п = \int_{S_2}^{\infty} P(s)ds + \int_{S_1}^{S_2} g_2(s)ds = \frac{\lambda a - b_0}{b_1 - b_0}. \qquad (12)$$

Как следует из соотношения (10), вероятность $P_п$ не зависит от порогов алгоритма.

### Плотность распределения капитала фонда при малой нагрузке страховой премии

При произвольном распределении страховых премий $\varphi(x)$ получить точное решение системы уравнений (2), (4)–(6) не удается. Однако, в этом случае можно построить приближенное решение уравнений при некоторых дополнительных предположениях. Введем параметр $\theta$, где $0<\theta<1$, и будем считать, что

$$b_0 = (1-\theta)\lambda a, \quad b_1 = (1+\theta)\lambda a. \qquad (13)$$

Параметр $\theta$ имеет тот же смысл, что и нагрузка страховой премии в задачах страхования [6]. Рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta<<1$. Практически это означает, что при любом значении капитала $S$ фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что пороги $S_1$ и $S_2$, определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от нагрузки $\theta$. Более точно будем считать, что при $\theta \to 0$ разность порогов $S_0(\theta)=S_2(\theta)-S_1(\theta)\to\infty$, но существует конечный предел $z_0 = \lim\limits_{\theta\to 0} \theta S_0(\theta)$. Опять перенесем начало отсчета в точку $S=S_1$ и рассмотрим область $S<0$. Решение уравнения (2) в этой области будем искать в виде

$$P_0(S) = \theta f_0(\theta S, \theta), \qquad (14)$$

где $f_0(z,\theta)$ – некоторая функция. Подставляя (12) в (2) и делая замену переменных $\theta S=z$, получим уравнение относительно функции $f_0(z,\theta)$

$$\theta b_0 \dot{f}(z,\theta) = \lambda f(z,\theta) - \lambda \int_0^\infty f_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx. \qquad (15)$$

Считая функцию $f_0(z,\theta)$ дважды дифференцируемой по $z$ и равномерно непрерывной по $\theta$, раскладывая подынтегральное выражение в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим, учитывая (13), что

$$\ddot{f}_0(z,\theta) - \omega_0 \dot{f}_0(z,\theta) + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0,$$

где $\omega_0 = \dfrac{2a}{a_2}$.

Обозначим

$$f_0(z) = \lim_{\theta\to 0} f_0(z,\theta).$$

Переходя к пределу при $\theta\to 0$, получим уравнение относительно $f_0(z)$

$$\ddot{f}_0(z) - \omega_0 \dot{f}_0(z) = 0.$$

Откуда

$$f_0(z) = A_1 + A_2 e^{\omega_0 z}.$$

С учетом граничного условия $P_0(-\infty)=0$ будем иметь, что

$$f_0(z) = A e^{\omega_0 z}, \qquad (16)$$

где константа $A$ определяется условиями сшивания.

Рассмотрим теперь область $0\le S\le S_0$. Решение уравнения (4) в этой области будем искать в виде

$$g_0(s) = \theta \psi_0(\theta s, \theta), \qquad (17)$$

где функция $\psi_0(z,\theta)$ считается дважды дифференцируемой по $z$ и равномерно непрерывной по $\theta$. Подставляя (14) и (17) в уравнение (4), получим после замены переменных $\theta S=z$

$$\theta b_0 \dot{\psi}_0(z,\theta) = \lambda \psi_0(z,\theta) - \lambda \int_0^\infty \psi_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx +$$

$$+\lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty \psi_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty f_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx.$$

Раскладывая функцию $\psi_0(z-\theta x,\theta)$ в ряд по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$\frac{a_2}{2}\ddot{\psi}_0(z,\theta) - a\dot{\psi}_0(z,\theta) +$$

$$+\frac{\lambda}{\theta^2}\int_{\frac{z}{\theta}}^\infty \psi_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx -$$

$$-\frac{\lambda}{\theta^2}\int_{\frac{z}{\theta}}^\infty f_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \qquad (18)$$

Функция $\psi_0(z,\theta)$ является дифференцируемой и, следовательно, ограниченной. Поэтому

$$\frac{1}{\theta^2}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}\psi_0(z-\theta x)\varphi(x)dx \le$$

$$\le \max_y \psi_0(y,\theta)\frac{1}{z^2}\frac{z^2}{\theta^2}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}\varphi(x)dx \le$$

$$\le \max_y \psi_0(y,\theta)\frac{1}{z^2}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}x^2\varphi(x)dx \underset{\theta\to 0}{\to} 0,$$

т. к. второй момент $M\{x^2\}=a_2$ по условию существует. Аналогично может быть оценен второй интеграл, входящий в (18).

Обозначим

$$\psi_0(z)=\lim_{\theta\to 0}\psi_0(z,\theta). \qquad (19)$$

Переходя в (18) к пределу при $\theta\to 0$, получим уравнение относительно функции $\psi_0(z)$

$$\ddot{\psi}_0(z)-\omega_0\dot{\psi}_0(z)=0. \qquad (20)$$

Откуда

$$\psi_0(z)=B_1+B_2e^{\omega_0 z}.$$

Граничное условие $g_0(S_0)=0$ дает теперь $\psi_0(z_0)=0$. Поэтому.

$$\psi_0(z)=B(1-e^{\omega_0(z-z_0)}). \qquad (21)$$

При выводе уравнения (20) неявно предполагалось, что $S\neq 0$. Пусть теперь $S=0$. Тогда из уравнения (4) получим

$$\theta b_0\dot{\psi}_0(0,\theta)=\lambda\psi_0(0,\theta)-\lambda\int_0^{\infty}f_0(-\theta x,\theta)\varphi(x)dx.$$

После предельного перехода при $\theta\to 0$ получим, что $\psi_0(0)=f_0(0)$. Откуда находим связь между константами $A$ и $B$.

$$A=B(1-e^{-\omega_0 z_0}). \qquad (22)$$

Решение уравнения (5) относительно функции $g_1(s)$ будем искать в виде.

$$g_1(s)=\theta\psi_1(\theta s,\theta). \qquad (23)$$

Функция $\psi_1(z,\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta b_1\dot{\psi}_1(z,\theta)=\lambda\psi_1(z,\theta)-\lambda\int_0^{\frac{z}{\theta}}\psi_1(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx.$$

Опять, считая функцию $\psi_1(z,\theta)$ дважды дифференцируемой по $z$ и равномерно непрерывной по $\theta$, раскладывая в уравнении подынтегральное выражение в ряд по первому аргументу и обозначая

$$\psi_1(z)=\lim_{\theta\to 0}\psi_1(z,\theta),$$

получим после предельного перехода при $\theta\to 0$ уравнение относительно $\psi_1(z)$

$$\ddot{\psi}_1(z)+\omega_0\dot{\psi}_1(z)=0,$$

решение которого имеет вид

$$\psi_1(z)=C_1+C_2e^{-\omega_0 z}.$$

Условие сшивания решений на границе $S=0$ даст теперь $\psi_1(0)=0$. Откуда $C_2=-C_1$ и

$$\psi_1(z)=C(1-e^{-\omega_0 z}). \qquad (24)$$

Рассмотрим, наконец, область $S>S_0$. В ней плотность распределения капитала фонда должна удовлетворять уравнению (6). Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$P_2(S)=\theta f_2(\theta S,\theta), \qquad (25)$$

где функция $f_2(z,\theta)$ будет, очевидно, удовлетворять уравнению

$$\theta b_1\dot{f}_2(z,\theta)=\lambda f_2(z,\theta)-\lambda\int_0^{\frac{z-z_0}{\theta}}f_2(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx-$$

$$-\lambda\int_{\frac{z-z_0}{\theta}}^{\frac{z}{\theta}}\left[\psi_0(z-\theta x,\theta)+\psi_1(z-\theta x,\theta)\right]\varphi(x)dx-$$

$$-\lambda\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}f_0(z-\theta x,\theta)\varphi(x)dx.$$

Считая функцию $f_2(z,\theta)$ дважды дифференцируемой по $z$ и равномерно непрерывной по $\theta$, разлагая подынтегральные функции в ряд по первому аргументу и переходя к пределу при $\theta\to 0$, получим уравнение относительно

$$f_2(z)=\lim_{\theta\to 0}f_2(z,\theta)$$

в области $z>z_0$, где $z_0=\lim_{\theta\to 0}\theta S_0$,

$$\ddot{f}_2(z)+\omega_0\dot{f}_2(z)=0.$$

Откуда

$$f_2(z)=D_1+D_2e^{-\omega_0 z}.$$

Граничные условия $P_2(+\infty)=0$ и $P_2(S_0)=g_1(S_0)$ дают $f_2(+\infty)=0$ и $f_2(z_0)=\psi_1(z_0)$. Откуда

$$f_2(z)=C(1-e^{-\omega_0 z_0})e^{-\omega_0(z-z_0)}. \qquad (26)$$

Для определения связи между константами $B$ и $C$ рассмотрим уравнения (4)–(6) при $S=S_0$. Из них вытекает, что при $S=S_0$ должно выполняться условие

$$b_1\dot{P}_2(S_0)=b_1\dot{g}_1(S_0)+b_0\dot{g}_0(S_0),$$

которое при $\theta\to 0$ дает

$$\dot{f}_2(z_0)=\dot{\psi}_1(z_0)+\dot{\psi}_2(z_0).$$

Откуда следует, что $C=B$. Наконец, из условия нормировки (7) при $\theta\to 0$ получим

$$\int_{-\infty}^{0}f_0(z)dz+\int_0^{z_0}[\psi_0(z)+\psi_1(z)]dz+\int_{z_0}^{+\infty}f_2(z)dz=1.$$

Откуда

$$B=\frac{1}{2z_0}. \qquad (27)$$

Учитывая теперь соотношения (14), (16), (17), (21), (23)–(26), получим, что при $\theta$<<1 плотность распределения капитала фонда $P(S)$ имеет вид (после перехода к старому началу координат)

$$P(S) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-e^{-\theta\omega_0(S_2-S_1)}}{2(S_2-S_1)} e^{\theta\omega_0(S-S_1)} + o(\theta), & S < S_1, \\ \dfrac{2-e^{-\theta\omega_0(S-S_1)} - e^{\theta\omega_0(S-S_2)}}{2(S_2-S_1)} + o(\theta), & S_1 \le S \le S_2, \\ \dfrac{1-e^{-\theta\omega_0(S_2-S_1)}}{2(S_2-S_1)} e^{\theta\omega_0(S-S_2)} + o(\theta), & S > S_2. \end{cases} \quad (28)$$

Построенная аппроксимация (28) решения системы уравнений (2), (4)–(6) может быть улучшена за счет учета дополнительных членов разложения функций $f_i(z,\theta)$ и $\psi_i(z,\theta)$ в ряд по степеням $\theta$.

### Заключение

Предложена и исследована математическая модель деятельности некоммерческого фонда при гистерезисном управлении его капиталом. Получены уравнения, определяющие плотность распределения капитала, найдено решение уравнений при экспоненциальном распределении поступающих в фонд премий и в случае малой нагрузки премии.


### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Известия вузов. Физика. – 2003. – Т. 46. – № 3. – С. 83–87.
2. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 302–308.
3. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 38–44.
4. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлением капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 302–312.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 498 с.
6. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 180 с.


*Поступила 26.10.2009 г.*

УДК 65.012.122

# ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Л.И. Самочернова

Томский политехнический университет
E-mail: am@am.tpu.ru

*Изучена однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию.*

***Ключевые слова:***
*Система, обслуживание, время ожидания, амортизация, оптимальный момент.*

***Key words:***
*System, service, queuing time, depreciation, optimal moment.*

### Введение

Задача изучения управляемых систем массового обслуживания (СМО) является актуальной, поскольку функционирование многих реальных технических систем описывается с их помощью. Большое число работ посвящено изучению систем массового обслуживания, в которых интенсивность обслуживания, моменты включения и отключения резервных приборов, зависят от длины очереди или от числа заявок в системе [1–5]. Класс СМО с управлением по времени ожидания является пока мало изученным, хотя именно такие системы являются наилучшими моделями многих реальных объектов, в частности, вычислительных систем, используемых для обработки медико-биологической информации, систем связи. Существуют лишь отдельные работы, например [6–9], в которых изучены СМО с управлением по времени ожидания.