РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа содержит 84 листа, 12 рисунков, 21 таблицу, 12 источников, 3 приложения.

Ключевые слова: валютные пары, валютные котировки, метод факторный анализ, метод максимального правдоподобия.

Объектом исследования является совокупность валютных пар: BYR/RUB; CNY/ RUB; EUR/RUB; GBP/RUB; KZT/ RUB; UAH/ RUB; USD/RUB.

Цель работы: исследование многомерного распределения валютных пар на основе факторного анализа и построение математической модели.

Для оценки многомерного распределения совокупности котировок валютных пар использовалось представление всей совокупности исходных данных в виде факторной модели.

В результате исследования показана принципиальная возможность построения факторной модели для относительных приращений котировок совокупности валютных пар. Произведена оценка распределений обобщенных и характерных факторов и на ее основе смоделировано многомерное распределение всей совокупности исходных признаков. Получено аналитическое выражение для плотностей распределений относительных приращений котировок, входящих в рассматриваемую совокупность.

Полученая модель может быть рекомендована для оценки совместного распределения соокупности валюных пар при иследовании российского и зарубежных фондовых рынков.

Апробация: основные положения работы представлены на XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. «Перспективы развития фундаментальных наук» в г.Томске 26-29 апреля 2016 г., VII Международной научно-практической конференции «Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине» в г.Томск 1-3 июня 2016 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, СОКРАЩЕНИЯ, НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной работе применены следующие термины с соответствующими определениями:

Валютная котировка: Цена одной валюты, выраженная в цене другой валюты.

Портфель ценных бумаг: Совокупность ценных бумаг, являющихся собственностью инвестора и управляемых как единое целое для достижения определенной цели.

Оптимальный портфель: набор активов, позволяющих инвестору добиться тех финансовых целей, которые он преследует.

Оглавление

Введение 4

1 Факторный анализ 7

1.1 Каноническая модель факторного анализа 8

1.2 Оценка значимости факторной модели 11

1.3 Оценивание значений факторов 13

2 Построение и анализ факторной модели 15

2.1 Оценка распределений полученных обобщенных и характерных факторов 18

3 Оценка распределений приращения котировок валютных пар 21

4 Оценка распределения доходности портфеля 24

Заключение 26

Список литературы 27

Список публикаций студента 28

Приложение 1 30

Введение

При построении эконометрических моделей значительную роль играет выбор многомерного распределения доходностей активов, лежащего в основе модели. Например, стоящая перед инвестором задача построения оптимальных портфелей может быть решена с помощью математического описания совместного распределения доходностей рыночных активов, учитывающего флуктуации рыночных факторов. [1] Таким образом, оценка совместного распределения совокупностей валютных пар является актуальной практической задачей для участников финансовых рынков.

Учитывая сложные взаимосвязи между величинами, непосредственная оценка многомерного распределения совокупности валютных пар является весьма непростой задачей, которая не может быть сведена к оценке одномерных распределений отдельных компонент (валютных пар). [2]

В настоящее время получили широкое распространение два основных подхода к оценке многомерной плотности распределения доходностей. Первый, основанный на предположении, что доходности имеют многомерное нормальное распределение. Однако, данное допущение не в полной мере отражает реальные взаимосвязи, по этому зачастую данный подход не позволяет достичь желаемой точности. Второй, основан на использовании копула-функций (копул). Копулы позволяют описать структуру зависимости между отдельными компонентами, которые могут быть представлены частными функциями распределения. Таким образом, копула-функция позволяет перейти от одномерных распределений случайных величин к совместному распределению. [3] Копула - функции в настоящее время одна из наиболее используемых на практике. Однако очень сложна для применения при анализе многомерных данных с размерностью больше двух.

В работе Пеникаса Г. И. [4] проводится сравнительный анализ применения копулярного метода и метода, основанном на предположении многомерного нормального распределения доходностей валют. Основной целью ставилось решение задачи оптимизации открытых валютных позиций в коммерческом банке, чьи потери от валютного риска не должны превышать капитал банка с заданной вероятностью. В результате исследования было показано, что совместное распределение недельных приростов курсов валют не является нормальным и лучше всего описывается копулой Гамбела. Оба подхода позволили получить допустимые результаты в рамках заданных ограничений на размер валютного риска. Однако основным выводом стало то, что копулярные модели показали себя эффективнее. Это связано как с лучшим описанием распределения, так и с тем, что при данном методе фактическая доходность всегда оказывалась выше.

В данной работе предлагается использовать для оценки многомерного распределения совокупности котировок валютных пар представление всей совокупности в виде факторной модели, в которой каждая исходная компонента выражена в виде линейной комбинации обобщенных и характерных факторов, некоррелированных между собой. При этом связи между исходными компонентами полностью определяются обобщенными факторами, а вариация каждого компонента определяется как обобщенными, так и соответствующим характерным фактором. Если знать законы распределения обобщенных и характерных факторов, то в силу независимости последних можно получить закон распределения каждой исходной компоненты, не находя совместного распределения компонент. В то же время, такой подход позволит оценить распределения величин, зависящих от данных. [5] Например, распределение стоимости портфеля, состоящего из валютных пар, зависящее от их многомерного распределения. То есть, решать практически любые задачи, требующие знания многомерного распределения всей совокупности данных, не находя этого распределения. Хотя, при необходимости, распределение всей совокупности на основе построенной модели может быть найдено, например, методом Монте-Карло.

Целью данной работы является исследование многомерного распределения относительных приращений котировок совокупности валютных пар на основе факторной модели.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. построить факторную модель распределения совокупности относительных приращений котировок валютных пар и оценить уровень значимости полученной модели;
2. произвести оценку распределений обобщенных и характерных факторов;
3. получить аналитическое представление для оценок распределений относительных приращений котировок валютных пар;
4. смоделировать многомерное распределение всей совокупности исходных признаков;
5. получить закон распределения доходностей портфеля, составленного из валютных пар, входящих в рассматриваемую совокупность.

В качестве предмета анализа были выбраны 7 валютных пар (BYR/RUB; CNY/RUB; EUR/RUB; GBP/RUB; KZT/RUB; UAH/RUB; USD/RUB) за период с 12 января 2015 года по 13 октября 2015 года.

1 Факторный анализ

Факторный анализ – один из наиболее популярных многомерных статистических методов. Основаный на класификации признаков (переменных), описывающих наблюдения. Поэтому главная цель факторного анализа – сокращение числа переменных на основе классификация переменных и определения структуры взаимосвязей между ними.

В факторном анализе исходят из предположения о том, что каждый из исходных признаков ξ_j, $j=\overline{1,k}$ может быть представлен в виде суммы линейной комбинации небольшого числа латентных (скрытых) общих факторов $f^{(1)}, f^{(2)},\ldots, f^{(m)}$ и характерного фактора ε_j. При этом считается, что каждый общий фактор имеет существенное значение для анализа всех исходных признаков. В то же время изменения в характерном факторе ε_j воздействуют на значения только соответствующего признака ξ_j. То есть, характерный фактор ε_j отражает ту специфику признака ξ_j, которая не может быть выражена через общие факторы. Таким образом, в основе данного метода факторного анализа лежит модель вида:

$$\xi_j = \alpha_j^{(1)} f^{(1)} + \alpha_j^{(2)} f^{(2)} + \ldots + \alpha_j^{(m)} f^{(m)} + \varepsilon_j,\ j=\overline{1,k},$$

или в векторной форме:

$$\vec{\xi} = \vec{\alpha}^{(1)} f^{(1)} + \vec{\alpha}^{(2)} f^{(2)} + \ldots + \vec{\alpha}^{(m)} f^{(m)} + \vec{\varepsilon} = \alpha \vec{f} + \vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ – вектор исходных признаков (факторов);

$\vec{f} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)})$ – вектор латентных (обобщенных) факторов, $m<k$;

$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(m)}$ – векторы факторных нагрузок;

$\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(m)})$ – матрица факторных нагрузок;

$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ – вектор характерных факторов.

В ходе факторного анализа необходимо оценить минимальное число факторов, определить векторы факторных нагрузок, и вычислить значения факторов для каждого наблюдаемого объекта. Поскольку число обобщенных факторов предполагается существенно меньше числа исходных признаков, данная задача не имеет однозначного решения. В зависимости от того, какие условия накладываются на обобщенные факторы, существуют различные модели и методы факторного анализа. Можно выделить два основных подхода к построению факторных моделей. В первом случае обобщенные факторы должны выделять большую часть суммарной дисперсии исходных факторов, во втором - обобщенные факторы должны наилучшим образом описывать ковариацию между исходными факторами. [6] Первый подход основан на выделении главных компонент, и, соответственно, называется методом главных компонент. Методы, базирующиеся на втором подходе, принято называть методами факторного анализа (или методами канонического факторного анализа).

1.1 Каноническая модель факторного анализа

В канонической модели факторного анализа предполагается, что для ковариаций и дисперсий исходных признаков справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum\limits_{s=1}^{m} \alpha_{si}\alpha_{sj}, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \quad i \neq j \\ D(\xi_i) = \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\alpha_{si}\right)^2 + D(\varepsilon_i), \quad i = \overline{1,k} \end{cases}.$$

Для того чтобы матрица факторных нагрузок определялась однозначно, на нее накладывается дополнительное условие: $\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha = J$, где J – диагональная матрица с упорядоченными по убыванию диагональными элементами.

Количество условий наложенных на параметры равно $k(k+1)/2 + m(m-1)/2$, а число неизвестных параметров матрицы факторных нагрузок и матрицы характерных факторов равно $k(m+1)$. Чтобы задача являлась статистически значимой, максимальное число параметров для данной модели должно удовлетворять условию

$$k(k+1)/2+m(m-1)/2 \geq k(m+1)$$

или

$$(k-m)^2 > (k+m)$$

Например, при $k=5, k=6$ получаем, что $m<3$.

Применим для нахождения оценок матрицы факторных нагрузок и дисперсионной матрицы характерных факторов метод максимального правдоподобия [4]. Функция правдоподобия для выборки X имеет вид:

$$\Psi = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |A|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \vec{X}^{(i)T} A^{-1} \vec{X}^{(i)} \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{nk}{2}} |A|^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)T} A^{-1} \vec{X}^{(i)} \right]$$

Здесь

$$\vec{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_k^{(i)})^T, \quad i=\overline{1,n_1}$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$L = C - \frac{n}{2}\ln|A| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)T} A^{-1} \vec{X}^{(i)} = C - \frac{n}{2}\ln|A| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} X_j^{(i)} a_{jl}^{-1} X_l^{(i)} =$$

$$= C - \frac{n}{2}\ln|A| - \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} \bar{a}_{jl} a_{jl}^{-1}$$

где $\bar{a}_{ij}$ – элементы выборочной матрицы ковариаций $\bar{A}$, a_{ij}^{-1} – элементы матрицы, обратной к матрице ковариаций A.

Или:

$$L = C - \frac{n}{2}\ln|A| - \frac{n}{2} Sp(\bar{A}A^{-1}) = C - \frac{n}{2}\ln|\alpha\alpha^T + \Sigma| - \frac{n}{2} Sp(\bar{A}(\alpha\alpha^T + \Sigma)^{-1}).$$

Для поиска оценок величин $\alpha_i^{(j)},\quad i=\overline{1,k},\quad j=\overline{1,m}$ и $v_i,\quad i=\overline{1,k}$ дифференцируем L по $\alpha_i^{(j)}$, v_i и приравниваем полученные производные к нулю. Таким образом, получаем уравнения для оценок:

$$diag\left(\hat{A}-\bar{A}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \bar{a}_{ii}=\sum_{s=1}^{m}\left(\hat{\alpha}_i^{(s)}\right)^2+\hat{v}_i,\quad i=\overline{1,k}$$

$$\hat{\alpha}\hat{J}=(\bar{A}-\hat{\Sigma})\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha}$$

Поскольку J диагональная матрица, то из уравнения для оценок вытекает, что оценки векторов факторных нагрузок $\vec{\alpha}^{(i)}$ должны являться собственными векторами матрицы $(\bar{A}-\hat{\Sigma})\hat{\Sigma}^{-1}$, удовлетворяющими условию:

$$\vec{\alpha}^{(i)T}\hat{\Sigma}^{-1}\vec{\alpha}^{(i)}=\lambda_i.$$

При заданном числе факторов m итерационная процедура решения системы

$$\begin{cases}\hat{\alpha}\hat{J}=(\bar{A}-\hat{\Sigma})\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha})\\ \bar{A}=\hat{\alpha}\hat{\alpha}^T+\hat{\Sigma}\end{cases}$$

может быть построена следующим образом (для упрощения записи дальнейшем знаки оценок для α, Σ, J опущены):

Задаемся начальным приближением Σ_0 для Σ. Можно взять, например, в качестве диагональных элементов Σ_0 величины $(1-r(i))\bar{D}_i$, где $r(i)$ наибольшая выборочная корреляция для i-го признака. Далее находим m собственных чисел и собственных векторов матрицы, $(\bar{A}-\Sigma)\Sigma^{-1}$ упорядоченных по убыванию собственных чисел, нормируем их и, соответственно, получаем первое приближение для матицы факторных нагрузок α. Далее находим следующее приближение для Σ: $\Sigma_1=\bar{A}-\alpha\alpha^T$ и процесс повторяется. Итерационный процесс заканчивают, когда очередное приближение матрицы Σ мало отличается от предыдущего, то есть, если $\left\|\Sigma_i-\Sigma_{i-1}\right\|<\varepsilon$, где ε - заранее заданное число. В качестве нормы можно использовать, например, разность следов матриц.

1.2 Оценка значимости факторной модели

Гипотезу о возможности представления исходного вектора признаков с помощью модели факторного анализа с числом факторов равным m можно проверить (в предположении нормальности распределения исходных факторов), используя следующую статистику:

$$\eta = -\left(n - \frac{1}{6}(2k+5) - \frac{2}{3}m \right)\left(\ln \frac{|\bar{A}|}{|\alpha^T \alpha + \Sigma|} - Sp(A(\alpha^T \alpha + \Sigma)^{-1} + k \right).$$

При истинности гипотезы H_0: допустимо представление исходных признаков в виде m – факторной модели, статистика приближенно имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $\nu = \frac{1}{2}((k-m)^2 - (k+m))$.

Метод максимального правдоподобия предполагает нормальное распределение исходных данных, поэтому в случае произвольного распределения он не гарантирует независимость найденных обобщенных и характерных факторов. Проверка на независимость можно произвести с помошью критерия независимости Пирсона.

Пусть имеется выборка $(\vec{X}, \vec{Y}) = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)\}$ из генеральной совокупности двух наблюдаемых совместно величин ξ и η. Проверяется гипотеза H_0: ξ и η независимы.

Наблюдаемая область значений величин ξ и η разбивается на q и m интервалов соответственно:

$$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \ldots, (\tilde{x}_{q-1}, \tilde{x}_q),\ (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2), \ldots, (\tilde{y}_{m-1}, \tilde{y}_m).$$

n_{ij} - число пар (X_s, Y_s), где $X_s \in (\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i)$, а $Y_s \in (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j)$, $\nu_j = \sum_{i=1}^{q} n_{ij}$, $\mu_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$.

Интервалы	$(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$	$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$	$\dots$	$(\tilde{y}_{m-1}, \tilde{y}_m)$	$\mu_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$
$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	μ_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(\tilde{x}_{q-1}, \tilde{x}_q)$	n_{q1}	n_{q2}	$\dots$	n_{qm}	μ_q
$\nu_j = \sum_{i=1}^{q} n_{ij}$	ν_1	ν_2	$\dots$	ν_m	n

Вероятность $p_i^x = P(\xi \in (\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i))$, $p_j^y = P(\eta \in (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j))$. Если H_0 верна, то вероятность попадания пары (ξ, η) в область $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i) \times (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j)$ равна произведению вероятностей p_i^x и p_j^y: $P((\xi, \eta) \in (\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i) \times (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j)) = p_i^x \cdot p_j^y$. Таким образом, n_{ij} есть наблюдаемое значение для каждой из областей, $n \cdot p_i^x \cdot p_j^y$ ожидаемое значение при истинности H_0. Поскольку вероятности p_i^x и p_j^y неизвестны, заменим их оценками $\hat{p}_i^x = \frac{\mu_i}{n}$, $\hat{p}_j^y = \frac{\nu_j}{n}$, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,m}$ соответственно статистика имеет вид:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_{ij} - n\frac{\mu_i}{n}\frac{\nu_j}{n}\right)^2}{n\frac{\mu_i}{n}\frac{\nu_j}{n}} = n\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_{ij} - \frac{\mu_i \nu_j}{n}\right)^2}{\mu_i \nu_j} = n\left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{n_{ij}^2}{\mu_i \nu_j}\right) - 1\right).$$

Данная статистика характеризует сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений n_{ij} от ожидаемых по всем ячейкам. В соответствии с теоремой Пирсона, при истинности H_0 данная статистика стремится к распределению χ^2 с $\nu = qm - 1 - (k + m - 2) = (q-1)(m-1)$ числом степеней свободы (число оцениваемых неизвестных параметров равно $k + m - 2$, поскольку оценки связаны соотношениями $\hat{p}_1^x + \hat{p}_2^x + \dots \hat{p}_q^x = 1$, $\hat{p}_1^y + \hat{p}_2^y + \dots \hat{p}_m^y = 1$).

Таким образом, критерий независимости χ^2 Пирсона будет иметь вид:

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} H_0, & \chi^2_{набл} < \tau_{1-\alpha} \\ H_1, & \chi^2_{набл} \geq \tau_{1-\alpha} \end{cases}, \qquad \chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{n_{ij}^2}{\mu_i \nu_j} \right) - 1 \right),$$

где $\tau_{1-\alpha}$ - квантиль распределения $\chi^2_{(q-1)(m-1)}$.

1.3 Оценивание значений факторов

После того как найдены оценки параметров факторной модели, как правило, необходимо вычислить оценки значений обобщенных факторов для каждого наблюдения. Эти значения могут быть использованы, например, в задачах классификации или в задачах регрессионного анализа.

Для оценивания значений факторов канонической модели факторного анализа используют либо метод Бартлетта, либо метод Томпсона.

Согласно методу Бартлетта модель для каждого наблюдения $X^{(i)}, i = \overline{1,n}$ рассматривается как регрессия величины $X^{(i)}$ на факторы $\alpha^{(j)}, j = \overline{1,m}$ с неизвестными коэффициентами $f_i^{(j)}$:

$$X^{(i)} = f_i^{(1)} \alpha^{(1)} + f_i^{(2)} \alpha^{(2)} + \ldots + f_i^{(m)} \alpha^{(m)} + \varepsilon.$$

Соответственно для значения $X_j^{(i)}$ признака ξ_j в i-ом наблюдении справедливо:

$$X_j^{(i)} = f_i^{(1)} \alpha_j^{(1)} + f_i^{(2)} \alpha_j^{(2)} + \ldots + f_i^{(m)} \alpha_j^{(1)} + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1,k}.$$

Заметим, что наблюдения неравноточные, характерные факторы в общем случае имеют различные дисперсии $D(\varepsilon_j) = \nu_j$. Следовательно, для оценки факторов следует применять обобщенный метод наименьших квадратов, согласно которому:

$$\hat{f}_i = (\hat{f}_i^{(1)}, \hat{f}_i^{(2)}, \ldots, \hat{f}_i^{(m)})^T = (\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha)^{-1} \alpha^T \Sigma^{-1} X^{(i)T}.$$

Последнее выражение удобнее переписать в виде:

$$\hat{f}_i^T = X^{(i)} \Sigma^{-1} \alpha (\alpha^T \Sigma^{-1} \alpha)^{-1},$$

тогда матрица оценок значений факторов:

$$\hat{F} = X\Sigma^{-1}\alpha(\alpha^T\Sigma^{-1}\alpha)^{-1}.$$

В методе Томпсона, исходят из того, что оценки обобщенных факторов есть линейная комбинация исходных признаков, коэффициенты которой определяются из условия минимума среднеквадратичного отклонения оценки от фактора, то есть:

$$\hat{f}^{(j)} = \beta^{(j)T}\xi = \xi^T\beta^{(j)} = \beta_1^{(j)}\xi_1 + \beta_2^{(j)}\xi_2 + \ldots + \beta_k^{(j)}\xi_k, \quad j = \overline{1,m},$$

где вектор коэффициентов удовлетворяет условию:

$$M(f^{(j)} - \hat{f}^{(j)})^2 \to \min.$$

Таким образом, коэффициенты $\beta_i^{(j)}, i = \overline{1,k}$ является коэффициентами линейной регрессии и могут быть выражены через ковариации величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и $f^{(j)}$:

$$\beta^{(j)} = A^{-1}(\xi)M(f^{(j)} \cdot \xi),$$

здесь: A – матрица ковариаций величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, $M(f^{(j)} \cdot \xi)$ – вектор ковариаций величины $f^{(j)}$ и величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$.

Соответственно

$$\hat{f}^{(j)} = \xi^T A^{-1}(\xi)M(f^{(j)} \cdot \xi).$$

Учитывая, что для канонической модели факторного анализа $A(\xi) = \alpha\alpha^T + \Sigma$ и $M(f^{(j)} \cdot \xi) = \alpha^{(j)}$ получим следующую оценку для $\hat{f}^{(j)}$:

$$\tilde{f}^{(j)} = \xi^T(\alpha\alpha^T + \Sigma)^{-1}\alpha^{(j)}.$$

Соответственно оценка для вектора обобщенных факторов:

$$\tilde{f}^T = \xi^T(\alpha\alpha^T + \Sigma)^{-1}\alpha.$$

Пусть X матрица значений исходных признаков размеров $n \times k$, F – матрица оценок значений обобщенных факторов размеров $n \times m$, тогда:

$\tilde{F} = X(\alpha\alpha^T + \Sigma)^{-1}\alpha.$

2 Построение и анализ факторной модели

В ходе факторного анализа необходимо было оценить число обобщенных факторов, при которых возможно представление исходных данных в виде описанной выше факторной модели, а также определить векторы факторных нагрузок и значения факторов для каждого исходного наблюдения. Используя метод максимального правдоподобия, реализованный в математическом пакете Wolfram Mathematica (Приложение 1), были построены одно и двухфакторные модели. В таблице 1 приведены достигнутые уровни значимости, а также доли суммарной дисперсии, объясняемой обобщенными факторами для построенных одно и двухфакторных моделей.

Таблица 1. Результаты факторного анализа

Количество факторов	1	2
Выделенная дисперсия	18,90%	25,50%
Уровень значимости	$1{,}094 \times 10^{-6}$	0,327
Значение статистики χ^2	56,26	9,18

Видим, что допустимо представление исходных данных в виде двухфакторной модели, однако заметим, при этом, что обобщенные факторы объясняют лишь четверть суммарной дисперсии. В таблице 2 показано распределение дисперсий исходных признаков по обобщенным и характерным факторам для полученной двухфакторной модели.

Таблица 2. Распределение доли дисперсий исходных признаков по обобщенным и характерным факторам

	Обобщенные факторы			Характерный фактор
	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(1)}+f^{(2)}$	
BYR/RUB	0,215	0,09	0,305	0,695
CNY/ RUB	0,426	0,26	0,686	0,314
EUR/RUB	0,877	0,015	0,892	0,108
GBP/RUB	0,230	0,001	0,231	0,769
KZT/ RUB	0,022	0,081	0,103	0,897
UAH/ RUB	0,036	0,002	0,038	0,962
USD/RUB	0,670	0,012	0,682	0,318

Метод максимального правдоподобия предполагает нормальное распределение исходных данных, в случае произвольного распределения он не гарантирует независимость обобщенных и характерных факторов. Поэтому проведем анализ попарной независимости, используя критерий независимости *Хи*-квадрат. Результаты проведенного анализа (полученный уровень значимости) представлены в таблице 3.

Таблица 3. Уровени значимости для критериев попарной независимости

	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
$f^{(1)}$		0,781	0,034	0,239	0,631	0,557	0,658	0,364	0,593
$f^{(2)}$			0,156	0,338	0,782	0,946	0,001	0,779	0,929
ε_1				0,255	0,156	0,951	0,726	0,391	0,661
ε_2					0,683	0,396	0,012	0,570	0,613
ε_3						0,320	0,407	0,845	0,035
ε_4							0,286	0,836	0,479
ε_5								0,836	0,387
ε_6									0,576

Как видно, в большинстве случаев может быть принята гипотеза о независимости факторов, поэтому можно считать, что обобщенные и характерные факторы независимые величины и применение факторной модели оправдано.

Таким образом, было показано, что возможно представление каждого из исходных факторов в виде линейной комбинации независимых величин (двух обобщенных и характерного фактора). Соответственно, многомерное распределение исходных признаков будет полностью определяться распределениями этих величин, и задача оценивания многомерного распределения может быть сведена к оценке распределений полученных обобщенных и характерных факторов.

Заметим, что обобщенные факторы практически не влияют на пары KZT/ RUB и UAH/ RUB. Это означает, что в рамках рассматриваемой модели поведение этих пар не связано с остальными. Поэтому в дальнейшем анализе совокупность валютных пар была сокращена до пяти валютных пар (BYR/RUB, CNY/ RUB, EUR/RUB, GBP/RUB, USD/RUB). Векторы факторных нагрузок для скорректированной модели приведены в таблице 4, а выделенные дисперсии обобщеными и характерными факторами в таблице 5.

Таблица 4. Координаты векторов факторных нагрузок

	BYR/RUB	**CNY/ RUB**	**EUR/RUB**	**GBP/RUB**	**USD/RUB**
α_1	-0,0118	-0,0125	-0,0158	-0,0102	-0,0127
α_2	-0,0155	-0,0040	0,0024	-0,0013	0,0018

Таблица 5. Выделенная дисперсия обобщенными и характерными факторами (%)

	Обобщенные факторы			**Характерный фактор**
	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(1)}+f^{(2)}$	
Все пары	42,71	13,99	56,70	
BYR/RUB	26,93	46,02	72,95	27,05
CNY/ RUB	37,58	3,85	41,43	58,57
EUR/RUB	87,61	1,96	89,57	10,43
GBP/RUB	23,81	0,41	24,22	75,78
USD/RUB	66,01	1,36	67,37	32,63

2.1 Оценка распределений полученных обобщенных и характерных факторов

Проведенный статистический анализ выборочных распределений обобщенных и характерных факторов показал, что как обобщенные, так и характерные факторы можно рассматривать, как случайные величины, распределенные по закону Лапласа с плотностью:

$$f(x) = 0,5ae^{-a|x|},$$

где $a > 0$ – параметр распределения.

На рисунках 1 и 2 представлены гистограммы выборочных распределений обобщенных факторов в сравнении с кривыми плотности нормального распределения и распределения Лапласа. А в таблице 6 приведены результаты тестов проверки гипотез о распределении каждого из факторов по закону Лапласа (в качестве оценок неизвестных параметров a были использованы оценки метода максимального правдоподобия: $a^* = 1/|\overline{X}|$, $\overline{X}$ - соответствующее выборочное среднее).

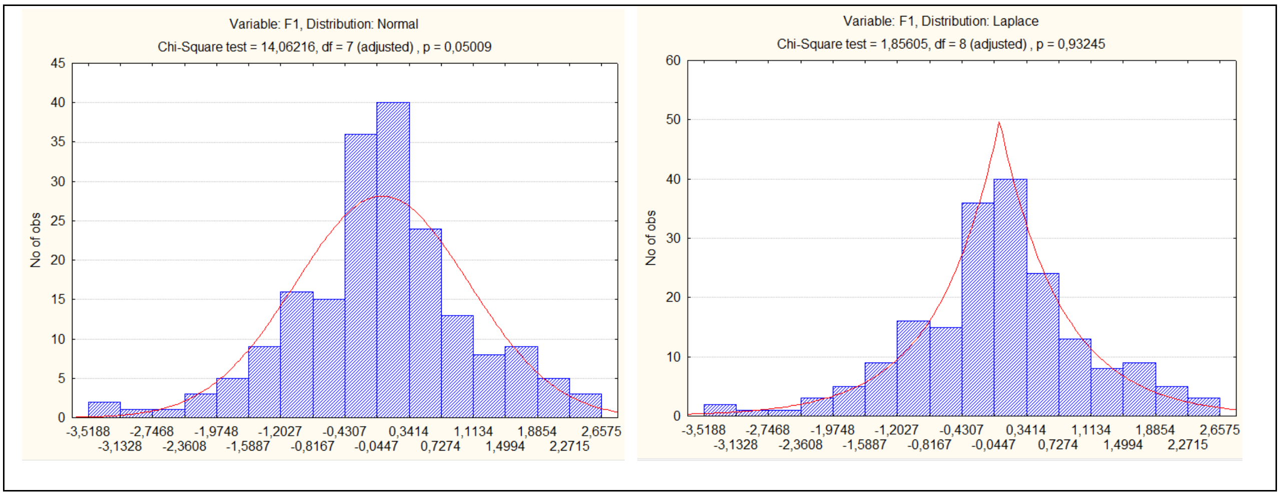

Рис.1 Оценка закона распределения для обобщенного фактора $f^{(1)}$.

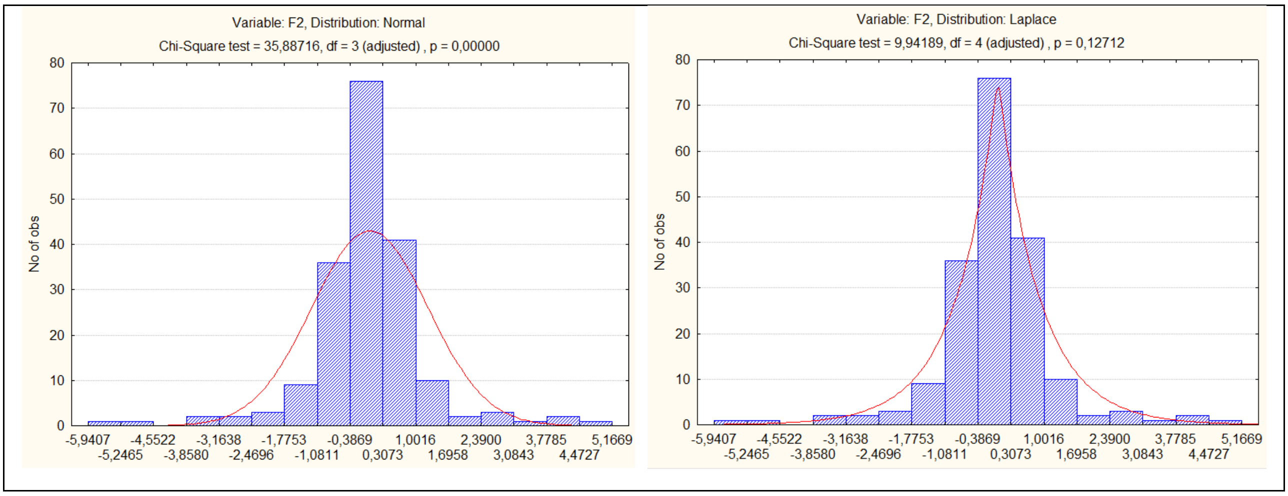

Рис.1 Оценка закона распределения для обобщенного фактора $f^{(2)}$.

Таблица 6. Оценки параметра a распределения Лапласа и уровень значимости p для обобщенных и характерных факторов

Фактор	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
Оценка параметра a	1,30	1,39	580	134	478	89	156
Уровень значимости p	0,93	0,13	0,78	0,09	0,37	0,36	0,28

Оценка многомерного распределения всей совокупности признаков может быть найдена, например, численно, используя метод Монте-Карло. Генерируем значения обобщенных и характерных факторов по закону

Лапласа и, используя факторное представление, получаем значения исходных признаков, на основе которых и оцениваем с заданной точностью многомерное распределение. На рисунке 3 приведено, в качестве примера, полученное в результате моделирования двухмерное распределение валютных пар EUR/RUB и USD/RUB.

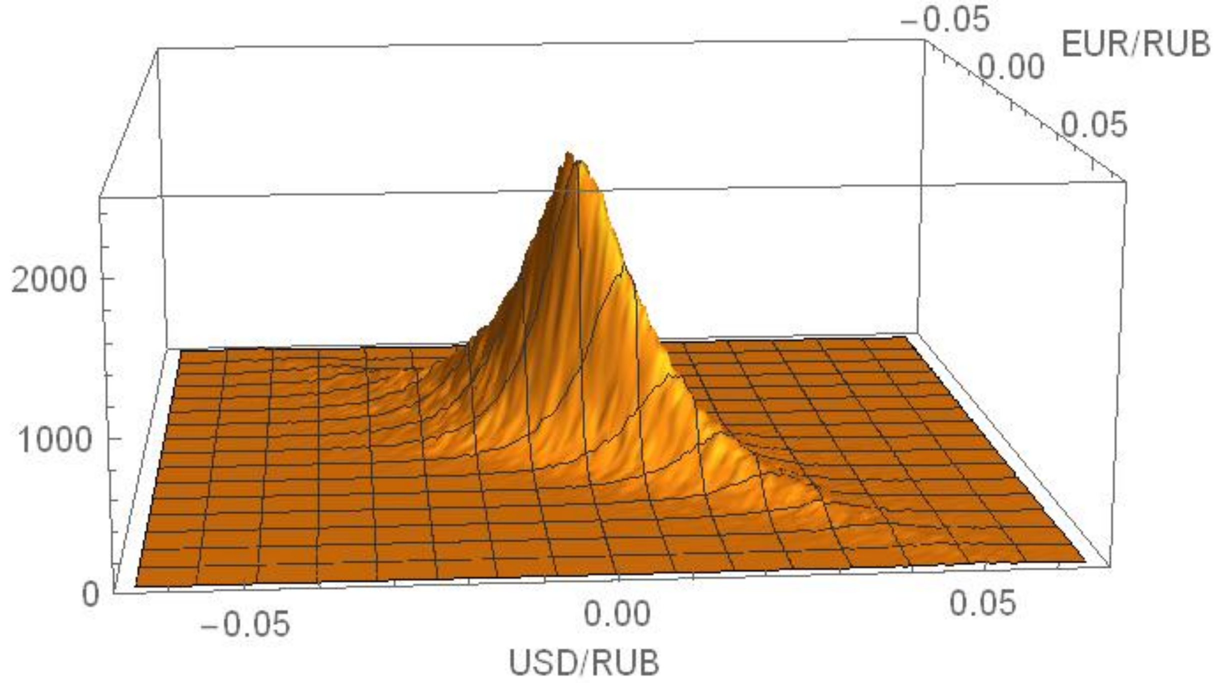

Рис. 3 – Оценка плотности распределения приращений котировок валютных пар EUR/RUB и USD/RUB.

Таким образом, можно смоделировать многомерное распределение всей совокупности исходных признаков.

3 Оценка распределений приращения котировок валютных пар

Поскольку распределение Лапласа можно условно считать устойчивым по суммированию, в соответствии с построенной факторной моделью:

$$\xi_j = \alpha_j^{(1)} f^{(1)} + \alpha_j^{(2)} f^{(2)} + \varepsilon_j, \ j = \overline{1,k},$$

появляется возможность для единообразного аналитического описания плотностей всех компонент ξ_j, $j = \overline{1,5}$. Кроме того, данное выражение неявно, через обобщенные факторы, учитывает связи между всеми компонентами, что важно для многомерного моделирования этих компонент. Представление в виде факторной модели является симметричным, однако, введя параметры сдвига для факторов, можно построить модель, учитывающие асимметрию распределений компонент.

Основываясь на представлении в виде факторной модели, получено аналитическое представление для функций плотностей величин ξ_j, $j = \overline{1,5}$. Как обобщенные, так и характерные факторы имеют распределение Лапласа с параметрами a_1, a_2 и $\theta_1 \div \theta_7$ соответственно. Тогда, характеристическая функция распределения Лапласа с параметром a имеет вид:

$$g(t) = \frac{a^2}{a^2 + t^2}.$$

Используя основные свойства характеристической функции:

$$g_{a\xi}(t) = g_{\xi}(at), \ g_{\xi+\eta}(t) = g_{\xi}(t) g_{\eta}(t),$$

где ξ, η - независимые величины, $a = const$,

получено представдение характеристической функции величины ξ_j:

$$g_{\xi_j}(t) = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha_{1j}^2 t^2} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha_{2j}^2 t^2} \cdot \frac{\theta_j^2}{\theta_j^2 + t^2} = \frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2 + t^2} \cdot \frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2 + t^2} \cdot \frac{\theta_j^2}{\theta_j^2 + t^2},$$

где $\nu_{ij} = a_i / |\alpha_{ij}|, i = 1,2$.

С помощью обратного преобразования Фурье найдена плотность распределения величины ξ_j:

$$f_{\xi_j}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\xi_j}(t)e^{-ixt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2+t^2}\cdot\frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2+t^2}\cdot\frac{\theta_j^2}{\theta_j^2+t^2}e^{-ixt}dt\,.$$

Интеграл вычислен с использованием теории вычетов:

$$f_{\xi_j}(x)=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname*{Res}_{t=i\nu_{1j}} g_{\xi_j}(t)e^{-ixt}+\operatorname*{Res}_{t=i\nu_{2j}} g_{\xi_j}(t)e^{-ixt}+\operatorname*{Res}_{t=i\theta_j} g_{\xi_j}(t)e^{-ixt}\right] \text{ (для } x<0\text{)}.$$

В результате плотность распределения величины ξ_j имеет вид:

$$f_{\xi_j}(x)=\frac{1}{2}\left[\nu_{1j}\cdot\frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2-\nu_{1j}^2}\cdot\frac{\theta_j^2}{\theta_j^2-\nu_{1j}^2}\cdot e^{\nu_{1j}x}+\right.$$
$$\left.+\nu_{2j}\cdot\frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2-\nu_{2j}^2}\cdot\frac{\theta_j^2}{\theta_j^2-\nu_{2j}^2}\cdot e^{\nu_{2j}x}+\theta_j\cdot\frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2-\theta_j^2}\cdot\frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2-\theta_j^2}\cdot e^{\theta_j x}\right],\quad x<0\,.$$

Для произвольного $x\in R$, с учетом симметрии распределения, аналитическое представление для функций плотностей величин ξ_j имеет вид:

$$f_{\xi_j}(x)=\frac{1}{2}\left[\nu_{1j}\cdot\frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2-\nu_{1j}^2}\cdot\frac{\theta_j^2}{\theta_j^2-\nu_{1j}^2}\cdot e^{-\nu_{1j}|x|}+\right.$$
$$\left.+\nu_{2j}\cdot\frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2-\nu_{2j}^2}\cdot\frac{\theta_j^2}{\theta_j^2-\nu_{2j}^2}\cdot e^{-\nu_{2j}|x|}+\theta_j\cdot\frac{\nu_{1j}^2}{\nu_{1j}^2-\theta_j^2}\cdot\frac{\nu_{2j}^2}{\nu_{2j}^2-\theta_j^2}\cdot e^{-\theta_j|x|}\right],\quad x\in R\,.$$

Чтобы получить плотности распределений для величин ξ_j, с $M(\xi_j)=m_j\neq 0$, достаточно в правой части полученной формулы вместо x положить: $x-m_j$.

Функция распределения величины ξ_j найдена, как интеграл от плотности:

$$F_{\xi_j}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{\xi_j}(z)dz\,.$$

Заметим, что для функции распределения можно также получить аналитическое выражение.

На рисунке 4 – 8 приведены гистограммы выборочных распределений относительных приращений котировок (для центрированных данных) в сравнении с графиками расчетных плотностей, а также указаны соответствующие уровни значимости по критерию *хи*-квадрат.

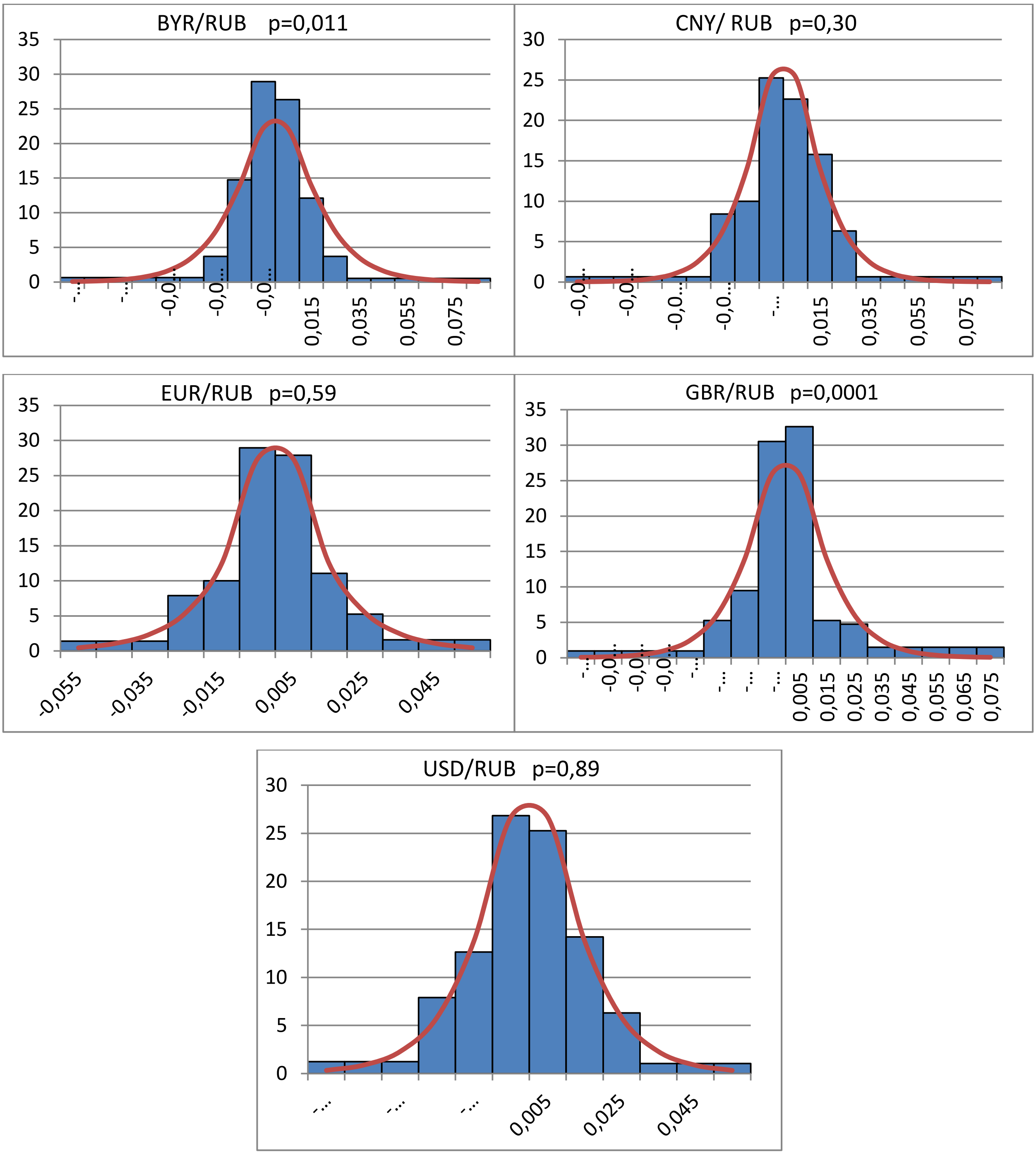

Рис. 4 – 8 - гистограммы выборочных распределений относительных приращений котировок в сравнении с графиками расчетных плотностей.

4 Оценка распределения доходности портфеля

Главная цель формирования портфеля валютных пар состоит в стремлении получить требуемый уровень ожидаемой доходности при более низком уровне ожидаемого риска.

Доходность портфеля рассчитывается как взвешенная сумма доходностей отдельных видов валютных пар.

$r = \sum_{j=1}^{m} w_j r_j$ - доходность портфеля, состоящего из m валютных пар с доходностями r_j и долями w_j, причем для компонент портфеля справедлива следующая факторная модель:

$$r_j - \overline{r}_j = \alpha_{1j} f_1 + \alpha_{2j} f_2 + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1,m},$$

где: $\overline{r_j}$ - средние значения доходностей валютных пар,

f_1, f_2 - обобщенные факторы,

α_1, α_2 - векторы факторных нагрузок,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ - характерные факторы.

Тогда для доходности r портфеля будет справедливо:

$$r = \sum_{j=1}^{m} w_j r_j = \sum_{j=1}^{m} w_j \overline{r}_j + \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\zeta_1 + \alpha_{2j}\zeta_2 + \varepsilon_j) = \overline{r} + \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\zeta_1 + \alpha_{2j}\zeta_2 + \varepsilon_j)$$

и

$$r - \overline{r} == \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \zeta_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \varepsilon_j ,$$

где: $\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_{j_i}$ $i = \overline{1,2}$, $\overline{r}$ - средняя доходность портфеля.

Пусть как обобщенные, так и характерные факторы независимы и имеют распределение Лапласа с параметрами a_1, a_2 и $\theta_1 \div \theta_m$ соответственно. Тогда характеристическая функция величины $r - \overline{r}$:

$$g_{r-\bar{r}}(t) = \prod_{j=1}^{m+2} \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 + t^2} ,$$

где: $\delta_j = a_j / \gamma_j$ для $j = \overline{1,2}$; $\delta_j = \theta_j / w_j$ для $j = \overline{3, m+2}$.

Произведя обратное преобразование Фурье, получим искомые плотность и функцию распределения доходности портфеля:

$$f_r(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+2} \left[\delta_j \prod_{i=1, i \neq j}^{m+2} \left[\frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 - \delta_j^2} \right] e^{-\delta_j |x - \bar{r}|} \right], \qquad F_r(x) = \int_{-\infty}^{x} f_r(z) dz.$$

По полученной формуле был построен график плотности распределения доходноси портфеля с равными весами, представленный на рисунке 9.

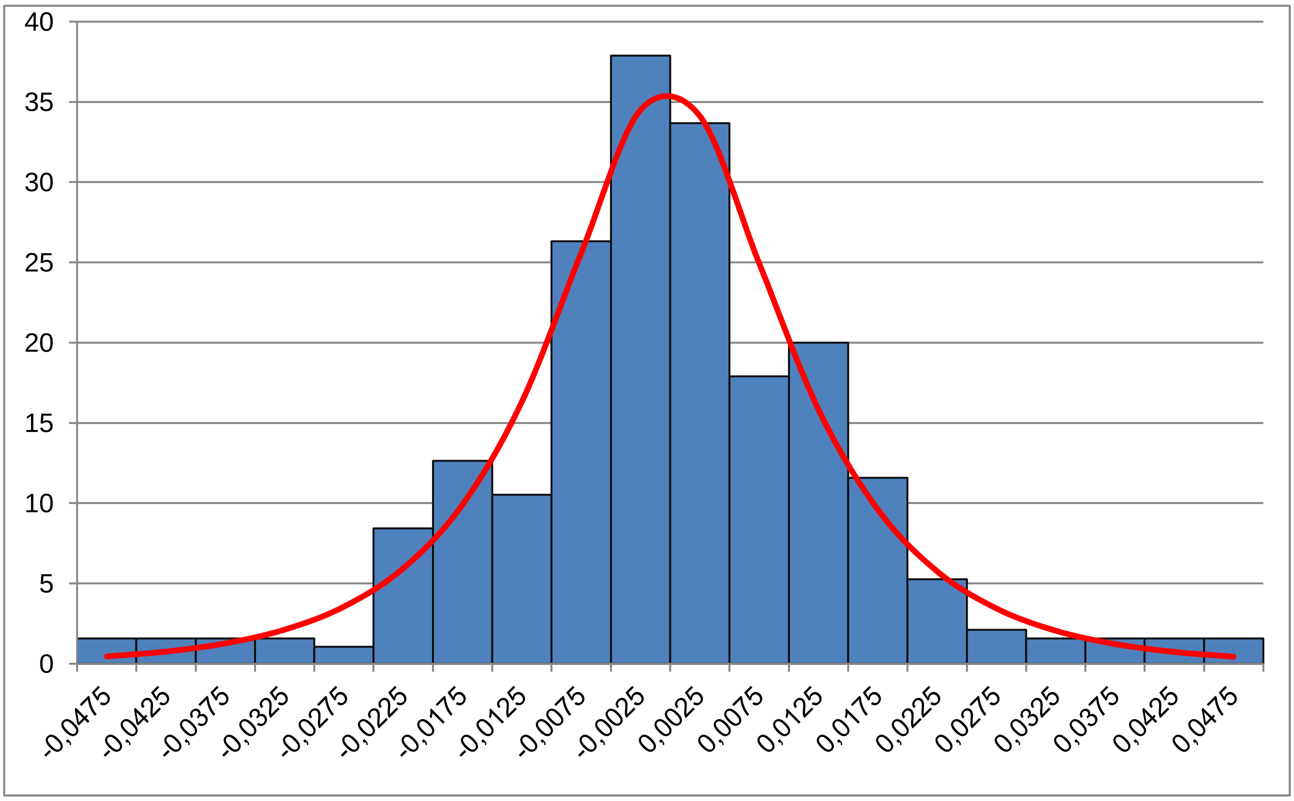

Рис. 9 - График плотности распределения доходности портфеля с равными весами

Заключение

Таким образом, в данной работе:

1) показана принципиальная возможность построения двух факторной модели для относительных приращений котировок совокупности валютных пар;
2) произведена оценка распределений обобщенных и характерных факторов;
3) смоделировано многомерное распределение всей совокупности исходных признаков;
4) получено единообразное аналитическое представление для плотностей распределений относительных приращений всех котировок, входящих в совокупность;
5) показано хорошее соответствие полученных распределений с реальными данными.

Список литературы

1. Сошникова Л.А., Тамашевич В.Н., Уебе Г., Шефер М. Многомерный статистический анализ в экономике. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999— 598 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, т.1, 2001. – 656 с.
3. Фантацини Д. моделирование многомерных распределений с использованием копула – функций// Прикладная эконометрика. 2011. №2(22). С. 99-134
4. Пеникас Г. И. Модели «копула» в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. № 8. С. 62–87
5. Иберла К. Факторный анализ. М.: Статистика, 1980.
6. Дубров А.М. Многомерные статистические методы для экономистов и менеджеров. М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Крицкий О.Л. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов: учебное пособие// Национальный исследовательский Томский политехнический университет — Томск, 2014 г.
8. Лепский А.Е., Броневич А.Г. Математические методы распознавания образов: Курс лекций. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 155 с.
9. Алексаров Ф.Т. Анализ математических моделей Базель 11. – 2-е изд., М.:Физматлит, 2013. – 296 с.
10. Лукасевич И. Я. Финансовый менеджмент. –М.:Бизнес-портал "Бизнес-Учебники.РФ", 2014-2015[Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://bizbook.online/finance.html.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб.для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999.
12. Голембиовский Д.Ю. Решение задач оптимизации портфеля финансовых инструментов/ Теория системы и управления. – М. : 2001. – 544 с.

Список публикаций студента

1. Загуменнова И. В. Разработка программы для выявления типа личности и типа темперамента личности на основе теста Айзенка// Молодежь и современные информационные технологии: сборник трудов XI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, г. Томск, 13-16 ноября 2013 г. / Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ), 2013.

2. Загуменнова И. В. Факторный анализ рынка ценных бумаг технологичных компаний// Перспективы развития фундаментальных наук: сборник трудов XII Международной конференция студентов и молодых ученых. Томск, 21–24 апреля 2015 г. / Томского политехнического университета, 2015. – 1556 с.

3. Загуменнова И. В., Егорова М. С. Характеристика деятельности и производственная структура предприятий общественного питания// Молодой ученый. — 2015. — №11.4. — С. 124-127.

4. Загуменнова И. В., Егорова М. С. Инновационная идея и маркетинговое обоснование создания детского кафе// Молодой ученый. — 2015. — №11.4.

5. Загуменнова И. В., Шинкеев М. Л. Исследование рынка ценных бумаг высоко технологичных компаний методами факторного анализа// Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине: сборник тезисов докладов VII Международной научно-практической конференции, Томск, 3-6 Июня 2015. - С. 97.

6. Загуменнова И. В. INVESTIGATION OF DISTRIBUTION OF CURRENCY PAIRS USING METHODS OF FACTOR ANALYSIS //Переспективы развития наук: сборник трудов XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск 26-29 апреля 2016 г.

7. Загуменнова И. В., Шинкеев М. Л. Оценка распределений приращений котировок валютных пар н аоснове факторной модели// Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине: сборник тезисов докладов

VII Международной научно-практической конференции, Томск, 1-3 Июня 2016.

8. Загуменнова И. В., Шинкеев М. Л. Оценка распределения доходности портфеля валютных пар на основе факторной модели его компонент// Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине: сборник тезисов докладов VII Международной научно-практической конференции, Томск, 1-3 Июня 2016.

Приложение 1

```
(* Импортируем стоимости массив 190*7 *)
P=Import["E:\\1.xlsx"][[1]];
kk=7;(* число исходных факторов *)
DPRC=Standardize[P,Mean,1&];
B=Covariance[P];
D0=Tr[B];
(* Факторный анализ *)
m=1;  (* число обобщенных факторов *)
f[x_,y_]=0;
S0=Array[f,{kk,kk}];
For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]/2];
For[k=1,k<100,k++
  [A0=B-S0;
  AS = Inverse[S0].A0;
  La1=Eigenvalues[AS][[1]];
  Lv1=Eigenvectors[Transpose[AS]][[1]];
  h1=({Lv1}.Inverse[S0].Transpose[{Lv1}])[[1]];
  Lvn1={Lv1}*Sqrt[La1/h1];
  A1=Transpose[Lvn1].Lvn1;
  For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]-A1[[i,i]]];
  SN=0;
  For[i=1,i<=kk,i++,SN=SN+S0[[i,i]]];
  ]];
AF=Transpose[{Lvn1[[1]]}] ; (* Матрица факторных нагрузок *)
(* матрица значений обобщенных факторов *)
OF=DPRC.Inverse[S0].AF.Inverse[Transpose[AF].Inverse[S0].AF];
(* матрица значений характерных факторов *)
XF=DPRC-OF.Transpose[AF];
(* Факторный анализ *)
```

```
m=2;  (* число обобщенных факторов *)
f[x_,y_]=0;
S0=Array[f,{kk,kk}];
For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]/2];
For[k=1,k<100,k++
   [A0=B-S0;
   AS = Inverse[S0].A0;
   La1=Eigenvalues[AS][[1]];
   La2=Eigenvalues[AS][[2]];
   Lv1=Eigenvectors[Transpose[AS]][[1]];
   Lv2=Eigenvectors[Transpose[AS]][[2]];
   h1=({Lv1}.Inverse[S0].Transpose[{Lv1}])[[1]];
   h2=({Lv2}.Inverse[S0].Transpose[{Lv2}])[[1]];
   Lvn1={Lv1}*Sqrt[La1/h1];
   Lvn2={Lv2}*Sqrt[La2/h2];
   A1=Transpose[Lvn1].Lvn1+Transpose[Lvn2].Lvn2;
   For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]-A1[[i,i]]];
   SN=0;
   For[i=1,i<=kk,i++,SN=SN+S0[[i,i]]];
   ]];
AF=Transpose[{Lvn1[[1]],Lvn2[[1]]}] ; (* Матрица факторных нагрузок *)
(* матрица значений обобщенных факторов *)
OF=DPRC.Inverse[S0].AF.Inverse[Transpose[AF].Inverse[S0].AF];
(* матрица значений характерных факторов *)
XF=DPRC-OF.Transpose[AF];

m=3;  (* число обобщенных факторов *)
f[x_,y_]=0;
S0=Array[f,{kk,kk}];
For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]/2];
```

```
For[k=1,k<100,k++
  [A0=B-S0;
  AS = Inverse[S0].A0;
  La1=Eigenvalues[AS][[1]];
  La2=Eigenvalues[AS][[2]];
  La3=Eigenvalues[AS][[3]];
  Lv1=Eigenvectors[Transpose[AS]][[1]];
  Lv2=Eigenvectors[Transpose[AS]][[2]];
  Lv3=Eigenvectors[Transpose[AS]][[3]];
  h1=({Lv1}.Inverse[S0].Transpose[{Lv1}])[[1]];
  h2=({Lv2}.Inverse[S0].Transpose[{Lv2}])[[1]];
  h3=({Lv3}.Inverse[S0].Transpose[{Lv3}])[[1]];
  Lvn1={Lv1}*Sqrt[La1/h1];
  Lvn2={Lv2}*Sqrt[La2/h2];
  Lvn3={Lv3}*Sqrt[La3/h3];
  A1=Transpose[Lvn1].Lvn1+Transpose[Lvn2].Lvn2+Transpose[Lvn3].Lvn3;
  For[i=1,i<=kk,i++,S0[[i,i]]=B[[i,i]]-A1[[i,i]]];
  SN=0;
  For[i=1,i<=kk,i++,SN=SN+S0[[i,i]]];
  ]];
AF=Transpose[{Lvn1[[1]],Lvn2[[1]],Lvn3[[1]]}] ; (* Матрица факторных нагрузок *)
(* матрица значений обобщенных факторов *)
OF=DPRC.Inverse[S0].AF.Inverse[Transpose[AF].Inverse[S0].AF];
(* матрица значений характерных факторов *)
XF=DPRC-OF.Transpose[AF];
(* Оцениваем качество факторного анализа *)
1-Tr[S0]/D0 (* Выделенная дисперсия *)
G=A1+S0;
```

```
xi2=-(n-1-(2*kk+5)/6-2*m/3)*(Log[Det[B]/Det[G]]-Tr[B.Inverse[G]]+kk) (* значение статистики *)
cxi2 = 1/2*((kk-m)^2-(kk+m)) (* число степеней свободы *)
1-CDF[ChiSquareDistribution[cxi2],xi2] (* достигнутый уровень значимости *)
```