

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В НЕКОММУТАТИВНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А.Н. Мягкий

Томский политехнический университет

E-mail: anm@mph.phtd.tpu.ru

Построены асимптотические решения уравнения Шредингера для заряженной нерелятивистской частицы со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле в некоммутативном пространстве. Получены классические уравнения движения заряда и спина частицы в первом приближении по параметру некоммутативности.

### Ключевые слова:

Уравнение Шредингера, некоммутативное пространство, асимптотические решения, нерелятивистская спиновая частица, прецессия спина.

### Key words:

Schrodinger equation, noncommutative space, asymptotic solutions, nonrelativistic spinning particle, spin precession.

### Введение

В последние десять лет интенсивно изучаются некоммутативные пространства и теории поля на этих пространствах (некоммутативные теории поля). Популярность некоммутативные теории поля приобрели благодаря тому, что была обнаружена их связь с теорией струн. А именно, некоммутативные теории возникают в низкоэнергетическом пределе теории струн во внешних полях специального типа [1]. Вместе с тем некоммутативная теория поля возникает как эффективное описание динамики некоторых квантово-механических моделей. В частности, движения заряженных нерелятивистских частиц в двумерной плоскости под действием постоянного магнитного поля, направленным перпендикулярно этой плоскости. В пределе, когда напряженность магнитного поля стремится к бесконечности, такая система переходит в низший энергетический уровень и операторы координат частиц этой системы перестают коммутировать [2].

Известно, что описание  $d$ -мерной квантово-механической системы соответствует некоторому вектору в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , в котором наблюдаемые есть линейные самосопряженные операторы.

В обычной квантовой механике классические канонические переменные  $q^k, p_k$  становятся эрмитовыми операторами  $\hat{q}^k, \hat{p}_k$  в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i, [\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0, [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, i, j = \overline{1, d}.$$

В некоммутативной квантовой механике также полагают, что  $[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i$ , но при этом  $[\hat{q}^i, \hat{q}^j] \neq 0$ ,  $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] \neq 0$ . Мы рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{q}^i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_j^i, [\hat{q}^i, \hat{q}^j] = i\hbar\theta^{ij}, \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, i, j = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\hat{q}^k$  и  $\hat{p}_k$  — операторы координаты и импульса на некоммутативном пространстве,  $\theta = (\theta^{ij})$  — параметр некоммутативности — антисимметричная матрица с постоянными элементами. В дальнейшем без ограничения общности полагаем  $\theta^{ij} > 0$ . Существуют теоретические оценки параметра некоммутативности (см., например, работу [3]).

Вследствие коммутационных соотношений (1) нетрудно видеть, что координаты  $q^i$ , в силу принципа неопределенности

$$\Delta q^i \Delta q^j \geq \frac{\hbar}{2} \theta^{ij},$$

невозможно фиксировать точно.

Для того, чтобы построить коммутативный аналог квантово-механической системы на некоммутативном пространстве, в уравнении Шредингера все операции умножения заменяются на ассоциативную, но не коммутативную операцию умножения «звездочка», определенную по правилу:

$$\begin{aligned} (A * B)(q) &= e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}} A(q_1)B(q_2) \Big|_{q_1=q_2=q} = \\ &= A(q)B(q) + \frac{1}{2}\{A(q), B(q)\} + O(\theta^2), \end{aligned}$$

где  $A(q), B(q)$  — произвольные бесконечно дифференцируемые функции на  $\mathbb{R}^d$ ,  $q = (q^i)$ ,  $i = \overline{1, d}$ . Здесь  $\{\}$  — скобки Пуассона, определенные с помощью  $\theta^{ij}$ . Умножение «звездочка» является нелокальным, так как включает в себя бесконечное количество производных. В связи с этим понятие частицы как локализованного точечного объекта уже не представляется удовлетворительным.

Пусть  $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t)$  — оператор Гамильтона некоторой квантово-механической системы, определенной на некоммутативном пространстве. Уравнение Шредингера для данной системы, но уже на обычном пространстве, запишется в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) * \psi(q, t).$$

Такой подход эквивалентен преобразованию операторов координат и импульса вида [4]

$$\hat{q}^i = \hat{x}^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, \quad \hat{p}_j = \hat{p}_j.$$

где  $\hat{p}_j = -i\hbar \partial_j$  – оператор импульса, сопряженный оператору  $\hat{x}^i = x^i$ . При этом алгебра (1) операторов  $\hat{q}^k, \hat{p}_k$  может быть заменена алгеброй

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i, \quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad i, j = \overline{1, d}.$$

Таким образом, некоммутативная квантовая механика, связанная с классическим фазовым пространством  $(q, p)$ , может рассматриваться как обычная квантовая механика, соответствующая фазовому пространству  $(x, p)$ .

В силу этого

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \hat{H}\left(\hat{x}^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, \hat{p}, t\right),$$

где операторы  $\hat{x}^k$  и  $\hat{p}_k$  можно рассматривать как операторы обычной (коммутативной) квантовой механики. Следовательно,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H}\left(\hat{x}^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, \hat{p}, t\right) \psi(x, t). \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что такой оператор Гамильтона может индуцировать уравнение Шредингера с производными выше второго порядка, и, возможно, также производными бесконечного порядка.

Заметим, что уравнение (2) уже определено на коммутативном пространстве, а все эффекты, связанные с некоммутативностью координат, можно отследить, изучая члены уравнения, содержащие  $\theta$ . Полагая  $\theta=0$ , получим обычную квантовую механику.

Решение уравнения (2) будем искать в виде ряда по малому параметру  $\hbar$ :

$$\psi(x, t, \hbar) = e^{iS/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hbar)^n \psi_n(x, t), \quad (3)$$

где  $S=S(x, t)$  – вещественная скалярная функция координат и времени. В основном нас будут интересовать лишь первые члены в этом разложении.

Целью данной работы является изучение вопроса о применимости квазиклассического метода к квантовой механике на некоммутативном пространстве.

#### Асимптотические решения уравнения Шредингера

Рассмотрим уравнение Шредингера для нерелятивистской частицы со спином  $1/2$  с зарядом  $e$  и массой  $m$ , взаимодействующей с электромагнитным полем в трехмерном некоммутативном пространстве ( $d=3$ ),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H}_\theta \psi(x, t),$$

$$\hat{H}_\theta = \frac{1}{2m} (\sigma_k \hat{P}_k)^2 + V\left(x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, t\right),$$

$$\hat{P}_k = \hat{p}_k - \frac{e}{c} A\left(x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, t\right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь  $\psi$  – двухкомпонентный спинор,  $\sigma_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) – матрицы Паули. Оператор  $\hat{V}$  определяет потенциальную энергию взаимодействия частицы с электрическим полем, причем в первом приближении по  $\theta$  оператор имеет следующую структуру:

$$V\left(x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \hat{p}_j, t\right) = V(x, t) - \frac{1}{2} \partial_k V(x, t) \theta^{kl} \hat{p}_l + O(\theta^2).$$

Отсюда нетрудно видеть, что в первом приближении по параметру некоммутативности потенциальная энергия учитывает не только взаимодействие электрического поля с зарядом, но и с электрическим моментом частицы.

Будем искать решение уравнения (4) в форме (3). Подставляя функцию (3) в уравнение (4) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\hbar$ , получим

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \partial_k S - \frac{e}{c} A_k \left( x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_j S, t \right) \right)^2 + V \left( x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_j S, t \right) \right] \psi_0 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет нетривиальное решение только в том случае, если коэффициент при функции  $\psi_0(x, y)$  равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \partial_k S - \frac{e}{c} A_k \left( x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_j S, t \right) \right)^2 + V \left( x^i - \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_j S, t \right) = 0, \quad (6)$$

или, пренебрегая членами второй и выше степени по параметру  $\theta$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \partial_i S - \frac{e}{c} A_i(x, t) + \frac{e}{2c} \partial_k A_i(x, t) \theta^{km} \partial_m S \right)^2 + V(x, t) - \frac{1}{2} \partial_k V(x, t) \theta^{km} \partial_m S = 0.$$

Уравнение (6) есть уравнение Гамильтона–Якоби для функции  $S(x, t)$ , описывающее движение заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле.

Приравнявая к нулю коэффициент при первой степени  $\hbar$ , получим уравнение на функцию  $\psi_0(x, t)$ :

$$\frac{d\psi_0}{dt} + \frac{1}{2m} \left[ \Delta S - \frac{e}{c} \partial_i A_i(x, t) + \frac{e}{2c} \partial_k \partial_i A_i(x, t) \theta^{km} \partial_m S + \frac{e}{c} \partial_k A_i(x, t) \theta^{km} \partial_m \partial_i S \right] \psi_0 - \frac{ie}{2mc} \sigma_i C_i(x, t) \psi_0 + O(\theta^2) = 0,$$

$$C_i(x, t) = H_i(x, t) - \frac{1}{2} \partial_k H_i(x, t) \theta^{km} \partial_m S + \frac{e}{2c} \varepsilon^{ijk} \partial_m A_j(x, t) \partial_i A_k(x, t) \theta^{ml}, \quad (7)$$

где  $H_i(x, t) = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k(x, t)$  – магнитное поле, соответствующее заданному векторному потенциалу. Здесь производная по переменной  $t$  берется вдоль траектории движения, определяемой функцией  $S(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{m} \left[ \partial_i S - \frac{e}{c} A_i(x, t) + \frac{e}{2c} \partial_k A_i(x, t) \theta^{km} \partial_m S \right] \partial_i + \\ &+ \frac{e}{2mc} \left( \partial_k S - \frac{e}{c} A_k(x, t) \right) \partial_m A_k(x, t) \theta^{mi} \partial_i - \\ &- \frac{1}{2} \partial_k V(x, t) \theta^{ki} \partial_i. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно построить уравнение на функцию  $\psi_1(x, t)$ ,  $\psi_2(x, t)$  и так далее, т. е. получить любое заданное количество членов ряда (3).

#### Уравнения движения заряда

Построим классические уравнения движения частицы в некоммутативном пространстве в присутствии электромагнитного поля. Способ, которым мы воспользуемся для получения классических уравнений, состоит в выводе их непосредственно из квантовой теории, опираясь на известную теорему Эренфеста.

Известно, что в квантовой механике средние значения оператора  $\hat{F}$  в случае, когда система находится в состоянии  $\psi(x, t, \hbar)$ , определяются следующим образом:

$$\langle \hat{F} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\dagger(x, t, \hbar) \hat{F} \psi(x, t, \hbar) dx = F_\psi(t, \hbar).$$

На решении уравнения (4) для средних значений оператора  $\hat{F}$  имеем [5]:

$$\frac{d\langle \hat{F}(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{F}(t)}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}_\theta(t), \hat{F}(t)] \rangle, \quad (8)$$

где  $[\hat{H}_\theta(t), \hat{F}(t)] = \hat{H}_\theta(t) \hat{F}(t) - \hat{F}(t) \hat{H}_\theta(t)$  – коммутатор линейных операторов  $\hat{H}_\theta$  и  $\hat{F}$ .

Средние по состоянию  $\psi(x, t, \hbar)$  операторов координат  $\hat{x}^k$  и сопряженных им импульсов  $\hat{p}_k$  являются функциями времени и зависят параметрически от  $\hbar$ :

$$\langle \hat{x}^k \rangle = x_\psi^k(t, \hbar), \quad \langle \hat{p}_k \rangle = p_{\psi k}(t, \hbar).$$

Фазовой траекторией классической системы, соответствующей данному состоянию  $\psi(x, t, \hbar)$ , назовем набор координат

$$x^k(t) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} x_\psi^k(t, \hbar), \quad p_k(t) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} p_{\psi k}(t, \hbar).$$

Будем полагать, что волновая функция отлична от нуля в небольшой области около  $\langle \hat{x}^k \rangle$ . Тогда по-

тенциал  $A_i(x, t)$  можно разложить в ряд в окрестности точки  $\langle \hat{x}^k \rangle$

$$\begin{aligned} A_i(x, t) &= A_i(\langle x \rangle, t) + \frac{\partial A_i(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle} \Delta x^k + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_i(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle \partial \langle x^l \rangle} \Delta x^k \Delta x^l + \dots, \end{aligned}$$

где  $\Delta x^k = x^k - \langle \hat{x}^k \rangle$  и использованы обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle} &= \left. \frac{\partial A_i(\langle x \rangle + \xi, t)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0}, \\ \frac{\partial^2 A_i(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle \partial \langle x^l \rangle} &= \left. \frac{\partial^2 A_i(\langle x \rangle + \xi, t)}{\partial \xi^k \partial \xi^l} \right|_{\xi=0}. \end{aligned}$$

Эти же рассуждения можно отнести и к потенциалу  $V(x, t)$ .

Потребуем выполнения следующих условий [5]:

$$\begin{aligned} |A_i(\langle x \rangle, t)| &>> \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 A_i(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle \partial \langle x^l \rangle} \right| \langle \Delta x^k \Delta x^l \rangle, \\ |V(\langle x \rangle, t)| &>> \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 V(\langle x \rangle, t)}{\partial \langle x^k \rangle \partial \langle x^l \rangle} \right| \langle \Delta x^k \Delta x^l \rangle, \\ |\langle \hat{p}_i \rangle \langle \hat{p}_j \rangle| &>> \langle \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j \rangle = \frac{\hbar^2}{4 \Delta x^i \Delta x^j}, \\ \Delta \hat{p}_i &= \hat{p}_i - \langle \hat{p}_i \rangle. \end{aligned}$$

Выполнение данных неравенств возможно при движении частицы с большими импульсами в плавно меняющихся внешних полях.

Запишем уравнение (8) для средних значений операторов  $\hat{x}^i$  и  $\hat{p}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . Тогда при  $\hbar \rightarrow 0$  получим систему уравнений, определяющую фазовую траекторию классической системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{1}{m} \left( p_i - \frac{e}{c} A_i(x, t) + \frac{e}{2c} \partial_k A_i(x, t) \theta^{kl} p_l \right) - \\ &- \frac{e}{2mc} \theta^{ik} \partial_k A_i(x, t) p_l + \\ &+ \frac{e^2}{2mc^2} \theta^{ik} A_i(x, t) \partial_k A_i(x, t) + \frac{1}{2} \theta^{ik} \partial_k V(x, t) + O(\theta^2), \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\partial_i V(x, t) + \frac{1}{2} \partial_k \partial_i V(x, t) \theta^{kl} p_l + \\ &+ \frac{e}{mc} \partial_i A_m(x, t) p_m - \frac{e}{2mc} \partial_k \partial_i A_m(x, t) \theta^{kl} p_l p_m - \\ &- \frac{e^2}{2mc^2} \left( 2 A_m(x, t) \partial_i A_m(x, t) - \right. \\ &\left. - A_m(x, t) \partial_k \partial_i A_m(x, t) \theta^{kl} p_l - \right. \\ &\left. - \partial_k A_m(x, t) \theta^{kl} \partial_i A_m(x, t) p_l \right) + O(\theta^2). \end{aligned}$$

Данные уравнения в первом приближении по параметру некоммутативности соответствуют системе Гамильтона некоторой классической модели, описывающей динамику некоммутативной частицы во внешнем электромагнитном поле. Заметим, что при  $\theta=0$  система уравнений переходит в обыч-

ную систему Гамильтона для частицы, движущейся в электромагнитном поле. Полученный выше результат полностью соответствует классической модели частицы на некоммутативном пространстве, предложенной и изученной ранее в работах [6–8].

Математически строгое описание перехода от квантовой к классической теории изложено, например, в [9].

#### Уравнение движения спина

Подобным образом можно исследовать динамику спина частицы во внешнем электромагнитном поле. С этой целью на основе (8) запишем уравнение для среднего значения оператора спина  $\zeta_i = \langle \sigma_i \rangle (i=1,2,3)$

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{e}{mc} \varepsilon_{ijk} \zeta_j C_k + O(\theta^2), \quad (9)$$

где  $C_k$  — величина, определенная выражением (7). Хорошо видно, что некоммутативность пространства вносит свой вклад в величину частоты прецессии спина заряженной частицы.

Рассмотрим движение спина в постоянном однородном магнитном поле  $H = (0, 0, H)$ , определяемом потенциалом  $A_i(x)$  в калибровке следующего вида

$$A_i(x) = -\frac{1}{2} H \varepsilon_{ij3} x^j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Из уравнения (9) следует, что вектор  $\zeta_i$  будет прецессировать относительно оси  $Ox^3$  с частотой

$$\omega = \frac{eH}{mc} \left( 1 + \frac{eH\theta^{12}}{4c} \right),$$

которая отличается от циклической множителем, зависящим от величины (а также направления) магнитного поля. Заметим, что в случае, если  $eH\theta^{12} < 0$ , частота прецессии спина может обратиться в нуль при значении параметра  $\theta = 4c/eH$ .

Следует отметить, что уравнение движения спина частицы зависит от выбора калибровки. Это утверждение, в общем случае, относится и к движению заряда [8, 10].

#### Выводы

Построены асимптотические решения уравнения Шредингера для заряженной нерелятивистской частицы со спином 1/2 во внешнем электромагнитном поле в некоммутативном пространстве. На основе квазиклассического метода определена связь между квантовой и классической теориями. Из квантовой теории выведены классические уравнения движения. Этим обоснована адекватность и применимость квазиклассического метода для некоммутативных теорий. Построено уравнение движения спина нерелятивистской частицы в электромагнитном поле в первом порядке по параметру некоммутативности и исследована поправка к частоте прецессии спина в однородном магнитном поле в одной из возможных калибровок. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах и постановке экспериментов по определению параметра некоммутативности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Seiberg N., Witten E. String theory and noncommutative geometry // J. High Energy Phys. — 1999. — V. 9. — P. 032.
2. Jackiw R. Physical instances of noncommuting coordinates // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2002. — V. 108. — P. 30–36.
3. Chaichian M., Sheikh-Jabbari M.M., Tureanu A. Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 86. — № 13. — P. 2716–2719.
4. Mezincescu L. Star Operation in Quantum Mechanics. 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0007046v2> (дата обращения: 25.09.2009).
5. Давыдов А.С. Квантовая механика. — М.: Физматгиз, 1963. — 748 с.
6. Deriglazov A.A. Poincare covariant mechanics on noncommutative space // J. High Energy Phys. — 2003. — № 3. — P. 021.
7. Deriglazov A.A. Noncommutative relativistic particle on the electromagnetic background // Phys. Lett. B. — 2003. — V. 555. — № 1–2. — P. 83–88.
8. Gitman D.M., Kupriyanov V.G. Gauge invariance and classical dynamics of noncommutative particle theory. 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0910.1341> (дата обращения: 25.09.2009).
9. Баргов В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы. — Томск: Изд-во ТПУ, 2005. — 166 с.
10. Baldiotti M.C., Gazeau J.P., Gitman D.M. Semiclassical and quantum description of motion on noncommutative plane // Phys. Lett. A. — 2009. — V. 373. — № 43. — P. 3937–3943.

Поступила 21.12.2009 г.