

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

*На правах рукописи*

МАРИНУШКИНА ИРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

**ОБРАБОТКА ДАННЫХ СЛИЧЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН  
МЕТОДОМ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ**

Специальность 05.11.01 – Приборы и методы измерения  
(измерение электрических и магнитных величин)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель – доктор технических наук,  
профессор Муравьев Сергей Васильевич

Томск – 2015

## Содержание

	Стр.
<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1 Сличения в практике измерений электрических величин .....</b>	<b>12</b>
1.1 Цели сличений на различных уровнях.....	12
1.1.1 Цели международных сличений.....	13
1.1.2 Цели межлабораторных сличений .....	15
1.2 Особенности проведения и обработки данных сличений различного уровня.....	17
1.2.1 Сличения национальных эталонов НМИ .....	17
1.2.2 Проверка квалификации аккредитованных лабораторий.....	19
1.2.3 Опорное значение сличений и наибольшее подмножество согласованных результатов .....	23
1.3 Алгоритмы обработки данных сличений .....	26
1.3.1 Процедура А обработки данных сличений .....	26
1.3.2 Алгоритмы оценки результатов межлабораторных сличений на основе статистических критериев.....	28
1.3.3 Алгоритм Нильсена .....	31
Выводы к главе 1 .....	34
<b>ГЛАВА 2 Агрегирование предпочтений.....</b>	<b>36</b>
2.1 Правила агрегирования предпочтений .....	36
2.1.1 Отношение предпочтения.....	36
2.1.2 Правило простого большинства .....	39
2.1.3 Правило Борда.....	40
2.1.4 Правило Кондорсе.....	41
2.2 Правило Кемени .....	44
2.3 Алгоритм нахождения ранжирования Кемени .....	46
2.4 Входной и выходной профили задачи о ранжировании Кемени .....	52
2.4.1 Транзитивность входного профиля.....	52
2.4.2 Экспериментальные исследования транзитивности	

входного профиля .....	54
2.4.3 Нетранзитивность выходного профиля .....	58
Выводы к главе 2 .....	59
<b>ГЛАВА 3 Обработка данных сличений на основе решения задачи</b>	
<b>о ранжировании Кемени.....</b>	<b>61</b>
3.1 Алгоритм обработки данных сличений на основе агрегирования	
предпочтений.....	61
3.2 Пример применения метода агрегирования предпочтения .....	66
3.3 Разработка программной среды для экспериментальных	
исследований метода агрегирования предпочтения .....	68
3.3.1 Архитектура программного комплекса обработки и	
анализа данных сличений .....	69
3.3.2 Программная реализация алгоритма обработка данных	
сличений на основе агрегирования предпочтений.....	78
3.4 Проведение численных экспериментальных исследований	
обработки данных сличений методом агрегирования предпочтений ...	79
3.4.1 Исследование робастности и работоспособности	
метода агрегирования предпочтения .....	79
3.4.2 Выбор подходящего числа значений диапазона актуальных	
значений.....	87
Выводы к главе 3 .....	97
<b>ГЛАВА 4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРАКТИЧЕСКИХ</b>	
<b>СЛИЧЕНИЙ.....</b>	<b>99</b>
4.1 Выбор числа участников сличений .....	99
4.1.1 Схема Бернулли и геометрическое распределение .....	100
4.1.2 Вероятностная модель обнаружения опорного значения.....	101
4.1.3 Анализ роста вероятности обнаружения опорного значения	
при добавлении дополнительных лабораторий в группу	
участников сличений .....	104
4.2 Обработка данных реальных сличений .....	108

4.2.1 Ключевые сличений эталона высокочастотной мощности .....	108
4.2.2 Дополнительные сличения эталона единицы электрической мощности .....	115
4.2.3 Межлабораторные сличения для определения размера единицы мощности микроволнового излучения .....	121
4.2.4 Межлабораторные сличительные калибровки цифрового вольтметра .....	123
Выводы к главе 4 .....	126
<b>Заключение .....</b>	<b>128</b>
<b>Список сокращений и обозначений .....</b>	<b>129</b>
<b>Список используемой литературы .....</b>	<b>133</b>
Приложение А. Акты внедрения диссертационной работы .....	145

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Надежные измерения электрических величин, таких как сила электрического тока, напряжение, сопротивление, емкость, индуктивность, мощность и др., лежат в основе принятия решений в различных отраслях промышленности и науки.

Постоянное развитие промышленности, приборостроения и энергетики, расширение внутреннего и внешнего энергетических рынков требует повышения точности измерений электрических величин и обеспечения международного признания, например, размеров единиц электрической мощности и энергии, а также достоверности результатов учетных операций при международной торговле электрической энергией.

Для поддержания единства и надежности измерений электрических величин необходимо обеспечение их прослеживаемости на различных уровнях метрологических работ в соответствии с требованиями международных и национальных стандартов. Для этого необходимо проведение сличений эталонов, используемых как национальными метрологическими институтами (НМИ), так и аккредитованными лабораториями.

В соответствии с межгосударственной рекомендацией РМГ 29 *сличение эталонов* – это установление соотношения между результатами измерений при воспроизведении и передаче единицы измерения или шкалы измерений данными эталонами одного уровня точности. Процедура сличений заключается в оценивании качества измерений заданной характеристики эталона сравнения несколькими различными участниками (НМИ или лабораториями) в соответствии с заранее установленными условиями.

Основной задачей сличений любого вида является установление *опорного значения* измеряемой величины, наилучшим образом характеризующего наибольшее подмножество согласованных, т.е. надежных, результатов измерений (так называемое *наибольшее согласованное подмножество*, НСП). Для этого лаборатории-участники сличений оценивают одно и то же номинальное значение

величины. Участники направляют координатору сличений результаты измерений в форме оценок номинального значения и соответствующих стандартных неопределенностей. Координатор сличений проводит обработку полученных результатов и формирует заключение для каждой лаборатории-участника. Лаборатории с ненадежными результатами не участвуют в формировании итогового опорного значения.

Существуют различные методы проверки согласованности результатов измерений лабораторий и нахождения опорного значения. Выбор конкретного метода проверки согласованности результатов измерений зависит от вида исследуемого эталона сравнения, особенностей испытаний и количества участников в сличениях. Распространены, например, статистические методы, основанные на вычислениях разности результата измерений лаборатории и определенного координатором приписанного значения, процентной разности, процентилей или рангов. Эти методы обычно накладывают ограничения на допустимое количество участников сличений, а также имеют невысокую дискриминирующую способность, позволяющую различать действительно ненадежные и надежные результаты. К тому же большинство из них основаны на исходных предположениях о нормальном распределении и независимости результатов измерений, которые не всегда выполняются на практике.

Поэтому существует необходимость в разработке *робастных* методов обработки данных сличений, работоспособных в случаях, когда закон распределения результатов измерений лабораторий отличается от нормального или неизвестен.

Перспективными для реализации придания свойства робастности обработке данных сличений являются методы голосования или агрегирования предпочтений, представляющих результаты лабораторий-участников в форме ранжирований значений измеряемой величины. Благодаря порядковой природе используемых при этом данных, полученное опорное значение не должно зависеть от вида закона распределения результатов измерений.

**Целью диссертационной работы** является разработка и исследование робастного метода обработки данных сличений, основанного на агрегировании предпочтений на множестве значений измеряемой величины, обеспечивающего отбор максимально возможного числа участников сличений, предоставляющих надежные результаты измерений.

В связи с поставленной целью в работе должны быть решены следующие **задачи**:

1. анализ необходимости разработки метода обработки данных сличений, обеспечивающего работоспособность в случаях, когда закон распределения результатов измерений лабораторий отличается от нормального или неизвестен;
2. исследование основанных на правилах голосования методов агрегирования предпочтений, обоснование выбора алгоритма агрегирования предпочтений на основе правила Кемени и исследование его свойств;
3. разработка и программная реализация метода обработки данных сличений на основе нахождения ранжирования консенсуса по правилу Кемени и численные экспериментальные исследования его робастности;
4. разработка обоснования для выбора рационального количества участников сличений.

**Методы исследования.** Используются методы теории измерений, теории голосования, группового выбора, теории вероятностей и математической статистики, а также стандартизованные методы организации сличений. Вычислительный эксперимент проводился с использованием метода Монте-Карло с генерацией данных сличений, распределенных по равномерному и нормальному закону с помощью специально разработанного программного обеспечения в среде Microsoft Visual C#.

**Достоверность полученных результатов** диссертационной работы подтверждается совпадением с достаточной на практике точностью экспериментальных данных, полученных с помощью численного моделирования, с результатами реальных сличений, полученных из находящихся в открытом

доступе отчетов известных национальных и международных метрологических организаций.

### **Научная новизна**

1. Предложен и исследован метод обработки данных сличений, основанный на преобразовании интервалов неопределенности в ранжирования, нахождении для них ранжирования консенсуса по правилу Кемени и назначения в качестве опорного значения сличений наилучшей альтернативы в ранжировании консенсуса.
2. Показано, что предложенный метод агрегирования предпочтений при обработке результатов сличений обеспечивает формирование опорного значения, характеризующегося повышенной устойчивостью (робастностью) к виду закона распределения измерительных данных по сравнению с традиционными методами.
3. Разработана основанная на геометрическом распределении модель, связывающая в явном аналитическом виде вероятность определения опорного значения сличений с числом участников сличений, которая позволяет выбирать обоснованное количество участников сличений.

**Практическая ценность работы.** Результаты проведенной работы могут быть использованы для разработки и усовершенствования методов организации и проведения ключевых, дополнительных, а также межлабораторных сличений при оценивании компетентности лабораторий, в области не только электричества и магнетизма, но и широкого круга измерений других видов величин.

Повышенная точность оценивания опорного значения обеспечивает повышение достоверности обработки данных сличений и может способствовать совершенствованию как национальной, так и международной эталонной базы.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Результаты исследований по теме диссертации использованы для выполнения при непосредственном участии автора следующих НИР:

- грант РФФИ по проекту "Научная работа молодого ученого из Казахстана в Томском политехническом университете", 2010 г., № 10-08-90900

моб\_снг\_ст;

- проект № 2078 "Развитие теории информационно-сенсорных систем" по заданию № 2014/226 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Результаты работы используются в:

- РГП "Казахстанский институт метрологии (КазИнМетр)" (г. Астана, Казахстан) при обработке результатов межлабораторных сличений по поверке/калибровке средств измерений электрических величин, давления, температуры и теплофизических величин;
- испытательном центре "КабельТестСтандарт" ТОО FORBEST (г. Сарань, Казахстан) для проведения внутрилабораторного контроля качества результатов измерений при проведении испытаний кабельной продукции.

Акты внедрения приложены к диссертационной работе (приложение А).

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработанный метод обработки данных сличений, основанный на агрегировании предпочтений на множестве значений измеряемой величины, обеспечивает нахождение опорного значения сличений с неопределенностью, позволяющей сформировать НСП участников сличений мощности не меньшей или превышающей мощность НСП при традиционных методах.
2. Предложенный метод агрегирования предпочтений при обработке результатов сличений обеспечивает получение опорного значения не менее, чем в 2 раза более близкого к номинальному значению по сравнению с известными робастными методами.
3. Разработанная модель, связывающая в явном аналитическом виде вероятность определения опорного значения сличений с числом  $m$  участников сличений, позволяет рекомендовать выбирать количество участников сличений из диапазона от 4 до 15.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

14-й Международный совместный симпозиум ИМЕКО ТК1, ТК7 и ТК13 "Интеллектуальные качественные измерения – Теория, Образование и Обучение", г. Йена, Германия, 2011 г.; XVIII и XIX Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Современные техника и технологии", г. Томск, 2012 и 2013 гг.; Международный совместный симпозиум ИМЕКО ТК1, ТК7 и ТК13 "Измерение в физических и гуманитарных науках", Генуя, Италия, 2013; XXIII Национальный научный симпозиум с международным участием "Метрология и метрологическое обеспечение", Созополь, Болгария, 2013 г.; VII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Россия молодая", г. Кемерово, 2015 г.; XVI Международная научно-техническая конференция "Измерение, контроль, информатизация 2015", г. Барнаул, 2015 г.; Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Научная сессия ТУСУР–2015", г. Томск, 2015 г.; VI Международный конкурс "Лучший молодой метролог КОOMET-2015", г. Киев, Украина, 2015 г.; XXI Международный конгресс ИМЕКО, г. Прага, Чешская Республика, 2015 г.

По результатам работы автор стал призёром в следующих конкурсах:

- Конкурс Комитета технического регулирования и метрологии Министерства индустрии и новых технологий Республики Казахстан "Лучший молодой метролог года – 2015" (второе место), Астана, Казахстан;
- VI Международный конкурс "Лучший молодой метролог КОOMET-2015" (второе место), Киев, Украина.

**Публикации.** Основные результаты исследований отражены в 15 публикациях: три статьи в ведущих научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК, в том числе одна проиндексирована в базах данных Web of Science и Scopus; десять статей в рецензируемых научных журналах и сборниках трудов международных и российских конференций, в том числе две проиндексированы в базе данных Scopus; два свидетельства о государственной

регистрации программ для ЭВМ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и обозначений, списка литературы из 106 наименований и приложения. Работа содержит 147 страниц основного текста, включая 46 рисунков и 34 таблицы.

**В первой главе** представлен анализ отечественных и зарубежных источников, международных рекомендаций, посвященных проведению сличений различных уровней, применяемых в практике измерений электрических величин, и алгоритмов обработки данных этой процедуры.

**Во второй главе** введено понятие ранжирования как формы представления предпочтений и рассмотрены основные правила нахождения единственного ранжирования для заданных  $m$  ранжирований  $n$  альтернатив.

**В третьей главе** рассмотрено применение метода агрегирования предпочтений на основе правила Кемени к обработке данных сличений. Приведено описание программного комплекса, разработанного для проведения численных экспериментальных исследований предложенного подхода. Представлены выявленные в ходе экспериментальной проверки работоспособность и робастность метода агрегирования предпочтений на множестве сгенерированных равномерно и нормально распределенных случайных результатов участников сличений в сравнении с другими подходами.

**В четвертой главе** даны рекомендации по выбору рационального числа  $m$  участвующих в сличениях лабораторий на основе геометрического распределения, связывающего вероятность определения опорного значения  $x_{\text{ref}}$  измеряемой величины с числом  $m$  лабораторий-участников сличений. Приведены результаты применения метода агрегирования предпочтений для обработки данных реальных сличений, опубликованных в отчетах Международного бюро мер и весов, и в других публикациях сотрудников национальных метрологических институтов, в области измерений электрических и магнитных величин.

## ГЛАВА 1

### СЛИЧЕНИЯ В ПРАКТИКЕ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Для подтверждения эквивалентности эталонов и обеспечения прослеживаемости на разных уровнях метрологических работ, подтверждения и признания достоверности результатов калибровки, испытаний и поверки в соответствии с требованиями международных и национальных стандартов необходимо проведение сличений как эталонов различных уровней, так и средств и методик измерений, используемых национальными метрологическими институтами, аккредитованными калибровочными (КЛ), испытательными (ИЛ) и поверочными (ПЛ) лабораториями.

Предметом рассмотрения первой главы являются сличения измерений электрических величин. Представлен анализ отечественных и зарубежных источников, международных рекомендаций, посвященных проведению сличений различных уровней, применяемых в практике измерений электрических величин, и алгоритмов обработки данных этой процедуры.

#### 1.1 Цели сличений на различных уровнях

Руководство международного комитета по мерам и весам (Comité International des Poids et Mesures, CIPM) определяет термин "*сличение эталонов*", как "сравнение размеров единицы физической величины (ФВ), воспроизводимых и (или) хранимых двумя или более эталонами" [58, 59].

В соответствии с межгосударственной рекомендацией РМГ 29 [32], гармонизированной с международным словарем по метрологии VIM3 [73], *сличение эталонов* – это установление соотношения между результатами измерений при воспроизведении и передаче единицы измерения или шкалы измерений данными эталонами одного уровня точности.

В зависимости от целей сличений, требований к подготовке, проведению и представлению результатов процедуры сличений, различают международные

сличения национальных эталонов и сличения на уровне КЛ, ИЛ и ПЛ, проводимые при процедурах проверки их квалификации (рисунок 1.1).

В *международных сличениях* СИРМ и региональных метрологических организаций (РМО) принимают участие хранители национальных эталонов – национальные метрологические институты (НМИ), обладающие наивысшей технической компетенцией и опытом в соответствующем виде измерений [1, 39, 40, 58].

Для мониторинга качества выполнения испытаний или измерений КЛ, ИЛ и ПЛ (далее – *аккредитованные лаборатории*) применяется *проверка квалификации лабораторий* посредством проведения *межлабораторных сличений* [8, 13, 21].

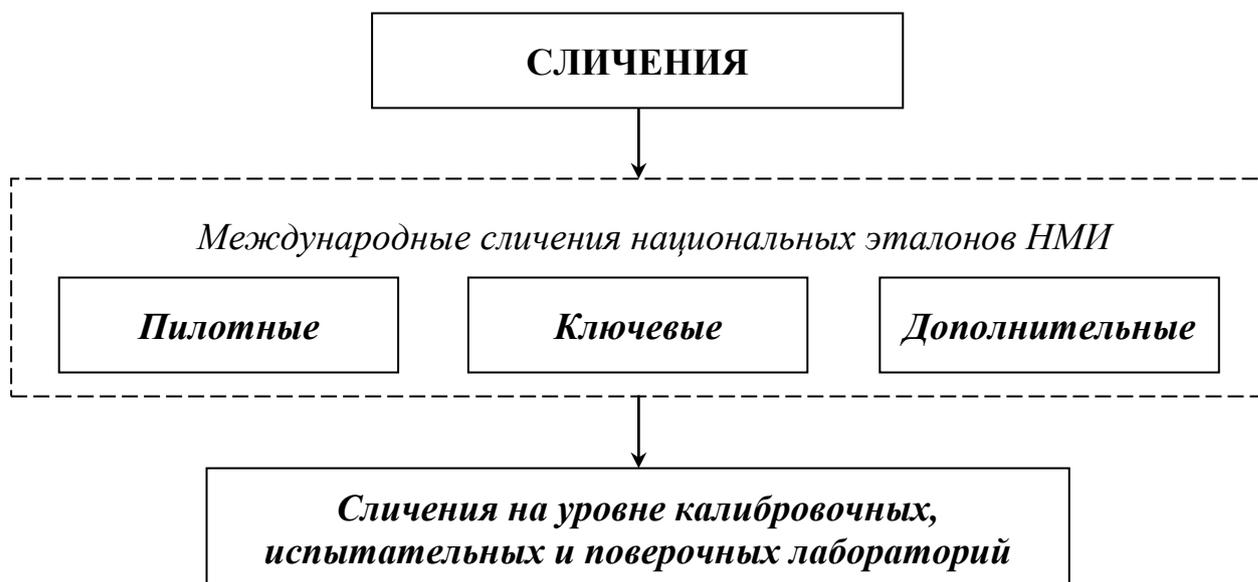


Рисунок 1.1 – Классификация сличений

### 1.1.1 Цели международных сличений

Подписание "Соглашения (Договоренности) о взаимном признании национальных эталонов и сертификатов калибровки и измерений, выдаваемых национальными метрологическими институтами" [47] (английская аббревиатура – MRA) стало основой для создания структуры, в рамках которой все участники (98 метрологических институтов) подтверждают и признают *калибровочные и измерительные возможности* (calibration and measurement capabilities, СМС) других НМИ.

Строки СМС, которые НМИ представляют в базу данных Международного бюро мер и весов (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM) [6, 36], являются основным показателем уровня выполнения измерений в стране.

Формирование международной базы данных (key comparison database, KCDB), в которой публикуются СМС НМИ [54], происходит по итогам проведения международных сличений национальных эталонов ФВ и установления, по результатам этой процедуры, степеней эквивалентности эталонов ФВ. Сличения являются самым важным элементом МРА, что подтверждается статьей 2.1 этого Соглашения, "НМИ обязуются признавать эквивалентность национальных эталонов, определенную по результатам международных сличений по соответствующим величинам и единицам" [36].

Тем самым Договоренность МРА закрепила статус международных сличений как приоритетный инструмент для подтверждения эквивалентности национальных эталонов ФВ и сравнительной оценки уровня и количества СМС стран-участников [39, 59]. При этом под эквивалентностью эталонов ФВ понимается эквивалентность измерений, проводимых в НМИ. Следовательно, наиболее применимой трактовкой понятия эквивалентности является воспроизводимость измерений в различных НМИ [16, 39].

СМС НМИ в области измерений электрических и магнитных величин в международной базе данных BIPM представлены отдельным классификатором, состоящим из 8 разделов. Таблицы СМС многих стран содержат по несколько сотен позиций.

В рамках деятельности BIPM создан Консультативный Комитет (КК) "Электричество и магнетизм". На уровне РМО имеются аналогичные технические комитеты. Например, при организации сотрудничества государственных метрологических учреждений стран Центральной и Восточной Европы (КООМЕТ), активным участником которой является Россия, функционирует Технический комитет (ТК) 1.3 "Электричество и магнетизм". Основными сферами деятельности ТК является организация международных сличений национальных эталонов стран-членов КООМЕТ и подготовка и региональная экспертиза данных

о СМС членов КООМЕТ в области измерений электрических и магнитных величин.

Таким образом, оценка СМС страны посредством сличений позволяет выявлять тенденции развития различных областей измерений и осуществлять планирование развития эталонной базы.

### **1.1.2 Цели межлабораторных сличений**

Как показала международная и национальная практика [13, 43, 53], проверка квалификации (ПК) лабораторий посредством межлабораторных сличений (МС) является надёжным инструментом оценивания компетентности аккредитованных лабораторий.

В настоящее время основополагающим документом в области проверки квалификации является международный стандарт ISO/IEC 17043 [8], в котором установлены следующие цели реализации программ ПК:

- определение способности отдельных лабораторий проводить конкретные испытания или измерения;
- установление сопоставимости результатов измерений или испытаний для различных методик измерений, используемых в разных странах;
- подтверждение заявленной неопределенности;
- установление эффективности использования новых методов испытаний или измерений.

Руководствуясь информацией, приведенной в источниках [9, 14, 39], можно разделить МС на три большие группы, в зависимости от цели их проведения (рисунок 1.2).

Результаты, полученные при обобщении данных литературы, позволяют заключить, что в первой группе сличений рассматриваются измерительные эксперименты, в рамках которых проверяется характеристика объекта, отражающая конкретное свойство исследуемого объекта [11, 22]. Вторая группа включает эксперименты по определению показателей сходимости и воспроизводимости результатов измерений, полученных по конкретной методике

измерений [12]. К третьей группе относятся МС аккредитованных лабораторий, в рамках которых подтверждается качество измерений, признается достоверность результатов испытаний, поверок и калибровок, что является необходимым условием для аккредитации лабораторий на соответствие стандарта ГОСТ ISO/IEC 17025 [8, 9, 10, 31].



Рисунок 1.2 – Цели межлабораторных сличений

Предметом рассмотрения следующих параграфов являются требования к организации и планированию сличений в зависимости от того, проводится эта процедура для сличения эталонов НМИ или для аккредитованных лабораторий. Для сличений различных уровней используются определенные алгоритмы оценивания и анализа данных, полученных по итогам их проведения.

## 1.2 Особенности проведения и обработки данных сличений различного уровня

### 1.2.1 Сличения национальных эталонов НМИ

Количество международных сличений после подписания Соглашения МРА значительно возросло. Возникла определенная сеть сличений: *ключевые* (КС), *дополнительные* (ДС), *пилотные* (ПС), которые определенным образом связывают национальные эталоны разных НМИ.

Основные положения, цели, терминологию по вопросам сличений национальных эталонов в рамках реализации Соглашения МРА, а также порядок их планирования, организации и проведения, регламентируются в специальных Руководствах РМО. в частности, EURAMET и COOMET [59-61]. Разработанные документы базируются на принципах, изложенных в "Руководстве по проведению ключевых сличений СИРМ" [55].

В соответствии с [29, 55, 58, 60] ответственным за организацию и проведение сличений, а также обработку результатов назначается *НМИ-пилот* и *координатор сличений* (сотрудник пилотного НМИ), который регулирует процесс проведения сличений, составляет подробный технический протокол и описывает методику проведения сличений. Координатор сличений исследует и организует отправку НМИ-участникам сличений *эталона сравнения*, т.е. "эталона, применяемого для сличений эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличены друг с другом" [60].

**Ключевые сличения СИРМ и РМО.** В КС СИРМ принимают участие, как правило, первичные национальные эталоны, в которых сличения решают две основные задачи:

- определение опорного значения ключевых сличений  $x_{\text{ref}}$ , и степени эквивалентности национальных эталонов  $d_i$  НМИ;
- подтверждение заявленных СМС.

Опорное значение, определенное при КС СИРМ используют для определения степеней эквивалентности национальных эталонов НМИ, которые принимали участие в этих сличения. *Степень эквивалентности  $i$ -го*

национального эталона  $d_i$  определяется как отклонение результата измерений  $x_i$  от опорного значения  $x_{\text{ref}}$  из формулы [56, 60]:

$$d_i = x_i - x_{\text{ref}}. \quad (1.1)$$

Соответствующую *неопределенность степени эквивалентности*  $i$ -го национального эталона получают из выражения [56, 60]:

$$u^2(d_i) = u^2(x_i) - u^2(x_{\text{ref}}). \quad (1.2)$$

Вводимая MRA степень эквивалентности является количественной мерой эквивалентности, которая предлагает новый способ выражения воспроизводимости результатов измерений в группе НМИ – участников сличений. Отклонение от опорного значения позволяет судить о систематическом сдвиге результатов данного НМИ по отношению ко всем участникам сличений [39, 78].

При КС СИРМ число участников ограничено. Актуальной задачей является распространение метрологической эквивалентности на большее число участников, заинтересованных во взаимном признании результатов измерений и калибровок [36, 39]. Эта задача решается в рамках региональных КС. НМИ, представленные в РМО и не принимавшие участие в КС СИРМ, приглашаются к участию в КС РМО. В роли связующей организации участвует НМИ, принимавший участие в КС СИРМ. Тем самым обеспечивается передача информации об опорном значении  $x_{\text{ref}}$  КС СИРМ в РМО.

**Дополнительные сличения.** В Руководстве СИРМ и руководствах РМО используется также понятие ДС [61]. Это сличения, которые проводятся КК СИРМ, ВРМ или РМО для удовлетворения специфических потребностей, не охваченных соответствующими КС. В ДС также включены сличения для поддержки уверенности в сертификатах калибровки и измерений – сертификатах, которые выдаются НМИ, связанные с испытаниями или калибровкой средств измерений или стандартных образцов. Опорным значением ДС является опорное значение вместе с его неопределенностью, установленные по результатам ДС национальных эталонов НМИ, которые проводили КК СИРМ, ВРМ или РМО [61].

Проведение ДС национальных эталонов необходимо для подтверждения СМС соответствующих НМИ [6, 40, 61]. При оценивании данных ДС подтверждаются неопределенности измерений, заявляемые участниками сличений, что является подтверждением соответствующих СМС.

**Пилотные сличения.** ПС являются сличения национальных и других эталонов НМИ, которые осуществляются до проведения КС КК СИРМ или РМО. Этот вид сличений проводится с целью предварительной оценки возможных отклонений результатов измерений в КС [58].

### **1.2.2 Проверка квалификации аккредитованных лабораторий**

При оценивании лаборатории во время аккредитации на соответствие требованиям ГОСТ ISO/IEC 17025 [10] должна быть продемонстрирована ее компетентность.

*Проверка квалификации (ПК)* в области калибровки, поверки или проведения испытаний на основе МС дает возможность оценить характеристики функционирования лабораторий по заранее установленным критериям [8].

В соответствии с [8, 9] термин "межлабораторные сличения" означает организацию, выполнение и оценивание измерений или испытаний одного и того же параметра нескольких подобных образцов двумя или более лабораториями. Наряду с термином "межлабораторные сличения" в этой области применимы термины "межлабораторные сравнительные испытания", "межлабораторные сличительные испытания" [9].

*Характеристика функционирования*, на основании рассмотренных источников [8, 13], представляет собой комплексный параметр, который характеризует способность лаборатории выполнять измерения или испытания и получать достоверные результаты, а также устанавливает эффективность и сравнимость методик проведения измерений и испытаний [13]. Значение оценки измеряемой величины, в рамках МС, называется не опорным, а приписанным значением  $x_{пр}$ , которое приписано конкретному свойству образца и обладает неопределенностью, приемлемой для целей ПК. Далее на основании разницы

между результатом  $x_i$  и приписанным значением  $x_{пр}$  оценивается лабораторное смещение  $D_i$  [8, 9]:

$$D_i = x_i - x_{пр}. \quad (1.3)$$

Основополагающим документом в области ПК является стандарт ГОСТ ISO/IEC 17043 [8]. В соответствии с стандартом [8] деятельность по реализации ПК осуществляется *провайдером*, т.е. организацией, планирующей и разрабатывающей программы ПК. Программы ПК затем реализуются за один или несколько туров в определенной области испытаний, измерений или контроля. В роли провайдеров могут выступать органы по аккредитации

Следует отметить, что существуют различные программы ПК, например, последовательные программы, при которых образец передается от одного участника к другому, или параллельные программы – в них провайдер распределяет эталон сравнения параллельно между участниками для проведения одновременных испытаний. При этом в МС в качестве эталона сравнения для рассылки участникам, используется специальный образец, которым может быть проба, стандартный образец или мера. Тур ПК представляет собой завершённую последовательность действий по распределению образцов, оценке результатов и предоставлению отчета о результатах ПК участникам.

Таким образом, анализ международных рекомендаций, стандартов и публикаций, посвященных проведению сличений различных уровней, показал, что Соглашение MRA установило основу для взаимного признания и принятия соответствующих результатов на уровне НМИ и аккредитованных лабораторий. Сличения на различных уровнях обеспечивают эквивалентность национальных эталонов и гарантируют единую прослеживаемость до средств измерений для всей сферы контроля в области измерений, калибровки, испытаний и поверки. Прослеживаемость на различных уровнях метрологических работ хорошо отражена на схеме, предложенной в [5] (рисунок 1.3).

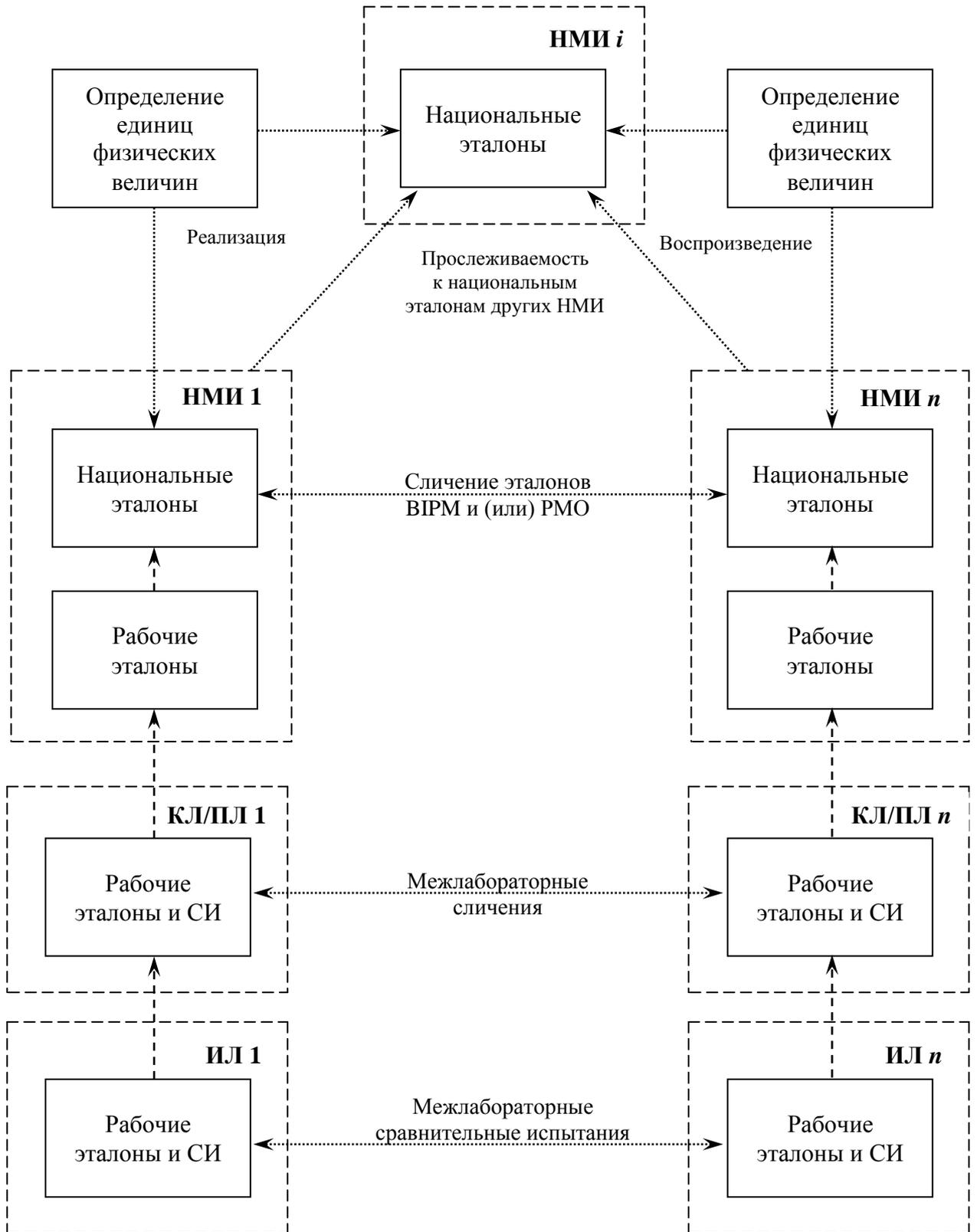


Рисунок 1.3 – Прослеживаемость результатов измерений на разных уровнях метрологических работ

На основании проведенного анализа сличений различного уровня сформируем алгоритм определения целей участия в сличениях НМИ-пилотов, НМИ-участников и аккредитованных лабораторий (рисунок 1.4).

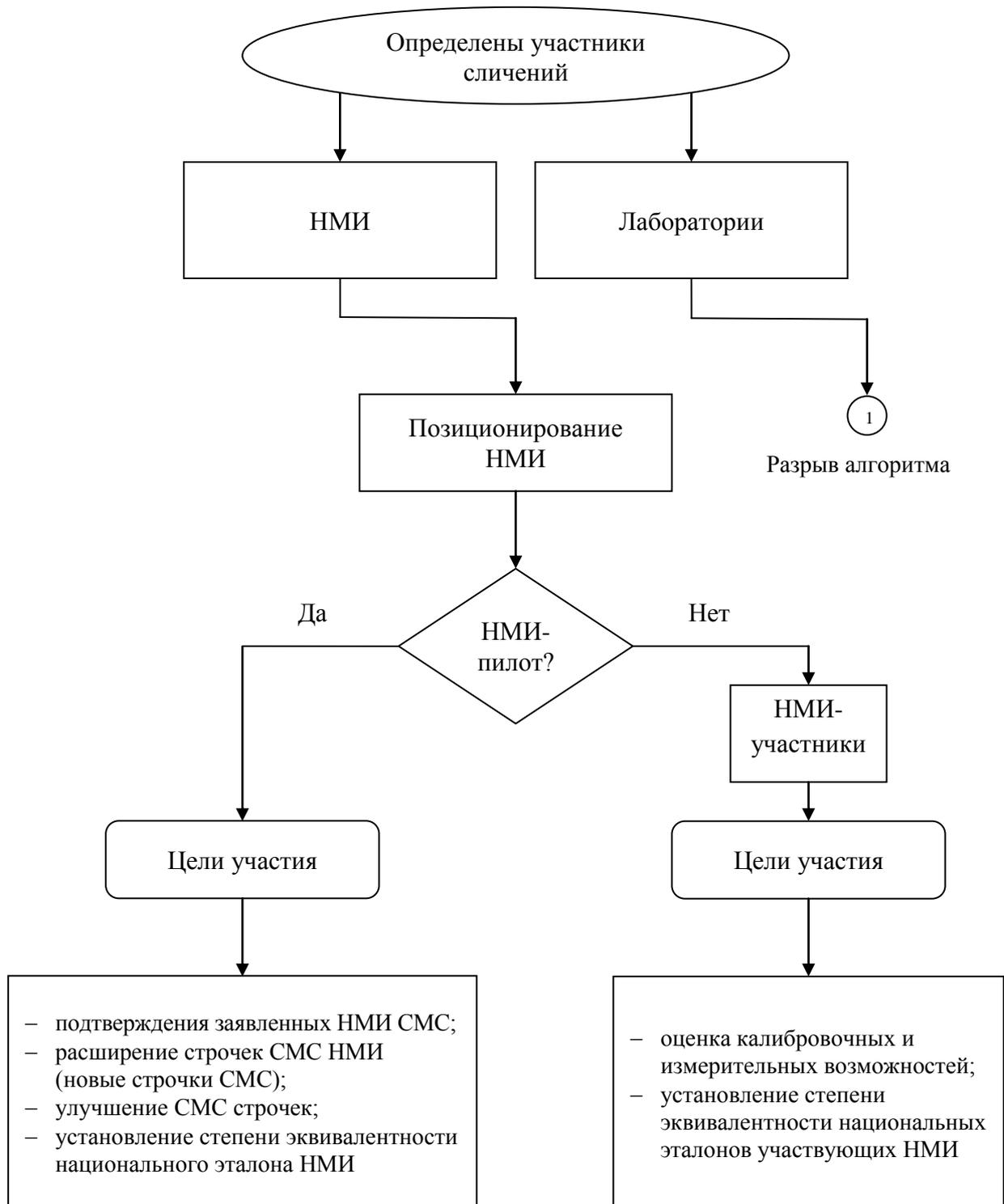




Рисунок 1.4 – Алгоритм определения целей участия в сличениях

### 1.2.3 Опорное значение сличений и наибольшее согласованное подмножество результатов измерений

Основной задачей сличений любого уровня является установление *опорного значения* измеряемой величины, наилучшим образом характеризующего наибольшее подмножество согласованных, т.е. надежных, результатов измерений (так называемое *наибольшее согласованное подмножество*, НСП). При этом, как было рассмотрено ранее, процедура сличений заключается в организации и проведении оценивания *заданного номинального значения* измеряемой величины  $x_{\text{НОМ}}$  эталона сравнения несколькими различными участниками сличений в соответствии с заранее установленными условиями.

Процедура сличений состоит из пяти основных этапов, представленных на рисунке 1.5. Для реализации программы сличений, координатор сличений осуществляет рассылку участникам сличений (далее – лабораториям) характеризующегося номинальным значением  $x_{\text{НОМ}}$  эталона сравнения для проведения измерений. Лаборатории направляют координатору сличений результаты измерений в форме оценок  $x_i$  номинального значения и соответствующих стандартных неопределенностей  $u(x_i)$ . Координатор сличений проводит обработку полученных результатов и формирует заключение для каждой лаборатории-участника.

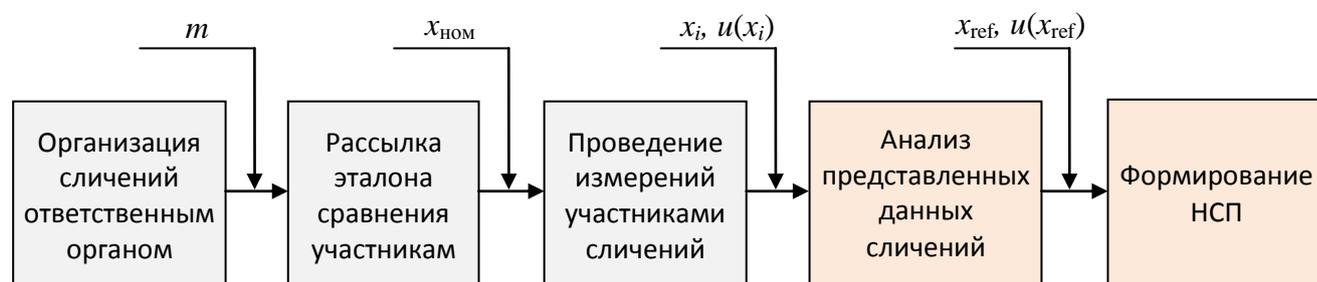


Рисунок 1.5 – Этапы проведения сличений

Нахождение опорного значения  $x_{\text{ref}}$  и связанного с ним НСП является важной задачей при проведении сличений.

Под *опорным значением*  $x_{\text{ref}}$  понимается оценка, наилучшим образом характеризующая номинальное значение  $x_{\text{НОМ}}$  измеряемой величины, полученная по результатам всех участников сличений. В РМГ 29 [32] указано, что опорное значение величины используют в качестве основы для сопоставления со значениями величин того же рода.

При КС опорное значение используется для определения степени эквивалентности национальных эталонов, обеспечивая сравнительную оценку уровня воспроизводимости измерений в различных НМИ. КС СИРМ и РМО являются основным техническим инструментом МРА для распространения прослеживаемости результатов измерений, осуществляемых в НМИ, к опорному значению сличений, как условно принятой на определенный период наилучшей реализации единицы ФВ [39, 41]. В этом случае, опорное значение понимается как наилучшая оценка номинального значения  $x_{\text{НОМ}}$  эталона сравнения, полученная

по согласованной группе результатов измерений  $x_i$ , представленных каждым из  $m$  участников. Тем самым происходит проверка совместимости неопределенностей  $u(x_i)$  этих результатов.

В МС судить о качестве измерений в аккредитованных лабораториях можно по отклонению их результатов от некоторого фиксированного значения измеряемой величины, установленного с высокой точностью, т.е. приписанного значения. Для МС опорное значение может устанавливаться эталонной лабораторией, т.е. квалифицированной измерительной лабораторией, с помощью метода с достаточно малой неопределенностью [13]. Либо это значение может выявляться с помощью группы экспертных лабораторий, т.е. лабораторий имеющих признанный авторитет в данной области измерений. Или может определяться как значение, согласованное с данными всех участников МС [99]. И в тех и других случаях, отклонения результатов лабораторий от опорного значения в рамках проведения МС позволяют судить о систематическом смещении результатов определенной лаборатории.

Для того, чтобы установить НСП, необходимо идентифицировать отличающиеся результаты и исключить их при получении опорного значения. При этом несогласованные данные сличений свидетельствуют о том, что некоторые участники не подтвердили заявленных неопределенностей измерений [2, 42]. Так как при проведении сличений, результаты измерений должны быть взаимно совместимыми, необходима процедура для идентификации и обращения с отличными от основной группы результатами измерений.

Существуют различные процедуры определения опорного значения, идентификации выбросов и формирования НСП участников сличений [27, 42, 57, 65]. Выбор конкретного метода проверки согласованности данных сличений зависит от вида исследуемого эталона сравнения, особенностей испытаний и количества участвующих в сличениях лабораторий. В следующем параграфе будут рассмотрены наиболее используемые алгоритмы обработки данных в практике сличений.

### 1.3 Алгоритмы обработки данных сличений

#### 1.3.1 Процедура А обработки данных сличений

В практике сличений как на международном, так и национальном уровнях широко применяется так называемая Процедура А [14, 56, 57], в которой при определении НСП используется *стратегия последовательного исключения* результатов, влияющих на несогласованность по критерию  $\chi^2$  средневзвешенного значения  $y$  с данными лабораторий-участников.

Для этого при оценке опорного значения используется средневзвешенное значение  $y$  [57]:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{u^2(x_i)}}, \quad (1.4)$$

где  $x_i$  – измеренное значение, предоставленное  $i$ -й лабораторией,  $i = 1, \dots, m$ ;

$u(x_i)$  – соответствующая стандартная неопределенность;

$m$  – число участвующих в сличениях лабораторий.

Стандартная неопределенность значения  $y$  имеет вид [57]:

$$u^2(y) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{u^2(x_i)} \right)^{-1}. \quad (1.5)$$

Затем вычисляется выборочное значение критерия Пирсона  $\chi^2(y)$  [57]:

$$\chi^2(y) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i - y}{u(x_i)} \right)^2. \quad (1.6)$$

Таким образом, в этой процедуре средневзвешенное значение  $y$  принимается в качестве опорного значения  $x_{\text{ref}}$  только в том случае, если подтвердилась его согласованность по критерию  $\chi^2$  Пирсона с данными лабораторий-участников [57]:

$$\chi^2(y) \leq \chi_{v,\alpha}^2, \quad (1.7)$$

где  $\chi^2(y)$  – выборочное значение критерия Пирсона;

$\chi_{v,\alpha}^2$  – табличное значение критерия Пирсона.

Результат признается *несогласованным*, если вычисленное для него *нормализованное отклонение*  $|E_n| > 2$ , где [57]:

$$E_n = \frac{x_i - y}{\sqrt{u^2(x_i) - u^2(y)}}. \quad (1.8)$$

Процесс исключения одного несогласованного результата повторяется до тех пор, пока не будут достигнута согласованность результатов по критерию  $\chi^2$ . Для полученного в ходе этой процедуры НСП определяется опорное значение и его неопределенность по формулам (1.4) и (1.5) для  $m'$  лабораторий, предоставивших надежные результаты.

Формальная запись Процедуры А на основании статьи [57] имеет представленный ниже вид.

---

#### Алгоритм 1 Процедура А обработки данных сличений

---

##### Вход:

$x_i$  : измеренное значение, предоставленное  $i$ -й лабораторией,  $i = 1, \dots, m$

$u(x_i)$ : соответствующая стандартная неопределенность

##### Пусть:

$m$  : число участвующих в сличениях лабораторий

$m'$  : число лабораторий, результаты которых признаны надежными

$x_{\text{ref}}$  : опорное значение измеряемой величины

$u(x_{\text{ref}})$  : неопределенность опорного значения

$y$  : средневзвешенное значение

$u(y)$ : неопределенность средневзвешенного значения

$\chi^2(y)$ : выборочное значение критерия Пирсона

$\chi_{v,\alpha}^2$ : табличное значение критерия Пирсона

$E_n$  : нормализованное отклонение

$inc$  : наличие (1) / отсутствие (0) несогласованных результатов

1:  $m' \leftarrow m; inc \leftarrow 1$ ; [инициализация]

2: **while** ( $m' \neq 0 \wedge inc = 1$ ) **do**

- 3:  $y \leftarrow \frac{\sum_{i=1, \dots, m'} x_i u^{-2}(x_i)}{\sum_{i=1, \dots, m'} u^{-2}(x_i)}; u^2(y) \leftarrow 1 / \sum_{i=1, \dots, m'} u^{-2}(x_i)$
- 4:  $\chi^2(y) \leftarrow \sum_{i=1, \dots, m'} \left( \frac{x_i - y}{u(x_i)} \right)^2$
- 5: **if**  $\chi^2(y) \leq \chi_{v, \alpha}^2$  **then**  $x_{\text{ref}} \leftarrow y, u(x_{\text{ref}}) \leftarrow u(y); inc \leftarrow 0$
- 6: **else**  $E_n(i) \leftarrow \frac{x_i - y}{\sqrt{u^2(x_i) - u^2(y)}}, i = 1, \dots, m'$
- 7:  $E_n^{\text{max}} \leftarrow \max\{E_n(i) \mid i = 1, \dots, m'\}; imax \leftarrow i(E_n^{\text{max}})$
- 8: **if**  $|E_n^{\text{max}}| > 2$  **then** удаляем  $x_{imax}$  и  $u(x_{imax})$ ;  $m' \leftarrow m' - 1$
- end else**
- end if**
- end while**

**Выход:**

$x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})$

---

Применение алгоритма обработки данных сличений на основании Процедуры А получило широкое распространение для обработки результатов сличений [13, 101]. Процедура А может обоснованно применяться, если результаты измерений, предоставленные участниками сличений, характеризуются нормальным распределением и являются независимыми.

### 1.3.2 Алгоритмы оценки результатов межлабораторных сличений на основе статистических критериев

В практике проведения МС используются статистические методы, характеризующие способность участников сличений проводить испытания, основанные, например, на вычислениях разности результата измерений лаборатории и приписанного значения, определенного провайдером сличений, процентной разности, процентилей или рангов [9, 66, 72].

В соответствии с ГОСТ ISO 13528 [9], проверка согласованности результатов измерений, предоставленных аккредитованными лабораториями, и формирование НСП осуществляется при помощи статистического анализа данных на наличие выбросов.

Анализ различных международных и отечественных источников [66, 99, 105] показал, что наибольшее распространение для определения выделяющихся результатов (выбросов, т.е. результатов, которые не согласуются с остальными в пределах заявленных неопределенностей) в ПК, получило использование критерия  $E_n$  и количественного  $z$ -показателя [105].

Стандарт ГОСТ Р ISO 5725 [12] предполагает также использование критериев Граббса для определения несогласованных результатов измерений [16, 66]. При этом предложенные критерии дают возможность проверить наличие в выборке одного выделяющегося результата, который может быть наименьшим или наибольшим, либо двух наименьших или двух наибольших несогласованных результатов.

Для проверки гипотезы  $H_0$ , которая заключается в том, что все  $x_1, x_2, \dots, x_m$  принадлежат одной генеральной совокупности, строится вариационный ряд  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(m)}$ . При этом проверяется конкурирующая гипотеза  $H_1$ , которая строится на предположении о том, что наибольшее выборочное значение  $x_{(m)}$ , при его проверке на выброс, принадлежит некоторому другому закону, в отличие от  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m-1)}$  [16].

Вычисляемая статистика  $G_m$  при проверке на выброс наибольшего выборочного значения  $x_{(m)}$  принимает вид [12]:

$$G_m = (x_{(m)} - \bar{x}) / \hat{\sigma}. \quad (1.9)$$

При этом

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}, \quad (1.10)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{m-1}, \quad (1.11)$$

где  $\bar{x}$  – среднее значение результатов измерений  $m$  лабораторий;

$\hat{\sigma}$  – оценка стандартного отклонения.

Проверка на выброс наименьшего выборочного значения  $x_{(1)}$  определяется следующим образом [12]:

$$G_1 = (\bar{x} - x_{(1)})/\hat{\sigma}. \quad (1.12)$$

Максимальный или минимальный элемент выборки будет являться несогласованным результатом в том случае, если превышает соответствующее критическое значение статистики:  $G_m \geq G_{m,1-\alpha}$  или  $G_1 \geq G_{1,1-\alpha}$  [16].

Алгоритм определения выбросов при использовании статистики критерия Граббса имеет следующий вид.

---

## Алгоритм 2 Процедура выявления выбросов на основе статистики критерия Граббса

---

### Вход:

$x_i$  : измеренное значение, предоставленное  $i$ -й лабораторией,  $i = 1, \dots, m$

$u(x_i)$ : соответствующая стандартная неопределенность

### Пусть:

$m$  : число участвующих в сличениях лабораторий

$m'$ : число лабораторий, результаты которых признаны надежными

$\bar{x}$  : среднее значение результатов измерений  $m$  лабораторий

$x_{(1)}$ : наименьшее выборочное значение

$x_{(m)}$ : наибольшее выборочное значение

$G$  : статистика Граббса

$G_{m,1-\alpha}$  : табличное значение

$\alpha$  : уровень значимости

$\hat{\sigma}$  : оценка стандартного отклонения

[построение вариационного ряда]

1:  $x_{(1)} \leftarrow \min\{x_i \mid i = 1, \dots, m\}; x_{(m)} \leftarrow \max\{x_i \mid i = 1, \dots, m\}$

$$2: \quad x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(m)}$$

$$3: \quad \bar{x} \leftarrow \frac{\sum_{i=1, \dots, m'} x_i}{m'}; \hat{\sigma}^2 \leftarrow \frac{\sum_{i=1, \dots, m'} (x_i - \bar{x})^2}{m' - 1}$$

[проверка на выброс наибольшего результата]

$$4: \quad G_m \leftarrow (x_{(m)} - \bar{x}) / \hat{\sigma}$$

5:     **if**  $G_m \geq G_{m, 1-\alpha}$  **then** удаляем  $x_{(m)}$ ;  $m' \leftarrow m' - 1$   
        **end if**

[проверка на выброс наименьшего результата]

$$6: \quad G_1 \leftarrow (\bar{x} - x_{(1)}) / \hat{\sigma}$$

7:     **if**  $G_1 \geq G_{1, 1-\alpha}$  **then** удаляем  $x_{(1)}$ ;  $m' \leftarrow m' - 1$   
        **end if**

**Выход:**

$m'$

---

Рассмотренный алгоритм позволяет выявлять и корректно отбраковывать выделяющиеся результаты измерений. Но в соответствии с требованиями стандарта [12], проверка может проводиться только на наличие в выборке одного либо двух выбросов. Это может привести как к пропуску выделяющихся результатов в выборке, так и к причислению к выбросам данных, не являющихся таковыми. Следует отметить, что к *недостаткам* распределения статистик Граббса относятся:

- зависимость от вида закона распределения, которому принадлежат наблюдаемые величины;
- зависимость распределения данных статистик от объема выборок  $m$ .

### 1.3.3 Алгоритм Нильсена

В качестве представителя робастных методов обработки данных сличений в статье [91] предложен алгоритм Нильсена, реализующий процедуру голосования

по правилу "простого большинства", и использованный для проведения сличений в работе [53].

Каждый интервал неопределенности  $u(x_i)$  рассматривается как задающий границы прямоугольного распределения измеряемых значений. Тогда в соответствии с алгоритмом, лаборатория "дает один голос" каждому значению в пределах предоставленного ею интервала неопределенности и ни одного голоса – значениям вне этого интервала. Подсчитывая сумму "голосов" для каждой лаборатории, можно определить значение, которое большинство лабораторий считают наиболее вероятным опорным значением  $x_{\text{ref}}$  (рисунок 1.6). НСП формируется таким образом, чтобы исключить те интервалы неопределенности лабораторий, которые не содержат выявленное опорное значение.

Формальная запись алгоритма Нильсена представлена ниже.

---

### Алгоритм 3 Алгоритм Нильсена

---

#### Вход:

$x_i$  : измеренное значение, предоставленное  $i$ -й лабораторией,  $i = 1, \dots, m$

$u(x_i) = [u_{\text{н}}(x_i), u_{\text{в}}(x_i)]$ : соответствующая стандартная неопределенность

#### Пусть:

$m$  : число участвующих в сличениях лабораторий

$m'$  : число лабораторий, результаты которых признаны надежными

$u(x_{\text{ref}})$  : неопределенность опорного значения

$S_i$  : сумма голосов

$S_{\text{max}}$  : максимальное количество "голосов"

$x_{i_{\text{max}}}$  : измеренное значение, представленное лабораторией, набравшей максимальное количество "голосов"

$i_{\text{max}}$ : индекс лаборатории, набравшей максимальное количество голосов

[нахождение лаборатории с максимальной суммой голосов]

1: **for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**

2:      $S_i \leftarrow 0$

3:     **for**  $j = 1$  **to**  $m$  **do**

4:       **if**  $i \neq j$  **then**  
 5:           **if**  $(x_i \leq x_j + u_b(x_i) \wedge x_i \geq x_j - u_n(x_i))$  **then**  $S_i \leftarrow S_i + 1$   
           **end for**  
 6:   **if**  $S_i > S_{\max}$  **then**  $x_{imax} \leftarrow x_i; imax \leftarrow i$   
       **end for**

[нахождение опорного значения]

7:  $x_{\text{ref}} \leftarrow x_{imax}$

[нахождение ненадежных результатов]

9:  $m' \leftarrow m;$

10: **for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**

11:   **if**  $x_{\text{ref}} \notin u(x_i)$  **then** удаляем  $x_i$  и  $u(x_i)$ ;  $m' \leftarrow m' - 1$

**end if**

[нахождение интервала неопределенности опорного значения]

11:  $u^2(x_{\text{ref}}) \leftarrow 1 / \sum_{i=1, \dots, m'} u^{-2}(x_i)$

**Выход:**

$x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})$

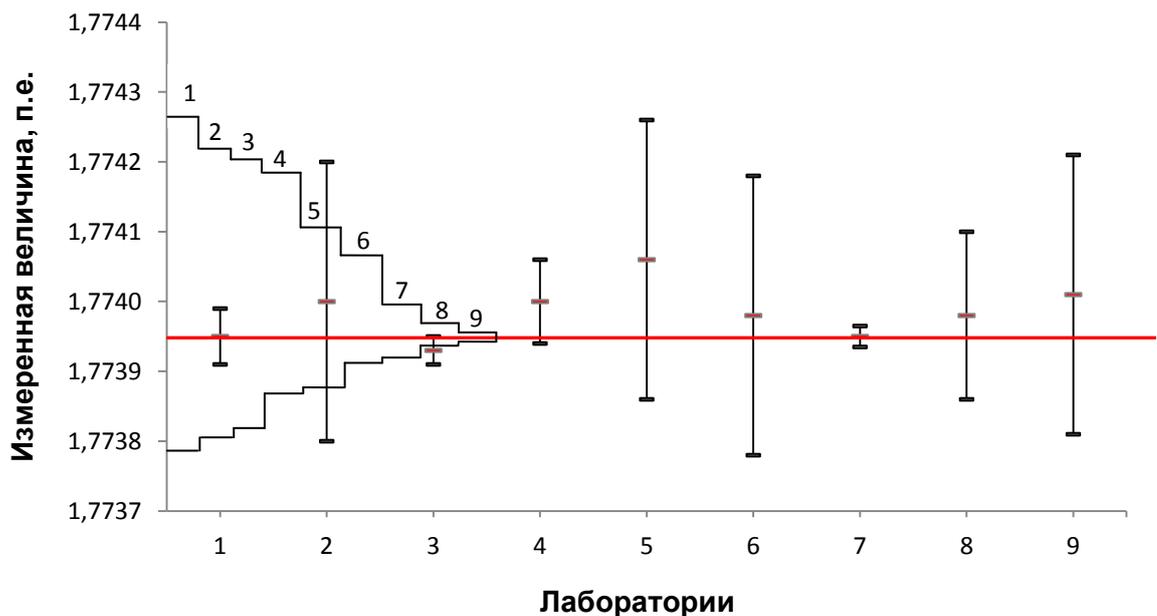


Рисунок 1.6 – Пример обработки данных сличений алгоритмом Нильсена

Как утверждает автор статьи [91], предложенный им алгоритм является одним из робастных методов обработки результатов сличений, работоспособных в случаях, когда закон распределения результатов измерений лабораторий отличается от нормального или неизвестен. Но правило "простого большинства", примененное в рассмотренном подходе, не является исчерпывающим, что при голосовании может приводить к значительной неточности результатов.

### **Выводы к главе 1**

1. Проведен анализ отечественных и зарубежных источников, международных рекомендаций, посвященных проведению сличений различных уровней, применяемых в практике измерений электрических величин, и алгоритмов обработки данных этой процедуры.
2. Нахождение опорного значения и связанного с ним наибольшего согласованного подмножества является важной задачей при проведении сличений.
3. В международных нормативных документах для обработки данных сличений рекомендована Процедура А, которая при оценке опорного значения использует средневзвешенное значение  $y$  и соответствующую неопределенность  $u(y)$ . Процедура А может обоснованно применяться, если результаты измерений, предоставленные участниками сличений, характеризуются нормальным распределением и являются независимыми.
4. Статистические методы (например, на основе критерия Граббса), применяемые для обработки данных сличений, обычно накладывают ограничения на допустимое количество лабораторий-участников, а также имеют невысокую дискриминирующую способность, позволяющую различать действительно ненадежные и надежные лаборатории.
5. В качестве представителя робастных методов обработки данных сличений в работе рассмотрен алгоритм Нильсена, реализующий процедуру голосования по правилу "простого большинства". Правило "простого большинства" не

является исчерпывающим, что при голосовании может приводить к значительной неточности результатов.

6. Проведенный сравнительный анализ методов оценки данных сличений показал, что существует необходимость разработки метода, который не зависит от вида закона распределения и надежно идентифицирует несогласованные результаты. Одним из возможных подходов при этом является агрегирование предпочтений.

## ГЛАВА 2

### АГРЕГИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В этой главе введено понятие ранжирования (слабого порядка) как формы представления предпочтений и рассмотрены основные правила нахождения единственного ранжирования для заданных  $m$  ранжирований  $n$  альтернатив. Нахождение единственного ранжирования называется агрегированием предпочтений, а правила его нахождения имеют эквивалентные формулировки в терминах теории голосования.

#### 2.1 Правила агрегирования предпочтений

##### 2.1.1 Отношение предпочтения

Пусть необходимо *ранжировать* объекты по степени проявления некоторого признака, т.е. установить некоторое *отношение предпочтения* на множестве объектов. Обычно понятие предпочтения моделируется с помощью специально построенного бинарного отношения, которое называется *слабым порядком* [48-49].

Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество сравниваемых альтернатив (объектов). Бинарное отношение  $\lambda$  называется *отношением предпочтения* на множестве  $A$ , если

$$\lambda = \rho \cup \tau. \quad (2.1)$$

То есть отношение предпочтения  $\lambda$  является объединением двух отношений: отношения *строгого предпочтения*  $\rho$ , которое является:

- антирефлексивным ( $\overline{a_i \rho a_i}$  для всех  $i$ );
- антисимметричным (для всех  $i, j$  из  $a_i \rho a_j$  и  $a_j \rho a_i$  следует  $a_i = a_j$ );
- транзитивным (для всех  $i, j, k$  из  $a_i \rho a_j$  и  $a_j \rho a_k$  следует  $a_i \rho a_k$ ),

и отношения *безразличия*  $\tau$ , которое является рефлексивным ( $a_i \tau a_i$  для всех  $i$ ) и симметричным (для всех  $i, j$  из  $a_i \tau a_j$  следует  $a_j \tau a_i$ ). То есть, если

- $a_i$  строго предпочитается  $a_j$ , то пишут  $a_i \rho a_j$  или  $a_i \succ a_j$ ,

– выбор между  $a_i$  и  $a_j$  безразличен, то пишут  $a_i \tau a_j$  или  $a_i \sim a_j$ .

Отношение безразличия удобно трактовать как эквивалентность. Поэтому в дальнейшем изложении будем альтернативы  $a_i \sim a_j$  называть *эквивалентными*.

Отношение предпочтения (слабый порядок)  $\lambda$  является, таким образом, рефлексивным ( $a_i \lambda a_i$  для любых  $a_i \in A$ ), транзитивным (для всех  $i, j, k$  из  $a_i \lambda a_j$  и  $a_j \lambda a_k$  следует  $a_i \lambda a_k$ ) и полным (для любых  $a_i, a_j \in A$  выполняется либо  $a_i \lambda a_j$ , либо  $a_j \lambda a_i$ ).

*Слабые порядки* обычно представляются *ранжированиями* объектов, имеющими вид цепочки:

$$\lambda_k = (a_1 \succ a_2 \dots \sim a_s \sim a_t \succ \dots \sim a_n). \quad (2.2)$$

Отношение предпочтения  $\lambda$  можно представить ( $n \times n$ ) *матрицей отношения*  $R = [r_{ij}]$ , строки и столбцы которой соответствуют альтернативам из  $A$ , а ее элементы позволяют различать отношения  $\succ$ ,  $\prec$  и  $\sim$ :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \succ a_j \\ 0, & \text{если } a_i \sim a_j \\ -1, & \text{если } a_i \prec a_j \end{cases} \quad (2.3)$$

Заметим, что эта матрица *антисимметрическая*, т.е.  $r_{ij} = -r_{ji}$  для всех  $i, j$ , и *транзитивная*, т.к., в силу транзитивности отношения  $\lambda$ , если  $r_{ij} \geq 0$  и  $r_{jk} \geq 0$ , то  $r_{ik} \geq 0$  [15, 77]. Таким образом, матрица отношений может иметь следующий вид:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Предположим теперь, что  $n$  объектов описываются с помощью  $m$  отношений предпочтения. Тогда на множестве  $n$  объектов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  имеем множество отношений предпочтения (ранжирований)  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ .

Множество ранжирований  $\Lambda$  называется *профилем предпочтения* для заданных  $m$  и  $n$ . Например, для  $m = 5$  и  $n = 6$  может получиться следующий профиль предпочтения:

$$\begin{aligned}
\lambda_1: a_1 \succ a_2 \sim a_5 \succ a_6 \succ a_4 \succ a_3 \\
\lambda_2: a_5 \succ a_6 \succ a_2 \succ a_3 \sim a_4 \succ a_1 \\
\lambda_3: a_3 \succ a_1 \succ a_6 \sim a_4 \succ a_2 \succ a_5 . \\
\lambda_4: a_3 \succ a_6 \succ a_1 \succ a_2 \sim a_4 \succ a_5 \\
\lambda_5: a_6 \succ a_1 \succ a_2 \sim a_3 \succ a_4 \succ a_5
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

Если учесть, что порядок предпочтения в каждом ранжировании всегда ориентирован слева направо, можно использовать более компактное представление профиля:

$$\begin{aligned}
& 1 \ 2\sim 5 \ 6 \ 4 \ 3 \\
& 5 \ 6 \ 2 \ 3\sim 4 \ 1 \\
& 3 \ 1 \ 6\sim 4 \ 2 \ 5 . \\
& 3 \ 6 \ 1 \ 2\sim 4 \ 5 \\
& 6 \ 1 \ 2\sim 3 \ 4 \ 5
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Приведем другой пример [81]. Пусть некоторый предмет исследования характеризуется  $m$  свойствами. В частности, предположим, что некоторая производственная площадь характеризуется четырьмя разнородными показателями: влажностью ( $\lambda_1$ ), температурой ( $\lambda_2$ ), скоростью движения воздуха ( $\lambda_3$ ) и наличием опасного для персонала рабочего оборудования ( $\lambda_4$ ), см. рисунок 2.1. Пусть площадь разбита на  $n$  зон, тогда каждая зона характеризуется своим собственным набором проявлений  $m$  свойств. Легко получить  $m$  ранжирований на множестве  $n$  объектов (зон)  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ . Тогда имеем множество ранжирований (профиль предпочтения)  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4\}$  пяти зон для заданных четырех свойств:

$$\begin{aligned}
\lambda_1: a_2 \sim a_3 \succ a_5 \sim a_4 \succ a_1 & \text{ – по влажности} \\
\lambda_2: a_5 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1 \sim a_3 & \text{ – по температуре} \\
\lambda_3: a_3 \succ a_4 \succ a_5 \sim a_2 \succ a_1 & \text{ – по скорости движения воздуха} \\
\lambda_4: a_4 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_1 \sim a_2 & \text{ – по присутствию опасного оборудования.}
\end{aligned}$$

Введем определение *агрегирования предпочтений*.

Агрегировать  $m$  предпочтений, заданных на множестве  $n$  альтернатив – это значит определить *единственное* отношение предпочтения  $\beta$ , которое обеспечивает между ранжированиями исходного профиля наилучший компромисс.

Ранжирование  $\beta$  будем называть *ранжированием консенсуса*.

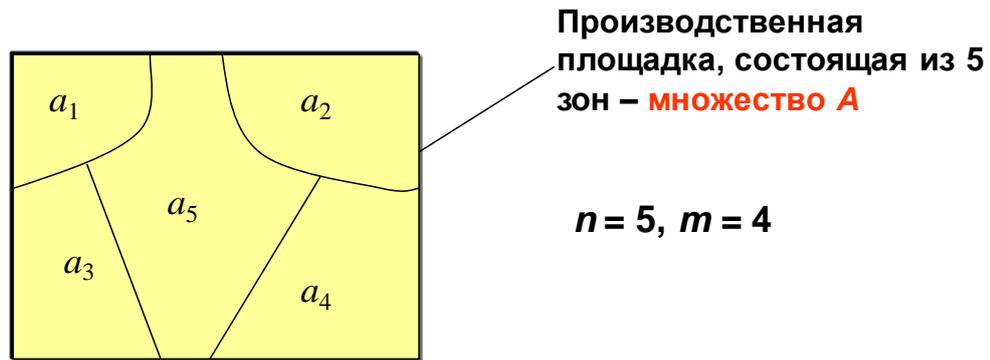


Рисунок 2.1 – Пример профиля предпочтения

Математический подход к проблеме агрегирования предпочтений впервые был исследован в теории социального выбора [77, 95, 106] в качестве *проблемы голосования* или группового решения, в которой роль множества  $A$  выполняет множество  $n$  кандидатов, которые ранжируются группой из  $m$  избирателей. То есть проблема голосования состоит в нахождении такого кандидата из  $n$  кандидатов, которому  $m$  избирателей оказывают наибольшую степень поддержки.

Трактовка понятия "наилучший компромисс" определяет содержание каждого из правил (принципов) нахождения ранжирования консенсуса для заданных  $m$  ранжирований  $n$  альтернатив. В следующем параграфе будут рассмотрены наиболее известные правила голосования (агрегирования предпочтений).

### 2.1.2 Правило простого большинства

Правило простого большинства состоит в следующем: победителем голосования является тот кандидат, который большинством избирателей поставлен на *первое место*.

Рассмотрим пример применения правила простого большинства к проблеме голосования для профиля предпочтения (2.5). Из профиля следует, что кандидаты  $a_1, a_2, \dots, a_6$  получили следующие голоса за первое место:  $a_1$  получает 1 голос,  $a_2$  – 0 голосов,  $a_3$  – 2 голоса,  $a_4$  – 0 голосов,  $a_5$  – 1 голос,  $a_6$  – 1 голос. Следовательно, по правилу простого большинства, победителем голосования является кандидат 3,

а ранжирование консенсуса для данного примера, полученное с помощью принципа простого большинства имеет вид:

$$\beta = \{a_3 \succ a_1 \sim a_5 \sim a_6 \succ a_2 \sim a_4\}. \quad (2.6)$$

Однако решение (2.6) связано с противоречием, так как из профиля (2.5) видно, что три избирателя из пяти предпочли кандидата 6 кандидату 3, следовательно, кандидат 6 должен выиграть у кандидата 3 хотя бы во втором туре выборов.

При таком способе голосования остается также неясным, кто должен занять вторую позицию в результатах голосования: кандидат 1 занял один раз первое место и два раза – второе. Кандидат 3 – два раза первое и ни одного второго, вроде бы кандидат 1 должен занять второе место, но из кандидатов 3 и 1 тремя избирателями отдано предпочтение кандидату 3 и лишь два избирателя предпочли кандидата 1.

Таким образом, правило простого большинства далеко не всегда приводит к корректным результатам, если число кандидатов больше единицы.

### 2.1.3 Правило Борда

Жан-Шарль де Борда в 1784 г. [17] предложил принцип, в соответствии с которым каждой альтернативе присваивается количество баллов в зависимости от ее места в ранжировании: 0 баллов за последнее место, 1 балл за предпоследнее место и т.д. до  $n - 1$  баллов за первое место. Баллы каждой альтернативы суммируются по всем ранжированиям, и ее место в отношении консенсуса определяется полученной суммой.

Для подсчета баллов Борда удобно пользоваться  $(n \times n)$  *электоральной матрицей*  $S = [s_{ij}]$ , где

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ij}^k, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (2.7)$$

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{если } a_i^k \succ a_j^k \\ 1/2 & \text{если } a_i^k \sim a_j^k \\ 0 & \text{если } a_i^k \prec a_j^k \end{cases} \quad (2.8)$$

Матрица  $S$  обладает очевидным свойством:  $s_{ij} + s_{ji} = m$ .

В таблице 2.1 приведена электоральная матрица для профиля (2.5). Сумма баллов, полученных альтернативой в каждом ранжировании по правилу Борда, равна сумме элементов соответствующей строки электоральной матрицы. Эти суммы показаны в крайнем правом столбце таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Электоральная матрица для профиля (2.5)

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	Счет Борда
$a_1$	0	4	2	4	4	2	<b>8</b>
$a_2$	1	0	2½	3½	3½	1	<b>11½</b>
$a_3$	3	2½	0	3½	3	2	<b>14</b>
$a_4$	1	1½	1½	0	3	½	<b>7½</b>
$a_5$	1	1½	2	2	0	2	<b>8½</b>
$a_6$	3	4	3	4½	3	0	<b>17½</b>

Из данных таблицы 2.1 следует, что ранжирование консенсуса в соответствии с принципом Борда имеет вид:  $\beta = \{a_6 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_4\}$ .

Однако из электоральной матрицы видно, что три из пяти (т.е. большинство) избирателей считают, что  $a_3 \succ a_1$  и  $a_4 \succ a_5$ , а в полученном ранжировании консенсуса отражено противоположное мнение. То есть правило Борда, как и правило простого большинства, может приводить к некорректным результатам голосования.

#### 2.1.4 Правило Кондорсе

Пытаясь преодолеть недостатки правила Борда, маркиз де Кондорсе в 1785 г. предложил свой принцип выбора: в каждом *парном сравнении* кандидатов предпочтительным кандидатом является тот, что предпочитается большинством

избирателей, т.е.  $a_i \succ a_j$ , если и только если  $s_{ij} > s_{ji}$  для всех  $i \neq j$ . Иными словами, если альтернатива  $a_i$  получила большинство голосов в парном сравнении со всеми другими альтернативами, эта альтернатива объявляется победителем и называется *альтернативой Кондорсе*.

Для профиля (2.5) правило Кондорсе дает следующее ранжирование консенсуса:  $\beta = \{a_6 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5\}$ .

Действительно, это следует из построенной по электоральной матрице таблицы 2.2, в колонках которой, обозначенных символами  $\succ$ ,  $\prec$  и  $\sim$ , содержатся соответственно числа побед, поражений и ничьих для каждого из кандидатов.

Таблица 2.2 – Результаты парных сравнений кандидатов профиля (2.5)

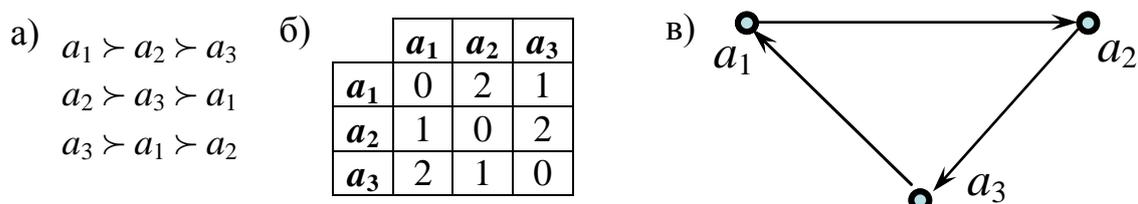
Кандидат	$\succ$	$\prec$	$\sim$
$a_1$	3	2	0
$a_2$	2	2	1
$a_3$	3	1	1
$a_4$	1	4	0
$a_5$	0	5	0
$a_6$	5	0	0

Правило Кондорсе, в отличие от предыдущих двух рассмотренных правил, учитывает информацию о всех содержащихся в профиле отношениях предпочтения и поэтому считается самым справедливым правилом голосования [17]. Но, к сожалению, правило Кондорсе, обладает существенным недостатком: *альтернатива Кондорсе может не существовать*.

Сам Кондорсе в своей работе 1785 г. [63, 64] указал на возможность нетранзитивности определяемого его принципом отношения консенсуса, когда может быть, что  $a_i \succ a_j$  и  $a_j \succ a_k$ , тогда как  $a_k \succ a_i$ . Эта ситуация называется *парадоксом голосования Кондорсе*. Таким образом, несмотря на то, что каждое из ранжирований, входящих в профиль предпочтения, всегда является транзитивным, нет никакой гарантии, что профиль предпочтения в целом будет также транзитивным.

Стандартным примером такого случая является профиль, показанный на рисунке 2.2, а. Если попытаться применить к нему принцип Кондорсе, то, как

видно из электоральной матрицы (рисунок 2.2, б), каждая из альтернатив может претендовать на роль победителя. В результате имеем так называемую циклическую неопределенность (*цикл Кондорсе*), и граф отношения консенсуса (рисунок 2.2, в) содержит соответствующий ориентированный цикл (контур), содержащий все три альтернативы.



а) профиль предпочтения; б) электоральная матрица; в) граф ранжирования консенсуса Кондорсе

Рисунок 2.2 – Пример циклической неопределенности

Опубликованная в 1951 г. Кеннетом Эрроу *теорема о невозможности* [17, 50] показала, что ни одно из правил голосования не может обеспечить одновременное выполнение следующих трех (естественных) свойств (аксиом):

- 1) *единогласие*: если кандидат  $a_i$  предпочтительнее кандидата  $a_j$  по мнению всех избирателей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , то  $a_i \succ a_j$  и в отношении консенсуса  $\beta$ ;
- 2) *отсутствие диктатора*: не существует единственного избирателя  $\lambda_k$ , чьи предпочтения всегда преобладают над мнениями других избирателей;
- 3) *независимость от посторонних альтернатив*: добавление или удаление альтернативы  $a_j$  не изменяет отношения консенсуса, в котором альтернатива  $a_i$  признана наилучшей.

Таким образом, теорема Эрроу служит глубоким объяснением парадокса Кондорсе, который означает, что профиль предпочтения не обязательно является транзитивным, даже если каждое его  $k$ -ое ранжирование является линейным порядком.

Возможные пути разрешения парадокса Кондорсе составляли предмет многочисленных исследований на протяжении значительного времени и особенно во второй половине XX века. Они привели к появлению различных новых правил

голосования [69, 77]. Одним из наиболее обоснованных из них с формальной точки зрения является правило Кемени.

## 2.2 Правило Кемени

Это правило, предложенное Дж. Кемени в работе [15, 77], заключается в нахождении такого линейного порядка (ранжирования Кемени)  $\beta$  альтернатив, что расстояние (определенное в терминах числа парных несоответствий между ранжированиями) от  $\beta$  до ранжирований исходного профиля минимально.

Введенная Кемени [77] функция расстояния  $d(\lambda_k, \lambda_l)$  между двумя ранжированиями  $\lambda_k$  и  $\lambda_l$  определяется формулой

$$d(\lambda_k, \lambda_l) = \sum_{i < j} |r_{ij}^k - r_{ij}^l| \quad (2.9)$$

и может рассматриваться как число различий между двумя ранжированиями. В формуле (2.9) суммируются только элементы верхней треугольной подматрицы  $r_{ij}$ ,  $i < j$ , матрицы  $R$ .

Расстояние между произвольным ранжированием  $\lambda$  и профилем  $\Lambda$  можно теперь определить следующим образом:

$$D(\lambda, \Lambda) = \sum_{k=1}^m d(\lambda, \lambda_k) = \sum_{i < j} \sum_{k=1}^m |r_{ij}^k - r_{ij}|. \quad (2.10)$$

Из (2.10), с учетом  $r_{ij} = 1$  для всех  $i < j$ , что соответствует естественному линейному порядку  $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$ , следует, что для любого  $k = 1, \dots, m$   $|r_{ij}^k - r_{ij}| = |1 - 1| = 0$  если  $a_i^k \succ a_j^k$ ;  $|r_{ij}^k - r_{ij}| = |0 - 1| = 1$  если  $a_i^k \sim a_j^k$  и  $|r_{ij}^k - r_{ij}| = |-1 - 1| = 2$  если  $a_i^k \prec a_j^k$ . Таким образом, обозначив  $|r_{ij}^k - r_{ij}|$  через  $d_{ij}^k$ , имеем

$$D(\lambda, \Lambda) = \sum_{i < j} \sum_{k=1}^m d_{ij}^k. \quad (2.11)$$

Теперь можно определить  $(n \times n)$  матрицу профиля  $P = [p_{ij}]$ , где

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^m d_{ij}^k, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

и число избирателей (ранжирований)  $m$  профиля  $\Lambda$  представлено в каждом из элементов матрицы как  $\frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) = m, i, j = 1, \dots, m$ . Таким образом, значение  $0,5p_{ij}$  можно понимать как число предпочтений  $a_j$  относительно  $a_i$ .

Сумма элементов верхней треугольной подматрицы  $P_u$  матрицы  $P$  равна *расстоянию Кемени*  $D(\lambda, \Lambda)$ :

$$D(\lambda, \Lambda) = \sum_{i < j} p_{ij}. \quad (2.13)$$

Порядок элементов  $a$  в ранжировании  $\lambda$  соответствует порядку (перестановке) соответствующих строк и столбцов матрицы  $P$ .

Например, матрица профиля для профиля предпочтения (2.5) будет выглядеть следующим образом:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 0 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

В частности, элемент матрицы  $p_{24}$  был получен следующим образом:  
 $p_{24} = 0+0+2+1+0 = 3$ .

Пусть пространство  $\Pi$  является множеством всех  $n!$  линейных (строгих) отношений порядка  $\succ$  на  $A$ . Каждый линейный порядок соответствует одной из перестановок первых  $n$  натуральных чисел  $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

При реализации правила Кемени наша цель состоит в нахождении такого линейного порядка  $\beta \in \Pi$  элементов  $a_1, \dots, a_n$ , что расстояние  $D(\lambda, \Lambda)$  от  $\beta$  до профиля предпочтения  $\Lambda$  является минимальным, то есть

$$\beta = \arg \min_{\lambda \in \Pi} D(\lambda, \Lambda). \quad (2.15)$$

Таким образом, ранжирование консенсуса  $\beta$ , найденное по правилу Кемени, является решением оптимизационной задачи (2.15) и называется *ранжированием*

(медианой) Кемени [77]. При этом каждая перестановка объектов из  $A$  соответствует перестановке соответствующих строк и столбцов матрицы профиля. Поэтому задача (2.15) фактически заключается в нахождении такой перестановки строк и столбцов матрицы, что сумма элементов ее верхней треугольной подматрицы минимальна.

Для профиля (2.5) правило Кемени дает такое же решение, что и правило Кондорсе, т.е.  $\beta = \{a_6 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5\}$ , что подтверждает наличие у правила Кемени достоинств, близких положительным свойствам правила Кондорсе. Кроме того, правило Кемени не может приводить к парадоксу.

Однако, правило Кемени, в свою очередь, имеет два недостатка:

- задача о ранжировании Кемени является NP-полной [49, 64, 86, 100];
- число найденных по правилу Кемени оптимальных решений (ранжирований консенсуса) может значительно превышать 1 и достигать значений  $> 10^7$  даже для небольших  $m$  и  $n$  [49, 53, 86].

Первый недостаток, который заключается в том, что для задачи о ранжировании Кемени не существует алгоритма, позволяющего найти решение за время, пропорциональное полиному от размерности  $n$  задачи, не вызывает особого беспокойства, т.к. для приемлемой для практических применений размерности ( $n < 30$ ) существуют точные алгоритмы ее решения [49, 62, 86, 88].

Второй недостаток может полностью нивелировать положительный эффект от применения правила Кемени и поэтому требует разработки специальных мер для сведения (свертки) множества оптимальных решений к единственному [86]. Алгоритм для реализации свертки линейно зависит от числа оптимальных решений, т.е. позволяет эффективно найти единственное решение.

### 2.3 Алгоритм нахождения ранжирования Кемени

Задача о нахождении ранжирования Кемени (ЗРК) (2.15) в общем случае может быть решена методом полного перебора [83, 86]. На практике метод полного перебора для решения ЗРК не применяется, так как требует слишком больших временных затрат.

Для нахождения ранжирования консенсуса по правилу Кемени можно использовать различные методы решения оптимизационных задач. Известны работы по применению к решению ЗРК методов динамического программирования [94], целочисленного линейного программирования [51], различных поисковых методов [44]. Хорошо зарекомендовал себя в качестве метода решения ЗРК один из широко применяемых поисковых методов – *метод ветвей и границ*, который подробно описан в статье [17, 88].

Метод ветвей и границ является общим алгоритмическим методом, благодаря которому находятся оптимальные решения различных задач. При этом применяются основные две процедуры для поиска решений: ветвление и нахождение оценок. Процедура ветвления состоит в разбиении области допустимых решений на подобласти меньших размеров. Процедура нахождения оценок заключается в поиске верхних и нижних границ для дальнейшего принятия решения. Основной идеей этого подхода является отсечение подмножеств допустимых решений, которые не содержат оптимальные решения.

Формальная запись рекурсивного алгоритма решения ЗРК RECURSALL, разработанного в научной группе под руководством Муравьева С.В. на основе метода ветвей и границ, имеет представленный ниже вид [86].

---

**Алгоритм 4** Алгоритм RECURSALL нахождения ранжирования консенсуса по правилу Кемени

---

**Вход:**

$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  : профиль предпочтения

**Пусть:**

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ : множество альтернатив

$P = [p_{ji}]$ :  $(n \times n)$  матрица профиля

$P_u$  : верхняя треугольная подматрица матрицы  $P$

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ : частичное решение (лидер)

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_{k-n}\}$ : дополнение  $S$  до полного порядка

$K = 0, \dots, n - 1$ : уровень дерева поиска

$D$ : сумма элементов  $P_u$ , соответствующих текущему лидеру

$D_u$ : верхняя граница

$D_{low}$ : нижняя граница

$\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ : первые  $n$  натуральных чисел

$N_{kem}$ : число ранжирований консенсуса

$\beta_{N_{kem}}$ : ранжирование консенсуса

[формирование матрицы профиля  $P$ ]

```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:   for  $j = i + 1$  to  $n$  do
3:     for  $k = 1$  to  $m$  do
4:       if  $a_i^k \sim a_j^k$  then  $p_{ij} \leftarrow p_{ij} + 1; p_{ji} \leftarrow p_{ji} + 1$ 
5:       if  $a_i^k < a_j^k$  then  $p_{ij} \leftarrow p_{ij} + 2$ 
6:       if  $a_i^k > a_j^k$  then  $p_{ji} \leftarrow p_{ji} + 2$ 
       end for
     end for
   end for
end for

```

[нахождение ранжирования консенсуса]

7:  $D_u \leftarrow \infty; S \leftarrow \emptyset; T \leftarrow \mathbf{N}_n; N_{kem} \leftarrow 1$  [инициализация]

8:  $LEADER(1, 0)$  [вызов рекурсивной процедуры]

9: **procedure**  $LEADER(K, D)$ : [рекурсивная процедура]

10: **for**  $l = 1$  **to**  $n - K + 1$  **do**

11:  $s_K \leftarrow t_l; T \leftarrow T - \{t_l\}$ ; [ветвление]

[изменение расстояния из-за расширения лидера  $S$ ]

12:  $D_e \leftarrow D + \sum_{i=1, \dots, n-K} P_{s_K t_i}$ ;

[изменение нижней границы]

```

13:  $D_{\text{low}} \leftarrow D_e + \sum_{\substack{i=1, \dots, n-K \\ j=i+1, \dots, n-K}} \min(p_{t_i t_j}, p_{t_j t_i});$ 
14: if  $D_{\text{low}} \leq D_u$  then
15:     if  $K < n - 1$  then LEADER ( $K + 1, D_e$ )
16:     else
17:         if  $D_{\text{low}} = D_u$  then  $N_{\text{kem}} \leftarrow N_{\text{kem}} + 1$  else  $N_{\text{kem}} \leftarrow 1$ 
18:          $\beta_{N_{\text{kem}}} \leftarrow S; D_u \leftarrow D_{\text{low}};$  [сохранение полного решения]
        end else
19:      $T \leftarrow T \cup \{s_K\}; S \leftarrow S - \{s_K\}$  [отсечение]
        end if
    end if
end for [конец рекурсивной процедуры]

```

**Выход:**

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}}$

---

На шагах 1-6 для профиля предпочтения  $\Lambda$  формируется  $(n \times n)$  матрица профиля  $P$  в соответствии с выражениями (2.12) и (2.13).

После инициализации переменных (шаг 7) на шаге 8 вызывается рекурсивная процедура *LEADER* ( $K, D$ ) с исходными значениями параметров  $K = 1$  и  $D = 0$ , после чего алгоритм 4 прекращает работу.

Шаги 9-19 определяют рекурсивную процедуру *LEADER* ( $K, D$ ). Реализуемый с помощью рекурсивной процедуры алгоритм ветвей и границ исследует древовидное пространство решений (рисунок 2.3), в котором каждому узлу соответствует множество с фиксированным порядком элементов  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_K\}$ , рассматриваемое как *лидер* всех последующих решений, содержащих этот порядок в качестве начальной части. Корень дерева поиска является лидером абсолютно всех возможных решений и для него  $S = \emptyset$ . Лидер формируется из элементов  $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , поэтому для всякого лидера  $S$  имеется его дополнение  $\bar{S} = T = \{t_1, t_2, \dots, t_{K-n}\} = \mathbf{N}_n \setminus S$ .

Рекурсивная процедура *LEADER* ( $K, D$ ) содержит основной цикл по  $l$  – номеру лидера на  $K$ -ом уровне дерева поиска (шаг 10). На шаге 11 формируется текущий лидер  $S$  путем конкатенации его предшественника с первым по порядку элементом  $t_l$  множества  $T$ , т.е.  $S = \{s_1, \dots, s_{K-1}, s_K = t_l\}$ , при этом  $t_l$  из  $T$  удаляется. Например (см. рисунок 2.4), пусть  $n = 6$ , тогда если на уровне  $K = 3$  дерева поиска лидер  $S = \{2, 1, 3\}$  и  $T = \{4, 5, 6\}$ , то на следующем четвертом уровне  $S = \{2, 1, 3, 4\}$  и  $T = \{5, 6\}$ .

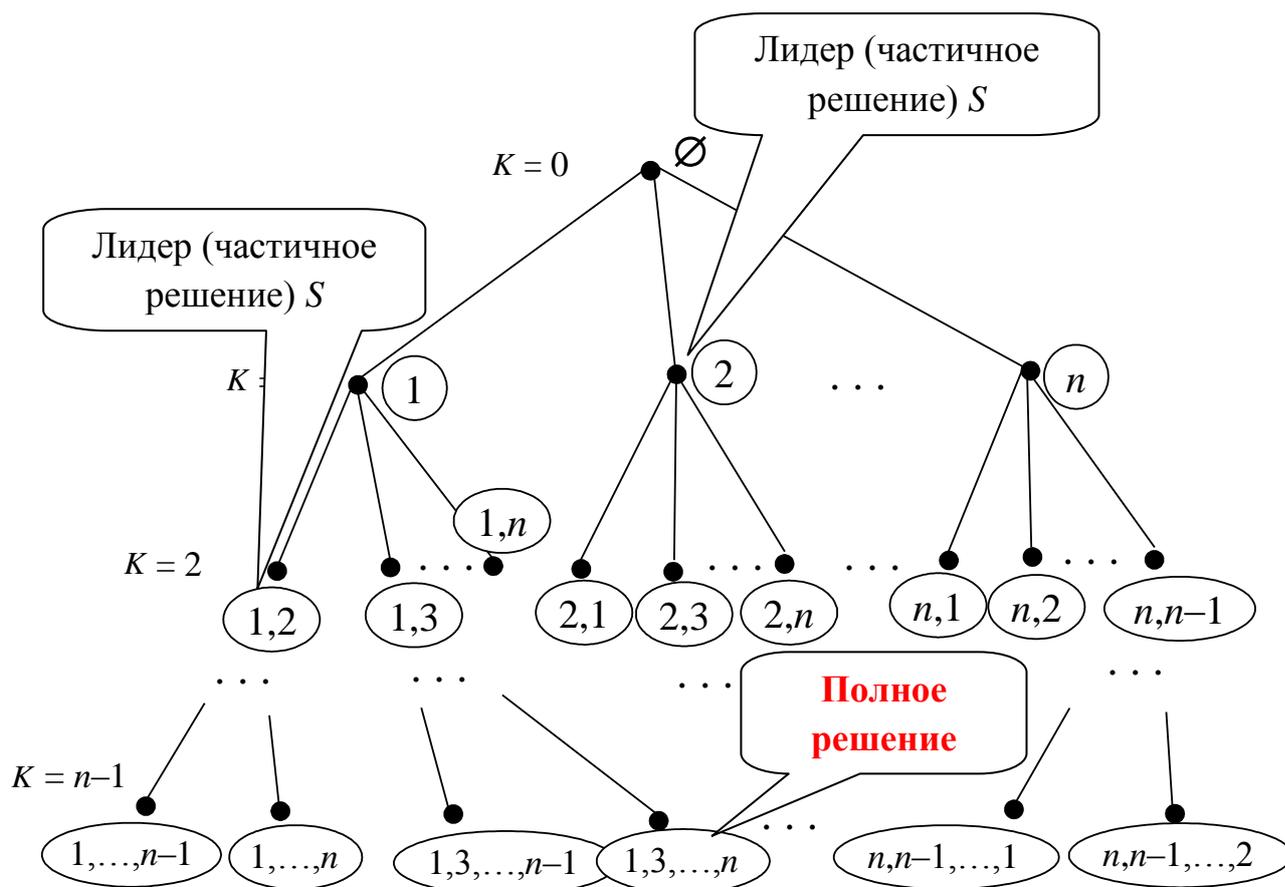


Рисунок 2.3 – Древоподобная модель пространства решений алгоритма

### RECURSALL

На шагах 12 и 13 для текущего лидера вычисляется оценка нижней границы расстояния от профиля  $\Lambda$  до оптимального линейного порядка. В приведенном выше примере  $D = 51$ ,  $D_e = 51 + 6 = 57$ ,  $D_{low} = 57 + 4 = 61$  (рисунок 2.4).

На шагах 14-19 оценивается перспективность лидера путем сравнения нижней границы  $D_{low}$  и принятой за верхнюю границу  $D_u$  наименьшей из достигнутых к данному моменту нижних границ.

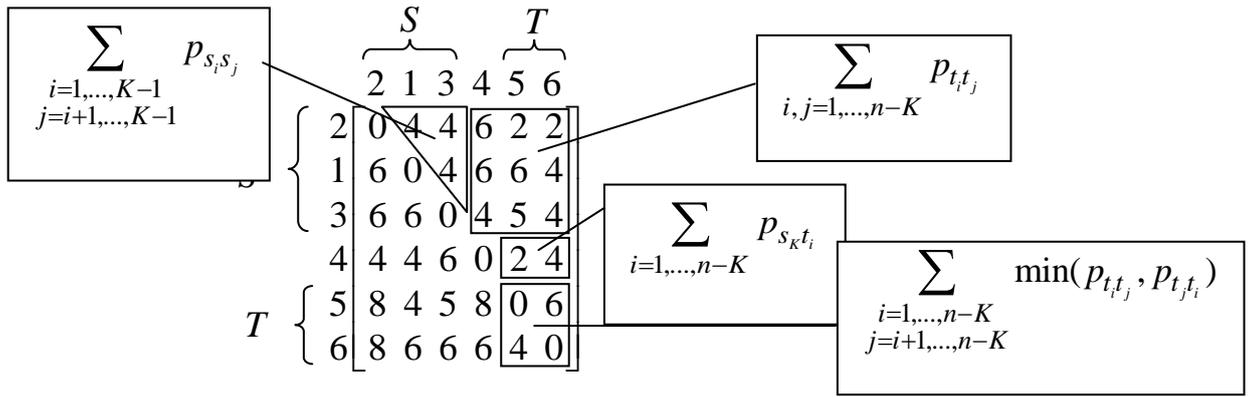


Рисунок 2.4 – Пример проверки лидера на перспективность

Если  $D_{low} \leq D_u$  и текущее решение неполное (т.е.  $K < n - 1$ ), то вызывается процедура *LEADER* с новыми параметрами, обеспечивающими ветвление дерева поиска. Если  $D_{low} > D_u$ , то все решения с текущим лидером не могут быть оптимальными и соответствующая часть дерева поиска не проверяется, т.е. отсекается. Если при  $D_{low} \leq D_u$  текущее решение является полным, т.е. определяющим порядок всех элементов ранжирования, то оно запоминается как пара  $\beta_{N_{kem}} = S$  и  $D_u = D_{low}$ . Поиск других неполных и полных решений продолжается, пока все неперспективные решения не будут отсечены.

Алгоритм 4 находит все возможные решения ЗРК (ранжирования консенсуса)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{kem}}$ . Как уже было сказано в параграфе 2.2, количество  $N_{kem}$  таких оптимальных решений может быть весьма велико даже для небольших  $m$  и  $n$  [86, 89]. Будем называть множество ранжирований Кемени  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{kem}}\}$  *выходным профилем* ЗРК. Тогда профиль предпочтения  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  можно называть *входным профилем* ЗРК (рисунок 2.5).



Рисунок 2.5 – Входной и выходной профили алгоритма RECURSALL для решения ЗРК

Чтобы из множества ранжирований консенсуса (выходного профиля) получить *единственное итоговое ранжирование*  $\beta_{\text{fin}} = \Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}})$ , будем пользоваться следующим принципом:

для всех  $i$  и  $j$ , если отношения  $a_i \succ a_j$  и  $a_i \prec a_j$  встречаются одинаковое число раз во всех ранжированиях консенсуса, то  $a_i \sim a_j$  в  $\beta_{\text{fin}}$ ; в противном случае в  $\beta_{\text{fin}}$  включается то отношение строгого предпочтения, которое встречается среди оптимальных решений наибольшее число раз.

Таким образом, при том, что ни одно из ранжирований консенсуса не содержит эквивалентностей, итоговое ранжирование может содержать пары эквивалентных альтернатив.

В следующем параграфе рассмотрим особенности входного и выходного профилей ЗРК.

## 2.4 Входной и выходной профили задачи о ранжировании Кемени

### 2.4.1 Транзитивность входного профиля

Несмотря на то, что каждое ранжирование профиля предпочтения транзитивно, матрица профиля  $P$  является транзитивной в том случае, если все исходные ранжирования совместимы, т.е.  $p_{ik} \leq p_{ki}$ , если  $p_{ij} \leq p_{ji}$  и  $p_{jk} \leq p_{kj}$ ,  $i \neq j \neq k = 1, \dots, n$ . Матрица  $P$  является нетранзитивной, если условия нарушаются, т.е. велика вероятность возникновения парадокса Кондорсе.

Вернемся к рассмотрению профиля (см. рисунок 2.2, а)

$$\begin{aligned} \lambda_1: a_1 \succ a_2 \succ a_3 \\ \lambda_2: a_2 \succ a_3 \succ a_1, \\ \lambda_3: a_3 \succ a_1 \succ a_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

который включает в себя очевидную *циклическую неоднозначность* (цикл), которая ведет к парадоксу Кондорсе в случае использования одноименного правила для определения ранжирования консенсуса. В этом случае альтернативы Кондорсе не существует. Если применить к этому профилю правило Кемени, будут получены три оптимальных решения (при  $D(\beta, \Lambda) = 8$ ), совпадающие с

ранжированиями исходного профиля. Действительно, матрица профиля тогда будет иметь вид

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

и условию  $\beta = \arg \min_{\lambda \in \Pi} D(\lambda, \Lambda)$  удовлетворяет каждое из трех ранжирований профиля 2.16, см также рисунок 2.6.

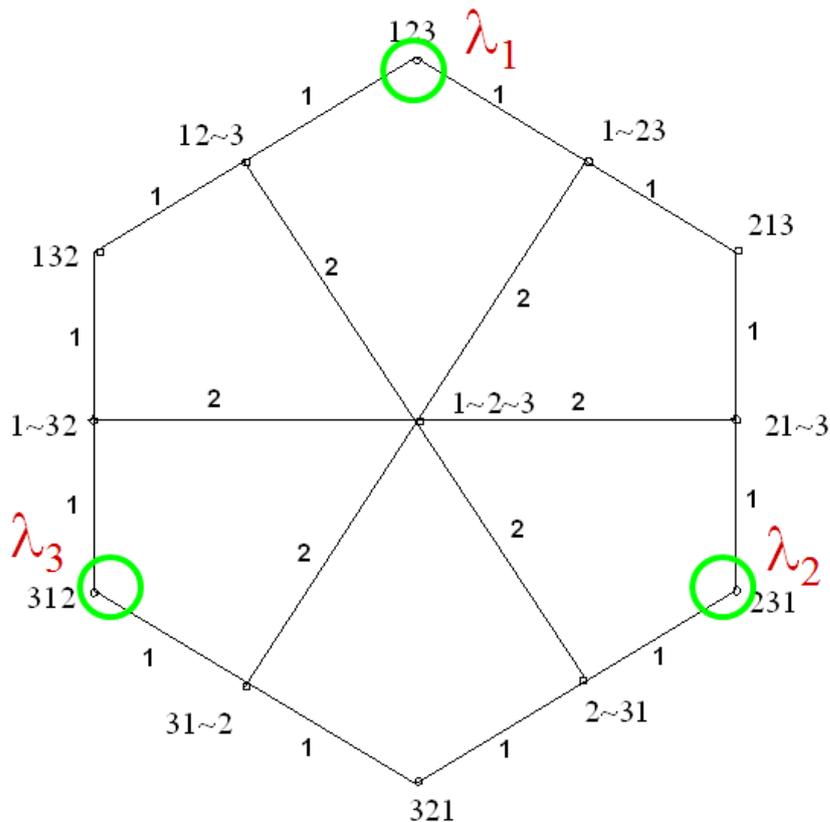


Рисунок 2.6 – Профиль (2.16) в пространстве слабых порядков для  $n = 3$

Таким образом, в рассматриваемом примере создается впечатление, что нетранзитивность входного профиля порождает множественность решений по правилу Кемени. Разумным способом разрешения этой ситуации является объявление всех трех альтернатив эквивалентными друг другу. Тогда итоговое ранжирование консенсуса примет вид:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_1 \sim a_2 \sim a_3\}. \quad (2.18)$$

Фактически, полученное отношение слабого порядка находится на минимально возможном расстоянии, равном 9, от всех ранжирований (2.16), см. рисунок 2.6.

В работах Литвака Б.Г. было показано, что матрицу  $P$  можно характеризовать *наименьшим возможным расстоянием*  $D_{least}$  от профиля предпочтения  $\Lambda$  до некоторого строгого порядка [86, 88, 89]. При вычислении  $D_{least}$  в него включаются меньшие значения из каждой пары  $(p_{ij}, p_{ji})$ , то есть

$$D_{least} = \sum_{i < j} \min(p_{ij}, p_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Можно легко показать [17], что если матрица  $P$  транзитивна (это значит, что все исходные ранжирования совместимы), то  $D_{least} = D(\beta, \Lambda)$  и  $D_{least}$  является достижимым значением. Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, пользуясь этой характеристикой, транзитивность любого входного профиля, после определения ранжирования консенсуса  $\beta$  по правилу Кемени (2.15), может быть установлена с использованием следующего критерия:

$$\text{матрица } P \begin{cases} \text{транзитивна,} & \text{если } D_{least} = D(\beta, \Lambda) \\ \text{нетранзитивна,} & \text{если } D_{least} < D(\beta, \Lambda) \end{cases} \quad (2.20)$$

#### **2.4.2 Экспериментальные исследования транзитивности входного профиля**

В ходе диссертационной работы были проведены вычислительные экспериментальные исследования транзитивности входного профиля с использованием реализованного на языке C++ Алгоритма 4 для решения ЗРК (п. 2.3). При проведении экспериментов для моделирования входных профилей, вычисленных для ранжирований, полученных путем объединения сгенерированных отдельно псевдо-случайных строгих порядков и эквивалентностей, использовался метод Монте-Карло. Строгие порядки генерировались с использованием *равномерного распределения* целых чисел в заданном диапазоне от 1 до  $n$ . Эквивалентности также генерировались в

соответствии с равномерным распределением с заданием верхней границы на число эквивалентностей на одно ранжирование.

Для каждой комбинации  $(m, n)$ , где  $m = 4, 5, 6$  и  $15$ , и  $n = 10, 15$  и  $20$ , были сгенерированы по 100 входных профилей и, следовательно, решены 100 индивидуальных задач (см. таблицу 2.3). Таким образом, всего были сгенерированы 1200 профилей, которые служили входными данными для Алгоритма 4.

Таблица 2.3 – Комбинации  $m$  и  $n$ , для каждой из которых решались по 100 индивидуальных задач

$m$	$n$
4	10, 15, 20
5	10, 15, 20
6	10, 15, 20
15	10, 15, 20

На рисунке 2.7 приведены кривые, показывающие изменение значений расстояний  $D_{least}$  и  $D(\beta, \Lambda)$  от задачи к задаче, полученных для каждой группы из 100 индивидуальных задач при соответствующих  $m$  и  $n$ , и упорядоченных в порядке убывания по переменной  $D(\beta, \Lambda)$ .

Как видно из рисунка 2.7, для заданных  $n$  и  $m$ , наиболее часто оказывались транзитивными профили (т.е. для них выполнялось условие  $D_{least} = D(\beta, \Lambda)$ ), только при четных значениях  $m$ . Нечетные значения  $m$  практически всегда приводили к нетранзитивным входным профилям. При этом во всех случаях число транзитивных профилей уменьшается с возрастанием числа  $n$  альтернатив.

Эксперименты, проведенные С.В. Муравьевым [89], показали, что правило Кемени приводит к числу  $N_{kem}$  оптимальных решений (выходному профилю), которое может во много раз превышать количество ранжирований во входном профиле, т.е.  $N_{kem} \gg m$ .

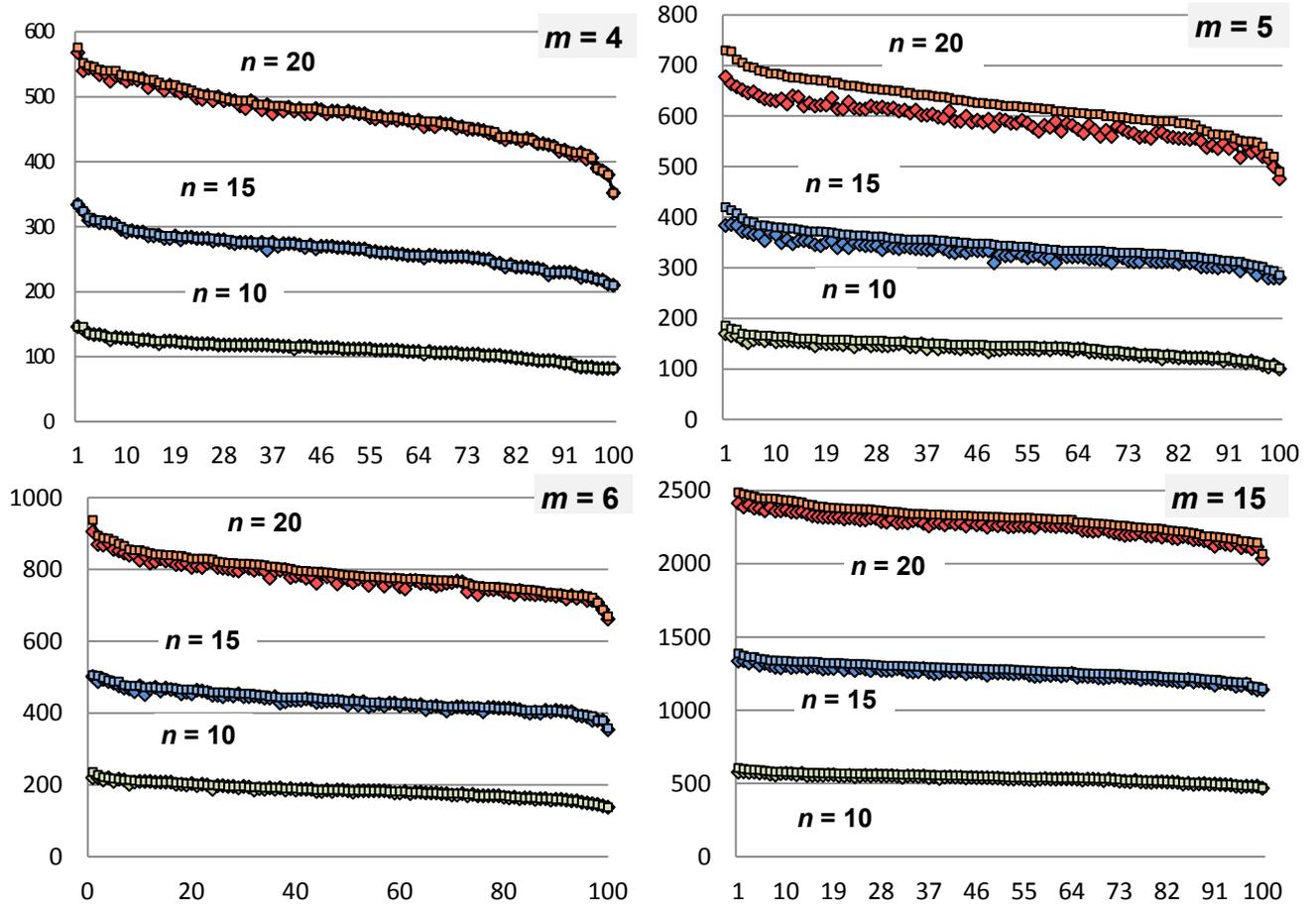


Рисунок 2.7 – Изменение расстояний  $D_{least}$  и  $D(\beta, \Lambda)$  (вертикальная ось) для каждой из 100 индивидуальных задач (горизонтальная ось) для чисел ранжирований  $m = 4, 5, 6$  и 15 и чисел альтернатив  $n = 10, 15$  и 20 (кривая  $D(\beta, \Lambda)$  показана квадратами,  $D_{least}$  – ромбами)

Множественность решений ЗРК не редкое явление. Вычислительные эксперименты показали также, что вероятность нахождения единственного ранжирования Кемени хорошо согласуется с вероятностью существования альтернативы Кондорсе [74, 79, 101], которая уменьшается с ростом  $n$ . Эта вероятность, вообще говоря, также уменьшается с ростом  $m$ , однако следует учитывать факт, что при четном  $m$  вероятность существования альтернативы Кондорсе резко уменьшается по сравнению с соседним нечетным значением  $m$  [79, 89]. Например, при  $n = 10$ , если  $m = 5$ , то эта вероятность равна 0,6 и снижается до примерно 0,15 при  $m = 4$  или до 0,18 при  $m = 6$ .

Используя полученные экспериментальные данные, представленные на рисунке 2.7, можно оценить вероятности  $P_{\text{intr}}(m, n)$  нетранзитивности входных профилей для фиксированных значений  $m$  и  $n$  (и соответствующей группы из 100 индивидуальных задач) путем деления количества случаев, выполнилось условие  $D_{\text{least}} < D(\beta, \Lambda)$ , на количество всех случаев, равное 100. В таблице 2.4 приведены вычисленные таким способом оценки вероятности  $P_{\text{intr}}(m, n)$ , которые, в свою очередь, были использованы для построения соответствующего графика (рисунок 2.8).

Таблица 2.4 – Оценки вероятности  $P_{\text{intr}}(m, n)$  нетранзитивного входного профиля

$m$	$n$		
	10	15	20
4	0.06	0.21	0.53
5	0.96	1	1
6	0.33	0.7	0,94
15	0.97	1	1

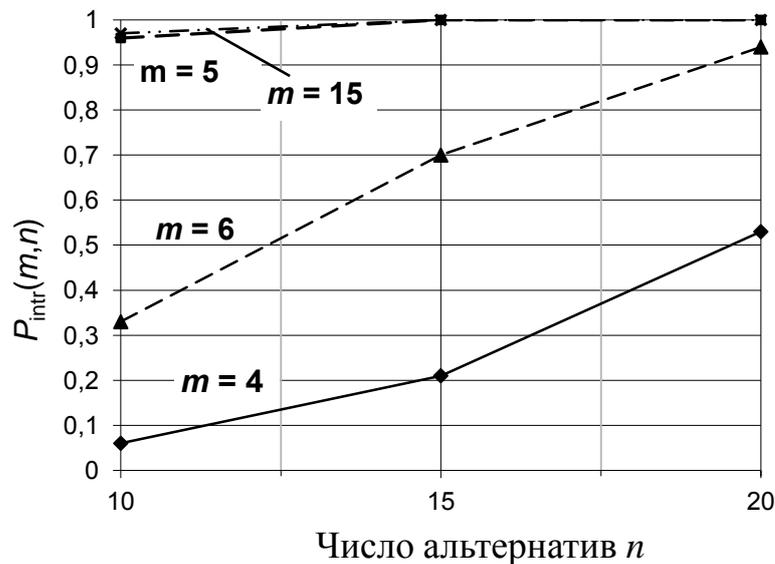


Рисунок 2.8 – Оценки вероятности  $P_{\text{intr}}(m, n)$  нетранзитивного входного профиля

Как видно из рисунка 2.8, вероятность  $P_{\text{intr}}(m, n)$  нетранзитивного входного профиля близка к 1,0 для *нечетных* значений  $m$  при числе альтернатив в диапазоне  $10 \leq n \leq 20$ . Если  $m$  четное, вероятность  $P_{\text{intr}}(m, n)$  монотонно (почти

линейно) при увеличении числа альтернатив от 10 до 20, увеличиваясь также при росте четного  $m$ . В целом, вероятность возрастает как при увеличении числа  $n$  альтернатив, так и числа  $m$  ранжирований. Результаты этих экспериментов согласуются с результатами, представленными в публикациях других авторов [74, 79, 101].

### 2.4.3 Нетранзитивность выходного профиля

Необходимым условием наличия нетранзитивности в множестве ранжирований Кемени (выходном профиле ЗРК) является выражение  $N_{\text{kem}} \geq 3$ . Также, если в соответствии с критерием (2.18), входной профиль является нетранзитивным, то выходной профиль также характеризуется отсутствием транзитивности. Однако, позитивным является факт, что нетранзитивные циклы в выходном профиле лексикографически упорядочены и могут быть выявлены за время, пропорциональное квадрату мощности выходного профиля.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим два коротких примера.

Из таблицы 2.5 видно, что входной профиль является нетранзитивным. Выходной профиль, содержащий три решения, имеет один цикл (выделен жирной рамкой), характеризующий нетранзитивность. Следуя подходу, описанному в начале п. 2.4.1, формируем итоговое решение:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_1 \succ a_2 \sim a_4 \sim a_5 \succ a_3\}.$$

Таблица 2.5 – Примеры входного и выходного профилей, при  $m = 5$ ,  $n = 5$

Входной профиль	Выходной профиль
1 4 5 2 ~3	1 <b>2 4 5</b> 3
3 2 1 4 5	1 <b>4 5 2</b> 3
1 5 4 2 3	1 <b>5 2 4</b> 3
1 ~5 2 3 4	
2 4 1 5 3	
$D_{\text{least}} = 30$	$D(\beta, \Lambda) = 32$
	$N_{\text{kem}} = 3$

Пример выходного профиля, имеющего четыре нетранзитивных цикла, представлен в таблице 2.6 (показаны разными цветами в рамках). Как и прежде, преобразуя эти циклы в тройки эквивалентных альтернатив, получаем итоговое ранжирование консенсуса:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_1 \sim a_6 \sim a_9 \succ a_2 \sim a_{10} \succ a_8 \succ a_4 \sim a_5 \sim a_7\}.$$

Таблица 2.6 – Примеры выходного профиля, при  $m = 5, n = 10$

цикл 1→	1 6 9	2 10 8 4	3 7 5	
цикл 2→	1 9 6	2 10 8 4	5 3 7	←цикл 3
	6 1 9	2 10 8 4	7 5 3	
цикл 1→	6 9 1	10 2 8 4	3 7 5	
цикл 2→	9 6 1	10 2 8 4	5 3 7	←цикл 4
цикл 1→	9 1 6	10 2 8 4	7 5 3	
$D_{\text{least}} = 129$		$D(\beta, \Lambda) = 131$	$N_{\text{kem}} = 6$	

Таким образом, выходной профиль ЗРК может содержать нетранзитивные циклы, которые являются следствием нетранзитивности входного профиля предпочтений. Вычислительный эксперимент показал, что наиболее вероятно появление нетранзитивных входных профилей при нечетных  $m$ . Благоприятным обстоятельством при обработке нетранзитивных выходных профилей является то, что нетранзитивные циклы лексикографически упорядочены и могут быть устранены заменой их на тройки эквивалентных альтернатив.

## Выводы к главе 2

1. Среди известных правил голосования, правило Кемени занимает особое место, т.к. дает ранжирование консенсуса, являющееся наиболее близким к решению, получаемому в соответствии с наиболее обоснованным правилом Кондорсе, не приводя к парадоксу.

2. Правило Кемени выбрано в качестве основы для построения алгоритма решения задачи и ранжирования Кемени (ЗРК), т.е. агрегирования  $m$  ранжирований на множестве из  $n$  альтернатив. Этот алгоритм будет использован для обработки данных сличений.
3. Алгоритм находит все возможные решения ЗРК (ранжирования консенсуса), количество которых  $N_{\text{кем}}$  может быть весьма велико даже для небольших  $m$  и  $n$ . Поэтому можно вести речь о выходном профиле ЗРК, размерность которого может значительно превышать размерность входного профиля предпочтений.
4. Исследована транзитивность выходного и входного профилей ЗРК с помощью метода Монте-Карло. Сформированы рекомендации по нахождению единственного итогового ранжирования консенсуса для выходного профиля ЗРК путем преобразования в наборы эквивалентных альтернатив тех альтернатив, для которых отношения  $a_i > a_j$  и  $a_i < a_j$  встречаются одинаковое число раз во всех ранжированиях консенсуса.

## ГЛАВА 3

### ОБРАБОТКА ДАННЫХ СЛИЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЖИРОВАНИИ КЕМЕНИ

В этой главе рассмотрено применение метода агрегирования предпочтений на основе правила Кемени к обработке данных сличений. Приведено описание программного комплекса, разработанного для проведения численных экспериментальных исследований предложенного подхода. Представлены выявленные в ходе экспериментальной проверки работоспособность и робастность метода агрегирования предпочтений на множестве сгенерированных равномерно и нормально распределенных случайных результатов участников сличений в сравнении с другими подходами.

#### 3.1 Алгоритм обработки данных сличений на основе агрегирования предпочтений

Рассмотренный во второй главе метод агрегирования предпочтений (МАП), реализующий правило Кемени, был положен в основу разработанного в ходе диссертационной работы алгоритма обработки данных сличений [3, 25, 85, 87]. Далее для обозначения этого метода и реализующего его алгоритма будем использовать аббревиатуру МАП.

Основные этапы МАП, представленные на рисунке 3.1, реализуют следующие функции:

1. Формирование диапазона актуальных значений  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .
2. Построение профиля предпочтений  $\Lambda$  из  $m$  интервалов  $u(x_k)$ .
3. Формирование матрицы профиля  $P = [p_{ji}]$ .
4. Нахождение ранжирования консенсуса по правилу Кемени

$$B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}}\}.$$

5. Определение единственного ранжирования консенсуса

$$\beta_{\text{fin}} = \Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}}).$$

6. Нахождение опорного значения  $x_{\text{ref}}$ .
7. Определение ненадежных результатов  $m'$ .
8. Нахождение интервала неопределенности опорного значения  $u(x_{\text{ref}})$ .

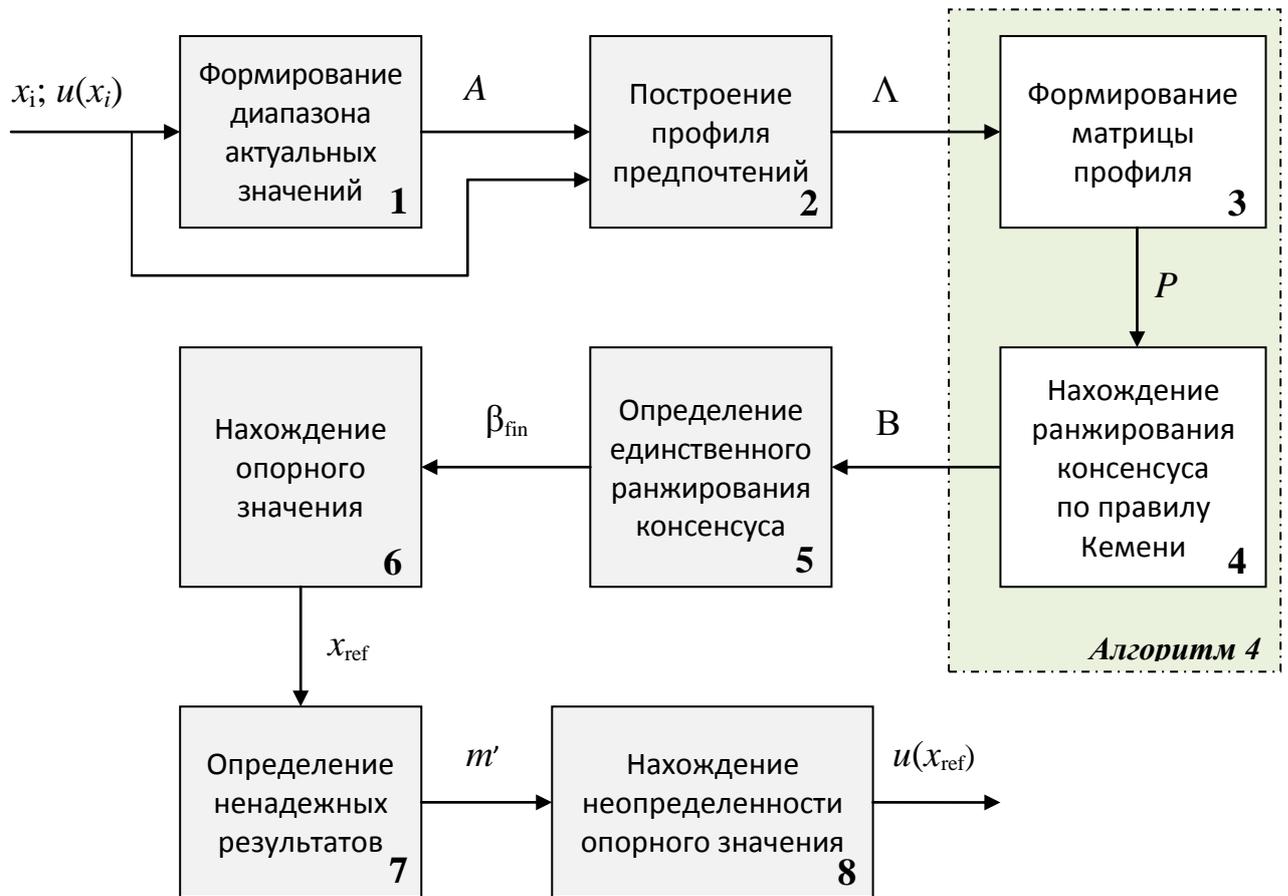


Рисунок 3.1 – Структура алгоритма обработки данных сличений МАП

Формальная запись реализующего МАП алгоритма имеет представленный ниже вид.

---

#### Алгоритм 5 Обработка данных сличений на основе агрегирования предпочтений

---

##### Вход:

$x_i$  : измеренное значение, предоставленное  $i$ -ой участвующей лабораторией,

$$i = 1, \dots, m$$

$u(x_i) = [u_{\text{н}}(x_i), u_{\text{в}}(x_i)]$ : соответствующие интервалы неопределенности лабораторий

##### Пусть:

$m$  : число участвующих в сличениях лабораторий

$m'$  : число лабораторий, результаты которых признаны надежными

$x_{\text{ref}}$  : опорное значение измеряемой величины

$u(x_{\text{ref}})$  : неопределенность опорного значения

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ : диапазон актуальных значений

$n$  : число значений ДАЗ

$c$  : цена деления диапазона актуальных значений

$\beta_{\text{fin}}$ : единственное итоговое ранжирование консенсуса

[формирование диапазона актуальных значений  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ]

1:  $a_1 \leftarrow \min\{u_{\text{H}}(x_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ ;  $a_n \leftarrow \max\{u_{\text{B}}(x_i) \mid i = 1, \dots, m\}$

2: Выбор подходящего  $n$ ;  $c \leftarrow \frac{a_n - a_1}{n - 1}$

3: **for**  $j = 1$  **to**  $n - 1$  **do**  $a_{j+1} \leftarrow a_j + c$

[формирование профиля предпочтений  $\Lambda$  из  $m$  интервалов  $u(x_k)$ ]

4: **for**  $k = 1$  **to**  $m$  **do**

5:     **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

**for**  $j = 1$  **to**  $n$  **do**

6:                     **if**  $a_i \in u(x_k) \wedge a_j \notin u(x_k)$  **then**  $a_i \succ a_j$

7:                     **if**  $a_i, a_j \in u(x_k) \vee a_i, a_j \notin u(x_k)$  **then**  $a_i \sim a_j$

8:                     **if**  $a_i \notin u(x_k) \wedge a_j \in u(x_k)$  **then**  $a_i \prec a_j$

**end for**

**end for**

**end for**

[нахождение ранжирования консенсуса по правилу Кемени]

9: *Алгоритм 4 RECURSALL* (см. п. 2.3)

[нахождение опорного значения]

10:  $\beta_{\text{fin}} \leftarrow \Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}})$

11:  $x_{\text{ref}} \leftarrow Me(a_i^{(1)} \sim a_j^{(1)} \sim \dots \sim a_k^{(1)}), a_i, a_j, a_k \in \beta_{\text{fin}}$

[нахождение ненадежных результатов]

12:  $m' \leftarrow m$ ;

13: **for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**

14: **if**  $x_{\text{ref}} \notin u(x_i)$  **then** удаляем  $x_i$  и  $u(x_i)$ ;  $m' \leftarrow m' - 1$

**end for**

[нахождение интервала неопределенности опорного значения]

15:  $u(x_{\text{ref}}) \leftarrow \min \left( \max_{i=1, \dots, m'} \{u_{\text{H}}(x_i) \leq x_{\text{ref}}\}, \min_{i=1, \dots, m'} \{u_{\text{B}}(x_i) \geq x_{\text{ref}}\} \right)$

**Выход:**

$x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})$

---

Шаги 1-3 реализуют этап 1 МАП. Представим интервал неопределенности, полученный  $i$ -й лабораторией, в виде нижней  $u_{\text{H}}(x_i)$  и верхней  $u_{\text{B}}(x_i)$  границ этого интервала  $u(x_i) = [u_{\text{H}}(x_i), u_{\text{B}}(x_i)]$ .

Чтобы преобразовать интервалы неопределенности  $m$  лабораторий в  $m$  ранжирований, определим *диапазон актуальных значений* (ДАЗ) измеряемой величины. Начальное значение  $a_1$  диапазона актуальных значений выбирается равным наименьшей нижней границе интервалов неопределенности  $a_1 = \min\{u_{\text{H}}(x_i) | i = 1, \dots, m\}$ , предоставляемых лабораториями. Конечное значение  $a_n$  ДАЗ выбирается равным наибольшей верхней границе интервалов неопределенности лабораторий  $a_n = \max\{u_{\text{B}}(x_i) | i = 1, \dots, m\}$ .

ДАЗ разбивается на  $n - 1$  равных интервалов длиной  $c$ , определяемой по формуле:

$$c = \frac{a_n - a_1}{n - 1}. \quad (3.1)$$

При этом границам интервалов разбиения будут соответствовать  $n$  значений измеряемой величины  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  (рисунок 3.2). Эти границы будут выполнять роль альтернатив при определении ранжирования консенсуса. Лаборатории при этом выполняют роль избирателей. Необходимо учитывать, что выбор подходящего числа  $n$  должен гарантировать необходимую и достаточную точность представления значений  $a_i$  измеряемой величины, т.к. одно из них будет выбрано в качестве итогового опорного значения.

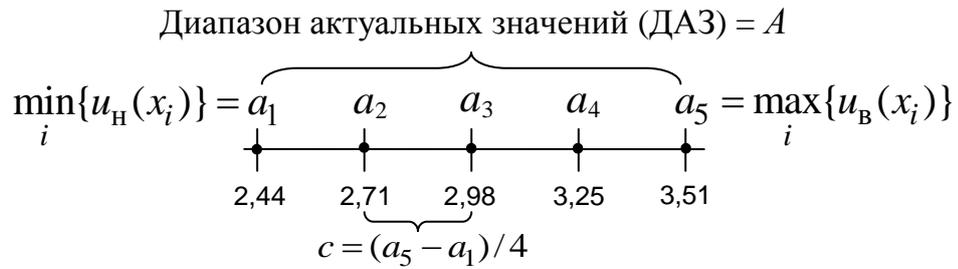


Рисунок 3.2 – Пример формирования диапазона актуальных значений  $A$

На шагах 4-8 (этап 2) формируется профиль предпочтения  $\Lambda$  из  $m$  ранжирований, описывающих интервалы неопределенности соответствующих лабораторий. Каждое  $k$ -ое ранжирование,  $k = 1, \dots, m$ , является объединением бинарных отношений строгого предпочтения " $\succ$ " и эквивалентности " $\sim$ ", обладающих следующими свойствами при  $i, j = 1, \dots, n$ :

- а)  $a_i \succ a_j$ , если  $a_i \in u(x_k)$  и  $a_j \notin u(x_k)$ ;
  - б)  $a_i \sim a_j$ , если  $a_i, a_j \in u(x_k)$  или  $a_i, a_j \notin u(x_k)$ ;
  - в)  $a_i \prec a_j$ , если  $a_i \notin u(x_k)$  и  $a_j \in u(x_k)$ .
- (3.2)

Таким образом, предоставленный лабораторией результат измерения представляется ранжированием значений измеряемой величины, в котором более предпочтительными являются эквивалентные значения, входящие в интервал неопределенности  $u(x_k)$  лаборатории, а остальные значения из  $A$  в этом ранжировании будут менее предпочтительными и эквивалентными друг другу (рисунок 3.3). Следовательно, каждое ранжирование содержит единственный символ строгого порядка и  $n - 2$  символов эквивалентности.

На шаге 9 выполняется описанный в параграфа 2.3 Алгоритм 4, реализующий этапы 3 и 4 МАП (рисунок 3.1). Алгоритм 4 находит выходной профиль, состоящий из множества строгих ранжирований Кемени  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_{\text{kem}}}\}$ .

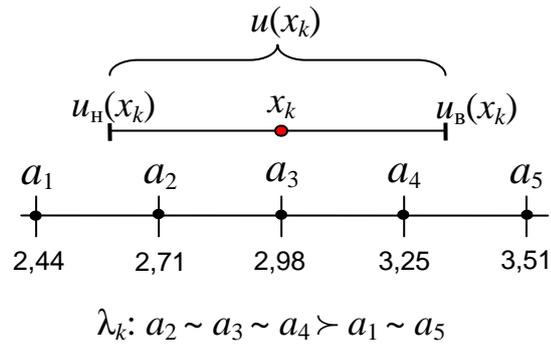


Рисунок 3.3 – Формирование  $k$ -го ранжирования для  $k$ -й лаборатории

На шаге 10 (этап 5) для сформированного выходного профиля находится единственное ранжирование консенсуса  $\beta_{\text{fin}}$  путем применения описанного в конце параграфа 2.3 принципа.

На шаге 11 в качестве опорного значения  $x_{\text{ref}}$  измеряемой величины выбирается медиана занимающих крайнее левое положение, т.е. имеющих наивысший ранг эквивалентных элементов  $a^{(1)}$  в  $\beta_{\text{fin}}$ .

На шагах 12-14 из списка участников сличений удаляются лаборатории, интервалы неопределенности которых не содержат выявленное опорное значение. На шаге 15 определяется стандартная неопределенность полученного опорного значения как наименьшее из двух значений: максимальная нижняя граница  $u_{\text{H}}(x_i) \leq x_{\text{ref}}$  и минимальная верхняя граница  $u_{\text{B}}(x_i) \geq x_{\text{ref}}$  интервалов неопределенности лабораторий.

### 3.2 Пример применения метода агрегирования предпочтения

Рассмотрим как работает МАП на примере сгенерированных данных сличений 15 лабораторий, которые были смоделированы при помощи программного генератора псевдослучайных чисел, (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Сгенерированные данные сличений

Лаборатория	$x_i$	$u(x_i)$
1	2,9175	0,1903
2	3,0850	0,2441
3	3,2251	0,2891
4	2,4911	0,0534
5	2,9892	0,2133

## Продолжение таблицы 3.1

Лаборатория	$x_i$	$u(x_i)$
6	3,2222	0,2881
7	2,7377	0,1326
8	3,0693	0,239
9	2,5594	0,0753
10	3,0999	0,2489
11	2,9183	0,1905
12	2,8937	0,1827
13	2,626	0,0967
14	2,8988	0,1843
15	3,0772	0,2416

Тогда  $a_1 = 2,44$ ;

$$a_2 = 2,71;$$

$$a_3 = 2,98;$$

$$a_4 = 3,24;$$

$$a_5 = 3,51.$$

Сформируем профиль предпочтения из 15 ранжирований, описывающих интервалы неопределенности соответствующих лабораторий:

$$\begin{array}{lll}
 \lambda_1: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_6: a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5 & \lambda_{11}: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \\
 \lambda_2: a_2 \sim a_3 \succ a_1 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_7: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_{12}: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \\
 \lambda_3: a_3 \sim a_4 \sim a_5 \succ a_1 \sim a_2 & \lambda_8: a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5 & \lambda_{13}: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \\
 \lambda_4: a_1 \succ a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_9: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_{14}: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \\
 \lambda_5: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 & \lambda_{10}: a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5 & \lambda_{15}: a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5
 \end{array} \quad (3.3)$$

Для профиля предпочтений (3.3) получено 1 оптимальное решение (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Оптимальные решения для профиля предпочтений (3.3)

3	4	2	1	5
$D_{\text{least}} = 96$		$D(\beta, \Lambda) = 96$		
$N_{\text{kem}} = 46$		$n = 5; m = 15$		

Таким образом, единственное ранжирование консенсуса принимает вид:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5\},$$

в котором значение  $a_3 = 2,98$ , принимается в качестве опорного значения  $x_{\text{ref}}$ , с соответствующей стандартной неопределенностью  $u(x_{\text{ref}}) = 0,04$  (опорное

значение показано на рисунке 3.3 красной горизонтальной линией, неопределенность – красной пунктирной линией).

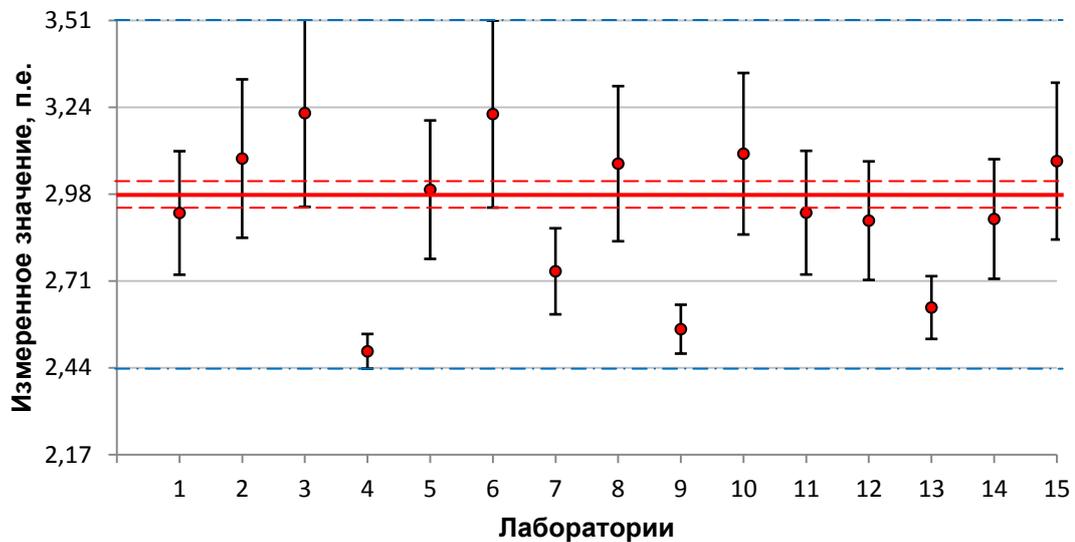


Рисунок 3.4 – Сгенерированные данные сличений для 15 лабораторий

Результаты лабораторий 4, 7, 9, 13 исключаются из формирования НСП данных сличений, т.к. их интервалы неопределенности не включают в себя установленное опорное значение.

В следующем параграфе представлено программное обеспечение, которое будет использовано для проведения численной экспериментальной проверки работоспособности МАП на множестве результатов измерений лабораторий [18, 91].

### 3.3 Разработка программной среды для экспериментальных исследований метода агрегирования предпочтения

Для того, чтобы убедиться в работоспособности МАП на статистически значимом объеме результатов измерений лабораторий, а также оценить его качество по сравнению с уже существующими методами (процедурой А, алгоритмом Нильсена и др., см. главу 1), необходимо обеспечить возможность реализации соответствующих численных экспериментальных исследований.

Для этой цели был разработан программный комплекс (ПК) INTERLABCOM, позволяющий автоматизировать экспериментальные

исследования, генерировать данные сличений, распределенные по различным законам, документировать промежуточные и итоговые результаты проведенных исследований. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612263 "Программный комплекс для моделирования и обработки результатов межлабораторных сличений" [34].

### **3.3.1 Архитектура программного комплекса обработки и анализа данных сличений**

Основными требованиями, предъявляемыми к разрабатываемому ПК INTERLABCOM, были следующие:

- интерактивный интерфейс пользователя, позволяющий наглядно отображать данные и приводить краткую сводную информацию;
- возможность генерации результатов измерений лабораторий с настраиваемыми пользователем параметрами;
- работа с данными из различных источников, в том числе загрузка и сохранение в формате Excel;
- модульность архитектуры проектируемого комплекса, позволяющая производить добавление или замену методов анализа исследуемых данных.

ПК, реализующий описанные требования, разработан в среде Microsoft Visual C#. При проектировании ПК INTERLABCOM был применен функционально-модульный подход. В основу его архитектуры вошли следующие компоненты (рисунок 3.5):

- графическая оболочка (интерфейс);
- модуль работы с данными (модель данных, генерация, сохранение, экспорт);
- блок обработки данных.

ПК INTERLABCOM управляется посредством интерфейса пользователя, который запускает все необходимые процессы.

Для сбора и анализа данных в процессе разработки ПК INTERLABCOM и реализации выбранных алгоритмов были выработаны и использованы принципы, приведенные ниже:

- **П1. Модульность.** Данный принцип заключается в разбиении задачи на ряд логически законченных задач-модулей, которые имеют унифицированный интерфейс обмена [67]. Достоинство такого принципа – возможность разрабатывать каждую задачу отдельно, а так же изменять реализацию отдельных подзадач, независимо от остальных. При этом унифицированный интерфейс межмодульного обмена сохраняется вне зависимости от того, используются ли модули в виде одной "монолитной" программы или реализованы в виде отдельных программ. Это позволяет, при необходимости, отлаживать каждый модуль в виде законченной программы, а затем компилировать несколько модулей в единый файл.
- **П2. Одна задача – один класс.** Принцип заключается в том, что каждая логически законченная задача (или несколько связанных задач) реализуется в виде законченного набора переменных, методов и функций [67]. При этом подходе для реализации обмена информации между модулями используются так называемые "интерфейсы", которые являются по сути синтаксической конструкцией в коде программы, используемые для специфицирования услуг, предоставляемых классом. Это позволяет повысить безопасность работы системы в целом и ускоряет локализацию проблемных мест при возникновении сбоев.

**Интерфейс пользователя.** ПК INTERLABCOM позволяет обрабатывать сгенерированные данные или загружать данные реальных сличений, предоставляемые участниками, для дальнейшей их обработки. Для проведения численных экспериментальных исследований разработан удобный интерфейс (рисунок 3.6). В программе предусмотрена возможность работы одновременно с несколькими наборами данных или задачами с разными параметрами. Для этого каждое исследование (задача) отображается в программе в виде отдельной вкладки.

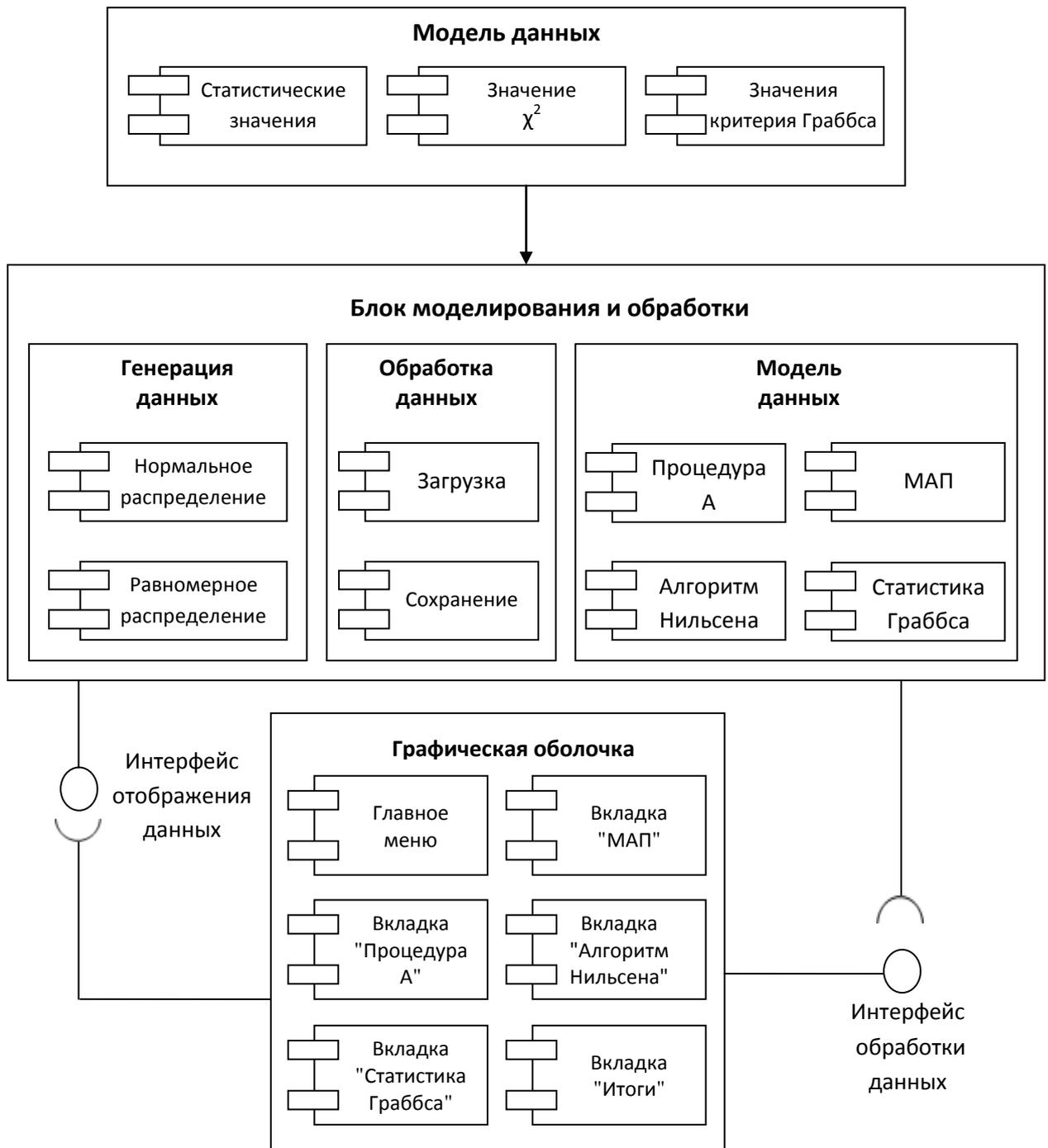


Рисунок 3.5 – Архитектура ПК

Результаты измерений, предоставляемые участниками, могут моделироваться с помощью программного генератора псевдослучайных чисел.

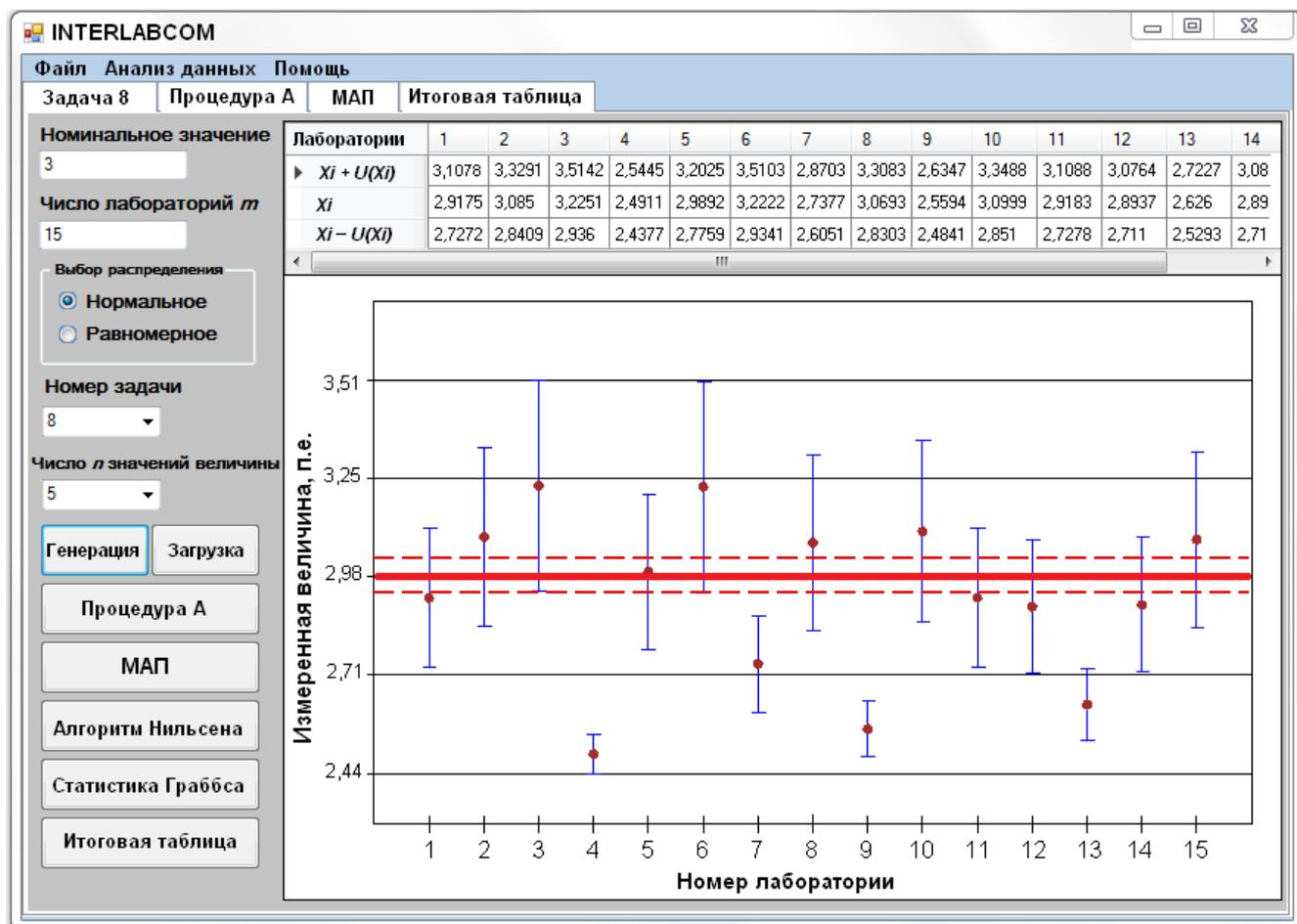


Рисунок 3.6 – Интерфейс программного обеспечения для экспериментальных исследований алгоритмов обработки данных сличений

Для этого при подготовке к эксперименту в специальном окне программы задаются: номинальное значение измеряемой величины  $x_{\text{ном}}$  и количество  $m$  участвующих лабораторий. Генерация данных осуществляется с помощью следующей последовательности действий: Главное меню > Анализ данных > Ввод данных > задать "Номинальное значение" > задать "Количество лабораторий" > установить "Выбор распределения" > выбрать "Номер задачи" > запустить "Генерация".

Также пользователь может применить в исследовании заранее подготовленную выборку данных. Для этого в программе встроена функция загрузки из файла формата Excel. Порядок загрузки данных представлен следующей последовательностью: Главное меню > Анализ данных > Ввод данных > Загрузка > Выбор местоположения файла > Открыть.

После нажатия кнопки "Генерация" или "Загрузка" в главном окне отображается таблица, в которой представлены исходные (сгенерированные) данные сличений: значения измеряемой величины  $x_i$  и неопределенности  $u(x_i)$ . Неопределенность представлена в виде верхней  $\langle x_i + u_{\text{в}}(x_i) \rangle$  и нижней  $\langle x_i - u_{\text{н}}(x_i) \rangle$  границ.

Для наглядного отображения условий эксперимента в соответствующем окне программы пользователю представлен график, на котором отображаются полученные лабораториями интервалы неопределенности в координатах "Измеряемая величина" (ось ординат) и "Номер лаборатории" (ось абсцисс).

Пользователю представлен целый набор методов обработки данных сличений, среди которых реализована традиционная Процедура А, алгоритм Нильсена и статистический метод на основе критерия Граббса. ПК INTERLABCOM позволяет осуществлять обработку данных для каждого метода в отдельном окне. Для этого необходимо выбрать алгоритм, нажать соответствующую кнопку и на вновь открывшейся вкладке выбрать кнопку "Начать обработку данных". В этом случае на вкладке отобразятся:

- график результатов сличений;
- таблица с исходными данными (значения измеряемой величины и соответствующая неопределенность);
- полученное опорное значение;
- заключение о совместимости результатов для каждой лаборатории.

Каждый несовместимый с решением результат измерения, представленный некоторой лабораторией, выделяется красным цветом на графике.

Для запуска обработки результатов сличений методом агрегирования предпочтений необходимо предварительно выбрать число  $n$  значений величины и разбить диапазон актуальных значений на соответствующее количество интервалов.

Результаты обработки данных сличений разными методами для каждой сгенерированной задачи формируются в сводную таблицу и итоговый график сличений (рисунок 3.7). Для этого на главной панели ПК необходимо выполнить

следующую последовательность действий: Итоговая таблица > перейти на вкладку "Итоговая таблица" с соответствующим номером задачи > произвести запись файла "Сохранить".

Опорное значение  $x_{\text{ref}}$ , полученное по итогам обработки результатов сличений различными методами, отображается на итоговом графике для каждого метода определенным цветом. Результирующие данные сличений и график может быть сохранен в формате Microsoft Excel для дальнейшей обработки и проведения более глубокого анализа применяемых методов.

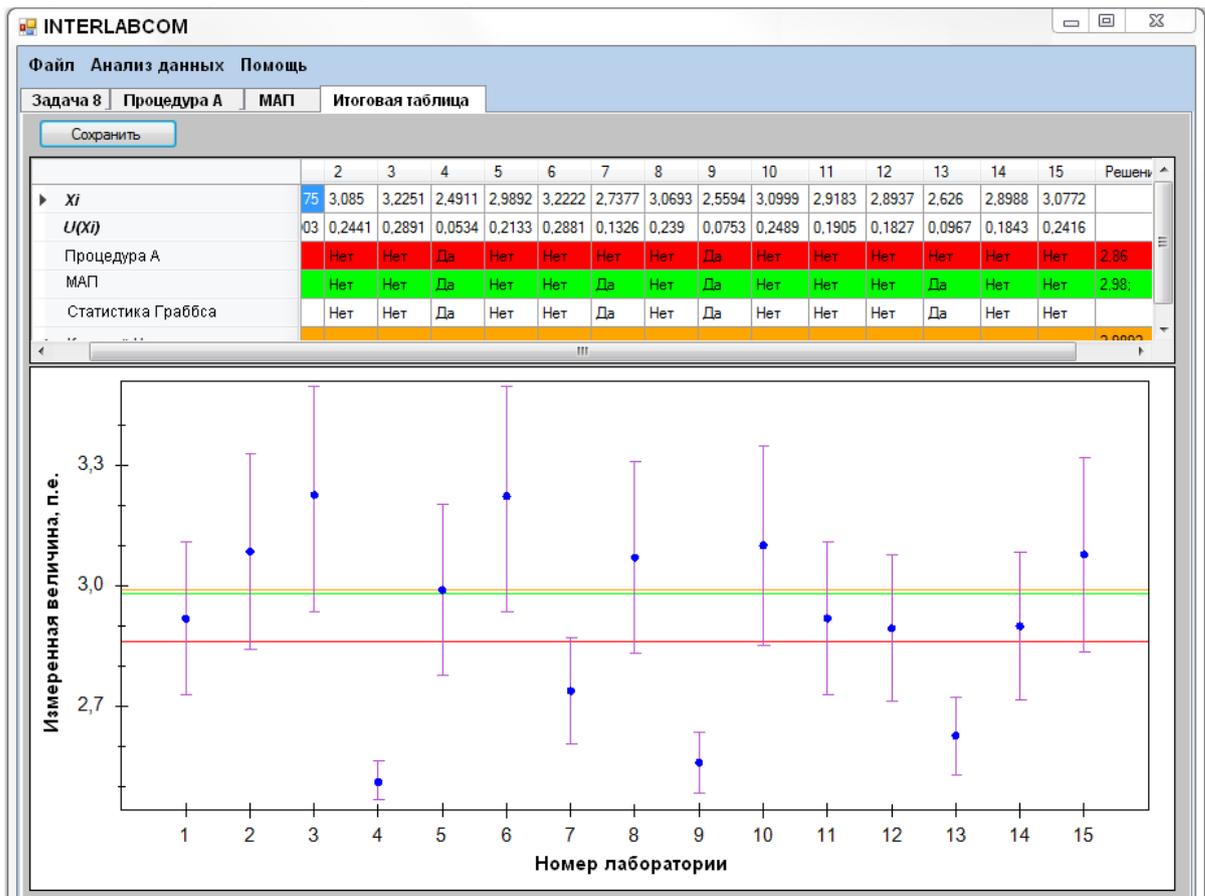


Рисунок 3.7 – Сводная таблица и итоговый график сличений

**Генерирование данных сличений.** Для исследования различных алгоритмов анализа данных сличений, был применен метод имитационного моделирования, при котором реальный объект заменяется имитирующим (моделируемым) объектом [4, 7]. В качестве моделируемых результатов сличений выступали сгенерированные ПК данные.

Такой подход был применен по причине отсутствия большого количества наборов реальных данных сличений с известными характеристиками и параметрами, на которых было бы возможно проводить эксперименты. При этом в ПК для изучения моделируемых данных предусмотрена возможность настройки параметров генерации выборки с целью воссоздания определенной модели исследования. Допуская, что модель конструкции достаточно точно описывает объект, предполагается, что полученные в ходе имитации статистические распределения значений параметра моделируемого объекта будут в той или иной степени совпадать с распределением значений параметра реального объекта, т.е. реальных данных сличений.

При моделировании данных сличений имеется возможность настроить параметры генерируемых значений. Для этого при подготовке к эксперименту в специальном окне ПК задаются номинальное значение измеряемой величины  $x_{\text{ном}}$  и количество  $m$  участвующих лабораторий, выбор равномерного или нормального закона распределения.

Для генерации двух выборок, представляющие исходные данные из значений измеряемой величины  $x_i$  и интервалов неопределенности  $u(x_i)$  применяется метод Монте-Карло. Моделирование случайной величины по методу Монте-Карло представляет собой автоматизированную математическую методику [70]. Основой практического применения метода Монте-Карло являются датчики равномерно распределенных случайных величин, которыми снабжены современные электронно-вычислительные машины [35]. При этом случайная величина  $R$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  при условии, что функция плотности вероятности этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{для } a \leq R \leq b, \\ 0, & \text{для } R < a \text{ или } R > b. \end{cases}$$

В программном комплексе генерирование равномерно распределенных данных  $x_i$  и его неопределенности  $u(x_i)$  в окрестности заданного  $x_{\text{ном}}$  происходит с

помощью стандартной библиотечной функции  $\text{rand}()$ . Для этого отдельно задается диапазон значений измеряемой величины  $[x_{min}; x_{max}]$  и диапазон значений неопределенности  $[u_{min}; u_{max}]$ . Затем производится расчет математического ожидания  $\mu$  и дисперсии  $\sigma$  для заданных диапазонов измеряемой величины и неопределенности, которые определяются в соответствии с формулами:

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma = \frac{b-a}{6} \quad (3.4)$$

Блок схемы алгоритмов генерации исходных данных приведены на рисунке 3.7.

Генерацию нормальных случайных значений результатов сличений получают из равномерно распределенных данных, с помощью преобразования Бокса-Мюллера [52]. В общем случае преобразование двух независимо равномерно распределенных величины будет выглядеть следующим образом. Пусть  $r$  и  $\phi$  – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале  $(0, 1)$ . Для генерации чисел  $X_0$  и  $X_1$ , имеющих стандартное нормальное распределение, применяются формулы Бокса-Мюллера [52]:

$$X_0 = \cos(2\pi\phi)\sqrt{-2\ln r}; \quad X_1 = \sin(2\pi\phi)\sqrt{-2\ln r} \quad (3.5)$$

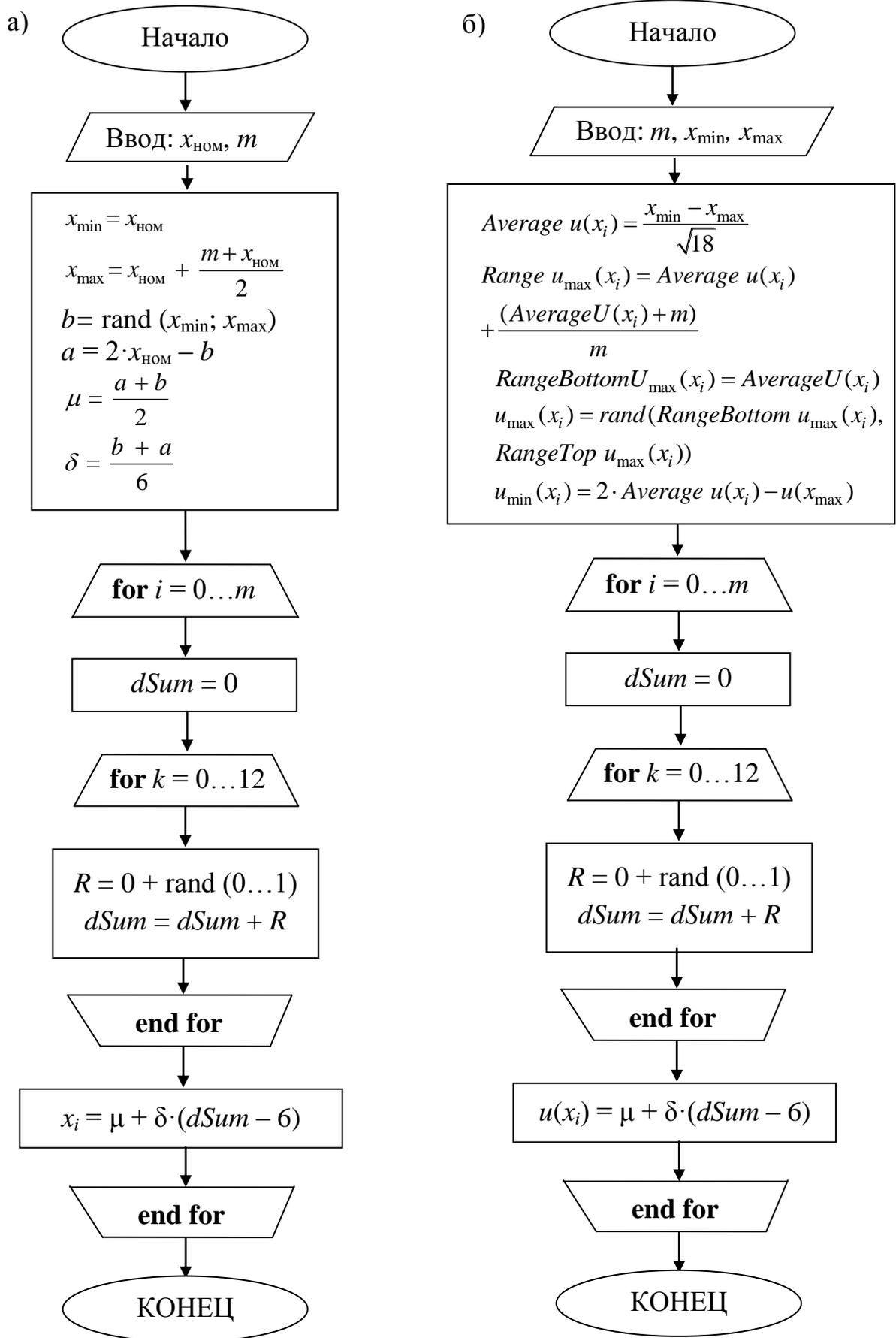
Затем моделируются числа, имеющие нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ , используя формулу [52]:

$$Y = \mu + \sigma z \quad (3.6)$$

Это уже не является частью преобразования Бокса – Мюллера, но позволяет завершить генерацию нормальной случайной величины.

**Блок обработки.** Блок обработки моделируемых данных сличений реализует четыре метода: Процедуру А, МАП, алгоритм, предложенный Нильсеном, и статистический метод на основе критерия Граббса.

Формальная запись Процедуры А, алгоритма определения выбросов при использовании статистики критерия Граббса и алгоритма Нильсена приведены в первой главе. Алгоритм обработки данных сличений МАП подробно описан в параграфе 3.2 и представлен на рисунке 3.1.



а) измеренное значение,  $x_i$  и б) интервалы неопределенности,  $u(x_i)$

Рисунок 3.7 – Алгоритм генерации исходных данных:

### **3.3.2 Программная реализация алгоритма обработка данных сличений на основе агрегирования предпочтений**

В состав ПК INTERLABCOM входит программное обеспечение (ПО), разработанное для обработки данных сличений методом агрегирования предпочтений, которое может применяться при проведения ключевых, дополнительных, а также межлабораторных сличений при оценивании компетентности лабораторий. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612262 "Программное обеспечение для обработки результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений" [33].

Это ПО разработано в среде Microsoft Visual C# с использованием платформы .Net Framework 4.5 и технологии визуализации программного интерфейса Microsoft WPF. Такой подход позволил разработать графический интерфейс с возможностью более удобного отображения данных, условий и параметров сличений (рисунок 3.9).

При подготовке к обработке данных сличений в модуле ввода исходной информации загружаются результаты оценок участвующих  $m$  лабораторий и определяется число  $n$  значений величины. Представленные лабораториями результаты, отображаются в специальной таблице и на графике. При загрузке данных из формата Microsoft Excel в специальном предварительном окне имеется возможность выбора импортирования необходимых данных (столбцов и строк) для дальнейшего анализа. Результаты обработки данных сличений МАП формируются в сводную таблицу и итоговый график.

Меню "Параметры программы" позволяет настроить модули (исходные данные, выявленные выбросы, график, итоговое ранжирование консенсуса и др.), которые будут составлять сохранение данных сличений для их дальнейшего анализа. Сохранение результатов обработки сличений в ПО DRA реализуется благодаря функции "Экспорт данных" в формат Microsoft Excel, а также функции "Печать" непосредственно из интерфейса программы.

В следующем параграфе представлены результаты численных экспериментальных исследований на множестве данных, сгенерированных и обработанных с помощью разработанного ПК INTERLABCOM.

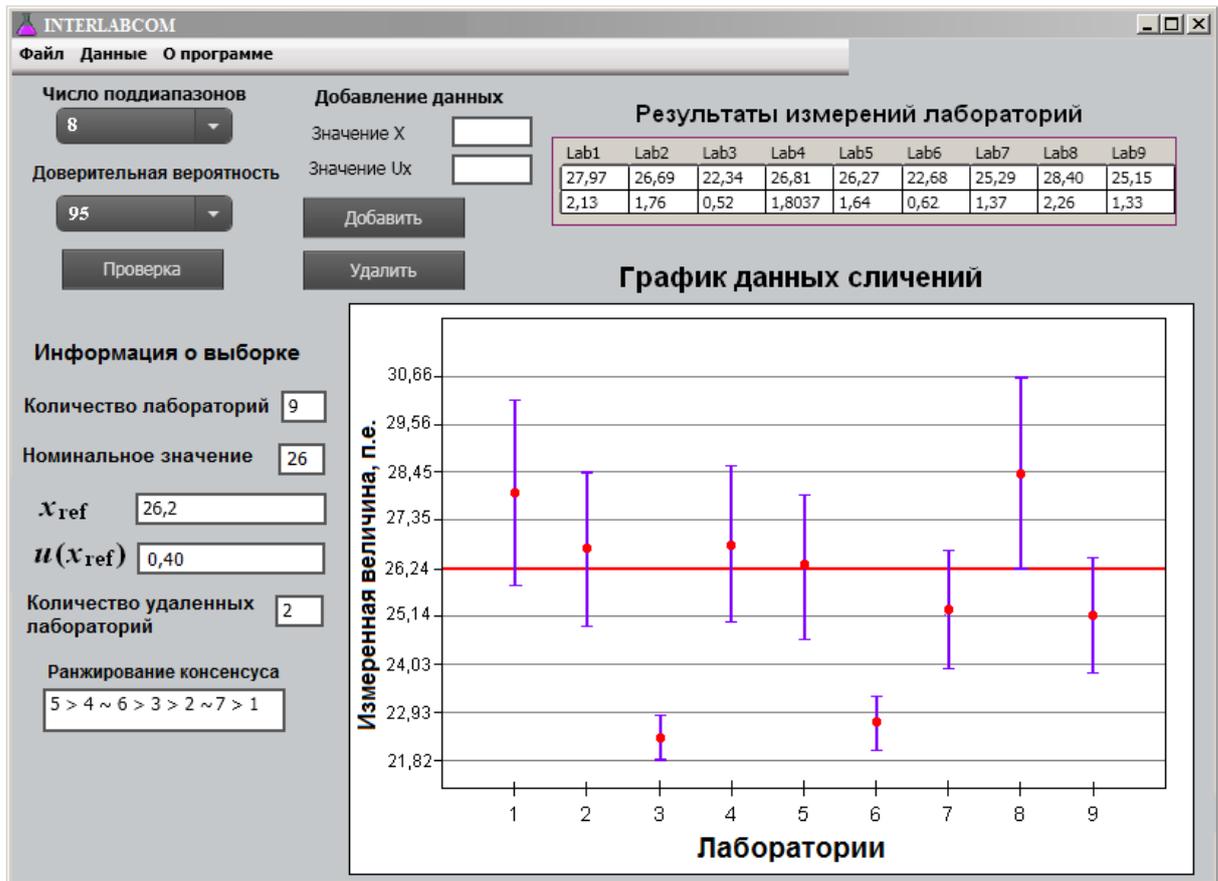


Рисунок 3.9 – Интерфейс программного обеспечения для обработки результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений.

### 3.4 Проведение численных экспериментальных исследований

#### 3.4.1 Исследование робастности и работоспособности метода агрегирования предпочтения

Так как при обработке результатов сличений предложенным МАП используются порядковые данные в форме ранжирований, необходимо убедиться, что полученное опорное значение не должно зависеть от вида закона распределения результатов измерений [19, 20].

Основными целями численных экспериментов являлись:

- проверка работоспособности МАП;

- исследование *робастности* МАП, т.е. независимости этого метода от вида закона распределения результатов измерений.

При подготовке к эксперименту в специальном окне ПК задавались:

- номинальное значение измеряемой величины  $x_{\text{НОМ}} = 3$ ;
- количество участвующих лабораторий  $m = 15$ ;
- число  $n$  значений ДАЗ.

Сгенерированные данные сличений отображались на экране монитора, обрабатывались МАП, Процедурой А и алгоритмом Нильсена, и далее сохранялись для последующего использования.

Так как  $x_{\text{НОМ}}$  было заранее известно, о *качестве метода М* обработки результатов сличений можно судить по отклонению  $\xi$  полученного этим методом опорного значения  $x_{\text{ref}}(M)$  от  $x_{\text{НОМ}}$ :

$$\xi = |x_{\text{ref}}(M) - x_{\text{НОМ}}|. \quad (3.7)$$

Были сгенерированы распределенные по равномерному закону данные 100 индивидуальных задач, которые были обработаны Процедурой А и алгоритмом Нильсена (таблица 3.2). Эти же данные были обработаны МАП при различных значениях  $n = \{4, 5, \dots, 10\}$  для того, чтобы сформировать в дальнейшем рекомендации по выбору подходящего числа значений ДАЗ. В таблицах 3.2 и 3.3 и на рисунках 3.10 и 3.11 опорное значение  $x_{\text{ref}}$ , найденное МАП, представлено наиболее близким к номинальному  $x_{\text{НОМ}}$  значением, из всех, полученных при различных значениях  $n$  (см. шаги 1-3 алгоритма 5).

Таблица 3.2 – Результаты обработки данных 100 индивидуальных задач, сгенерированных по равномерному закону

№ задачи	$x_{\text{НОМ}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
1	3,00	3,01	0,01	2,92	0,08	2,95	0,05
2	3,00	3,12	0,03	2,43	0,57	3,25	0,25
3	3,00	3,04	0,04	2,69	0,31	2,67	0,33
4	3,00	2,87	0,13	2,06	0,94	2,46	0,54
5	3,00	2,98	0,02	2,65	0,35	2,86	0,14
6	3,00	2,98	0,02	2,16	0,84	2,86	0,14

Продолжение таблицы 3.2

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
7	3,00	2,89	0,11	2,54	0,46	2,54	0,46
8	3,00	3,45	0,45	3,24	0,24	3,57	0,57
9	3,00	2,81	0,19	2,57	0,43	2,74	0,26
10	3,00	2,91	0,09	2,49	0,51	2,71	0,29
11	3,00	3,10	0,10	3,00	0,00	3,20	0,20
12	3,00	3,12	0,12	2,62	0,38	3,37	0,37
13	3,00	2,96	0,04	2,62	0,38	2,73	0,27
14	3,00	3,04	0,04	2,97	0,03	3,00	0,00
15	3,00	3,14	0,14	2,69	0,31	3,06	0,06
16	3,00	2,98	0,02	2,90	0,10	2,90	0,10
17	3,00	2,90	0,10	2,54	0,46	2,53	0,47
18	3,00	3,01	0,01	2,85	0,15	3,06	0,06
19	3,00	2,97	0,03	2,49	0,51	3,04	0,04
20	3,00	2,94	0,06	2,82	0,18	2,81	0,20
21	3,00	2,92	0,08	2,20	0,80	2,56	0,44
22	3,00	2,92	0,08	2,75	0,25	2,87	0,13
23	3,00	2,97	0,03	2,37	0,63	2,94	0,06
24	3,00	2,98	0,02	2,72	0,28	2,74	0,26
25	3,00	2,76	0,24	2,55	0,45	2,30	0,70
26	3,00	2,94	0,06	2,63	0,37	2,78	0,22
27	3,00	2,82	0,18	2,16	0,84	2,63	0,37
28	3,00	2,74	0,26	2,77	0,23	2,73	0,27
29	3,00	3,08	0,08	3,25	0,25	3,09	0,09
30	3,00	2,96	0,04	2,57	0,43	2,65	0,35
31	3,00	2,97	0,03	2,57	0,43	2,67	0,33
32	3,00	3,05	0,05	2,59	0,41	3,14	0,14
33	3,00	2,95	0,05	1,91	1,09	3,14	0,14
34	3,00	2,89	0,11	2,41	0,59	2,58	0,42
35	3,00	2,99	0,01	2,99	0,01	3,00	0,00
36	3,00	3,01	0,01	2,53	0,47	2,99	0,01
37	3,00	2,97	0,03	2,96	0,04	2,94	0,06
68	3,00	2,99	0,01	2,71	0,29	2,70	0,30
69	3,00	2,90	0,10	2,63	0,37	2,71	0,29
70	3,00	2,99	0,01	3,00	0,00	2,91	0,09
71	3,00	2,92	0,08	2,28	0,72	3,20	0,20
72	3,00	2,84	0,17	2,66	0,34	2,62	0,38
73	3,00	3,03	0,03	2,88	0,12	2,62	0,38
74	3,00	2,94	0,06	2,77	0,23	2,82	0,18
75	3,00	2,86	0,14	2,40	0,60	3,08	0,08

## Продолжение таблицы 3.2

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
76	3,00	2,98	0,02	2,90	0,10	2,93	0,07
77	3,00	3,11	0,11	2,38	0,62	3,22	0,22
78	3,00	2,97	0,03	2,88	0,12	2,80	0,20
79	3,00	2,73	0,27	1,90	1,10	2,44	0,56
80	3,00	3,00	0,00	2,49	0,51	3,01	0,01
81	3,00	2,96	0,04	2,95	0,05	2,95	0,05
82	3,00	3,01	0,01	2,39	0,61	2,50	0,50
83	3,00	2,97	0,03	2,90	0,10	2,90	0,10
84	3,00	2,95	0,05	2,62	0,38	2,85	0,15
85	3,00	2,98	0,02	2,85	0,15	2,85	0,15
86	3,00	3,08	0,08	3,01	0,01	3,09	0,09
87	3,00	2,94	0,06	2,79	0,21	2,79	0,21
88	3,00	3,07	0,07	2,18	0,82	3,27	0,27
89	3,00	2,91	0,09	2,77	0,23	2,75	0,25
90	3,00	3,23	0,23	2,94	0,06	3,36	0,36
91	3,00	2,81	0,19	2,94	0,06	2,86	0,14
92	3,00	2,98	0,02	2,30	0,70	2,74	0,26
93	3,00	3,13	0,13	2,90	0,10	3,11	0,11
94	3,00	3,18	0,18	2,35	0,65	3,12	0,12
95	3,00	2,97	0,03	2,72	0,28	2,70	0,30
96	3,00	2,88	0,12	3,10	0,10	2,89	0,11
97	3,00	3,01	0,01	2,55	0,45	2,93	0,07
98	3,00	2,98	0,02	1,91	1,09	3,36	0,36
99	3,00	2,94	0,06	2,73	0,27	2,79	0,21
100	3,00	2,96	0,04	2,89	0,11	2,69	0,31

Также были сгенерированы распределенные по нормальному закону данные 100 индивидуальных задач. Были предприняты те же действия для обработки сгенерированных данных, что и для равномерного закона распределения (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Результаты обработки данных 100 индивидуальных задач, сгенерированных по нормальному закону

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
1	3,00	2,97	0,03	2,92	0,08	2,95	0,05

Продолжение таблицы 3.3

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
2	3,00	2,91	0,09	2,90	0,10	2,93	0,07
3	3,00	2,95	0,05	2,91	0,09	2,91	0,09
4	3,00	2,85	0,15	2,81	0,19	2,70	0,30
5	3,00	2,98	0,02	2,98	0,02	2,96	0,04
6	3,00	2,92	0,08	2,46	0,54	2,86	0,14
7	3,00	2,99	0,01	2,86	0,14	2,79	0,21
8	3,00	3,05	0,05	2,90	0,10	3,10	0,10
9	3,00	2,89	0,11	2,89	0,11	2,91	0,09
10	3,00	2,84	0,16	2,67	0,33	2,68	0,32
11	3,00	2,98	0,02	3,00	0,00	3,02	0,02
12	3,00	2,97	0,03	2,77	0,23	2,85	0,15
13	3,00	2,87	0,13	2,67	0,33	2,92	0,08
25	3,00	3,03	0,03	2,90	0,11	3,12	0,12
26	3,00	2,99	0,01	2,97	0,03	2,90	0,10
27	3,00	2,97	0,03	2,80	0,20	2,76	0,24
28	3,00	2,94	0,06	2,97	0,03	2,93	0,07
29	3,00	2,98	0,02	2,94	0,06	2,94	0,06
30	3,00	2,93	0,07	2,97	0,03	2,81	0,19
31	3,00	3,01	0,01	2,80	0,20	2,74	0,26
32	3,00	2,98	0,02	2,90	0,10	3,04	0,04
33	3,00	2,97	0,03	2,81	0,19	2,95	0,05
34	3,00	2,75	0,25	2,80	0,20	2,64	0,36
35	3,00	2,99	0,01	2,99	0,01	2,99	0,01
36	3,00	2,99	0,01	2,78	0,22	3,03	0,03
37	3,00	2,96	0,04	2,99	0,01	2,96	0,04
38	3,00	2,91	0,09	2,55	0,45	2,41	0,59
39	3,00	2,98	0,02	2,97	0,03	2,96	0,04
40	3,00	2,97	0,03	2,84	0,16	2,81	0,19
41	3,00	2,95	0,05	2,97	0,03	3,01	0,01
42	3,00	2,99	0,01	2,91	0,09	2,89	0,11
43	3,00	3,01	0,01	3,01	0,01	2,97	0,03
44	3,00	2,91	0,09	3,00	0,00	2,92	0,08
45	3,00	3,02	0,02	3,00	0,00	3,04	0,04
46	3,00	2,96	0,04	2,92	0,08	2,96	0,04
47	3,00	2,94	0,06	2,93	0,07	2,93	0,07
48	3,00	2,92	0,08	2,89	0,11	2,78	0,22
49	3,00	2,99	0,01	2,99	0,01	2,95	0,05
50	3,00	2,97	0,03	2,91	0,09	2,89	0,11
51	3,00	3,05	0,05	2,99	0,01	3,03	0,03

Продолжение таблицы 3.3

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
52	3,00	3,10	0,10	3,05	0,05	3,18	0,18
53	3,00	3,03	0,02	2,93	0,07	3,04	0,04
54	3,00	2,97	0,03	2,71	0,29	2,89	0,11
55	3,00	2,93	0,07	2,61	0,39	2,52	0,48
56	3,00	3,06	0,06	3,03	0,03	3,09	0,09
57	3,00	2,94	0,06	2,93	0,07	2,91	0,09
58	3,00	3,01	0,01	2,99	0,01	2,99	0,01
59	3,00	2,98	0,02	2,93	0,07	2,96	0,04
60	3,00	2,99	0,01	2,99	0,01	2,98	0,02
61	3,00	2,66	0,34	2,76	0,24	2,62	0,38
62	3,00	2,98	0,02	2,98	0,02	2,98	0,02
63	3,00	3,04	0,04	2,87	0,13	3,07	0,07
64	3,00	2,96	0,04	2,91	0,09	2,94	0,06
65	3,00	2,89	0,11	2,97	0,03	2,67	0,33
66	3,00	2,90	0,10	2,95	0,05	2,75	0,25
67	3,00	2,93	0,07	2,80	0,20	2,97	0,03
68	3,00	2,92	0,08	2,85	0,15	2,76	0,24
69	3,00	2,90	0,10	2,91	0,09	2,93	0,07
70	3,00	2,92	0,08	2,68	0,32	2,91	0,09
71	3,00	2,97	0,03	2,83	0,17	2,85	0,15
72	3,00	2,99	0,01	2,94	0,06	2,99	0,01
73	3,00	2,91	0,09	2,91	0,09	3,17	0,17
74	3,00	2,80	0,20	2,83	0,17	2,74	0,26
75	3,00	2,83	0,17	2,63	0,37	3,18	0,18
76	3,00	3,06	0,06	2,85	0,15	2,97	0,03
77	3,00	2,99	0,01	2,93	0,07	3,17	0,17
78	3,00	2,95	0,05	2,69	0,31	2,98	0,02
79	3,00	2,82	0,18	2,74	0,26	2,68	0,32
80	3,00	2,97	0,03	2,75	0,25	3,00	0,00
81	3,00	3,04	0,04	3,00	0,00	3,00	0,00
82	3,00	2,93	0,07	2,94	0,06	2,83	0,17
83	3,00	2,98	0,02	2,98	0,02	2,98	0,02
84	3,00	2,93	0,07	2,74	0,26	2,75	0,25
85	3,00	2,94	0,06	2,93	0,07	2,94	0,06
86	3,00	2,82	0,18	2,96	0,04	2,85	0,15
87	3,00	2,99	0,01	2,88	0,12	2,83	0,17
88	3,00	2,85	0,15	2,72	0,28	2,74	0,26
89	3,00	2,88	0,12	2,90	0,10	2,88	0,12
90	3,00	3,00	0,00	2,85	0,15	2,92	0,08

Продолжение таблицы 3.3

№ задачи	$x_{\text{ном}}$	МАП		Процедура А		Алгоритм Нильсена	
		$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$	$x_{\text{ref}}$	$\xi$
91	3,00	2,96	0,04	2,93	0,07	2,93	0,07
92	3,00	2,81	0,19	2,53	0,47	2,70	0,30
93	3,00	2,99	0,01	2,98	0,02	2,94	0,06
94	3,00	2,89	0,11	2,77	0,23	2,87	0,13
95	3,00	3,06	0,06	2,98	0,02	2,99	0,01
96	3,00	3,02	0,02	3,06	0,06	3,05	0,05
97	3,00	2,94	0,06	2,83	0,17	2,93	0,07
98	3,00	3,02	0,02	3,06	0,06	3,11	0,11
99	3,00	3,03	0,03	2,92	0,08	2,85	0,15
100	3,00	2,97	0,03	2,91	0,09	3,07	0,07

Стоит отметить, что Процедура А не предназначена для применения при распределениях, отличных от нормального (см. п. 1.3.1), поэтому полученные для нее данные при равномерном распределении приведены здесь и далее для того, чтобы продемонстрировать поведение неробастного метода в сравнении с робастными на одних и тех же данных.

На рисунке 3.10 представлены графики отклонений  $\xi$ , полученные МАП и процедурой А для равномерного и нормального распределений результатов сличений. Проанализировав рисунок 3.10 следует отметить, что расхождение по  $\xi$  между нормальным и равномерным законами (кривые 3 и 4) в случае использования МАП не превышает 0,08, т.е. вид распределения практически не влияет на качество работы метода. При этом Процедура А дала значительно большее расхождение (кривые 1 и 2) – порядка 0,46.

На рисунке 3.11 представлены графики отклонений  $\xi$ , полученные МАП и алгоритмом Нильсена для равномерного и нормального распределений результатов сличений. Из рисунка 3.3 видно, МАП дал более близкие к номинальному значению оценки  $x_{\text{ref}}$ , чем алгоритм Нильсена. При этом алгоритм Нильсена (кривые 1 и 2) показал расхождение между нормальным и равномерным законами около 0,18, что почти в два раза превышает результаты, полученные МАП.

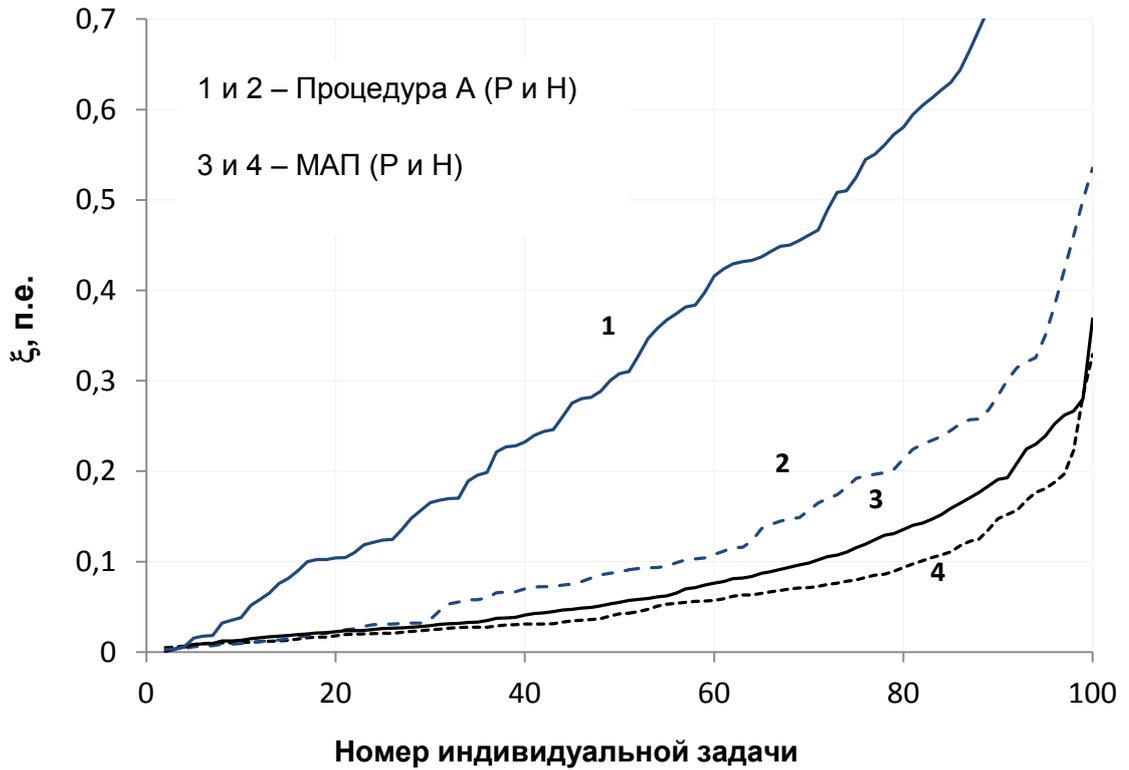


Рисунок 3.10 – Отклонения  $\xi$ , полученные МАП и процедурой А для равномерного (Р) и нормального (Н) распределений данных сличений

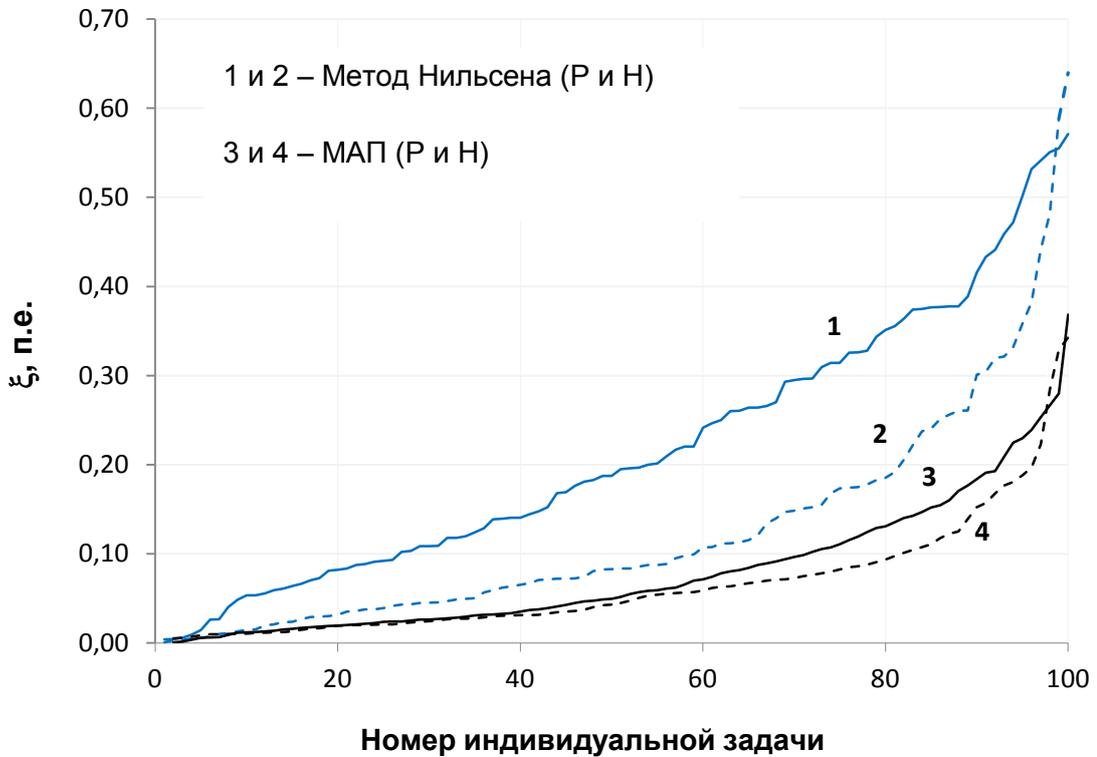
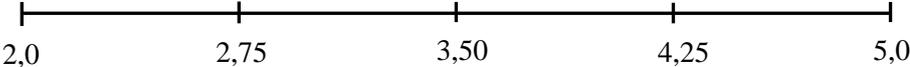
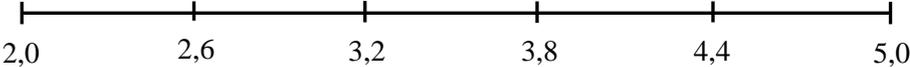
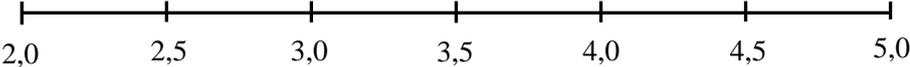
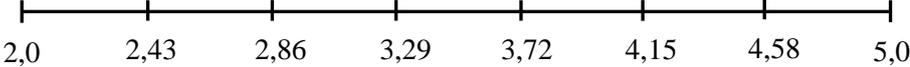
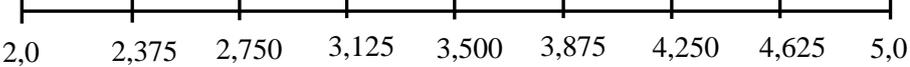
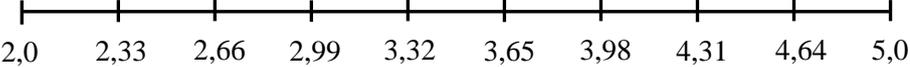


Рисунок 3.11 – Отклонения  $\xi$ , полученные МАП и алгоритмом Нильсена для равномерного (Р) и нормального (Н) распределений данных сличений

### 3.4.2 Выбор подходящего числа значений диапазона актуальных значений

Как отмечалось ранее, выбор числа  $n$  значений измеряемой величины при разбиении ДАЗ должен оказывать существенное влияние на точность определения опорного значения  $x_{\text{ref}}$ , т.к. в качестве последнего выбирается медиана получивших наивысший ранг элементов множества  $A$ , т.е., как правило, один из элементов  $a$ . Таблица 3.4 содержит пример вариантов разбиений ДАЗ при  $a_1 = 2$ ,  $a_n = 5$  и  $x_{\text{ном}} = 3$ , из которой видно, что многие значения  $a$  неоднократно повторяются в разбиениях как при малых, так и больших  $n$ . Это позволяет надеяться, что нет необходимости в разбиении ДАЗ на большое число интервалов.

Таблица 3.4 – Пример вариантов разбиений ДАЗ при  $a_1 = 2$ ,  $a_n = 5$  и  $x_{\text{ном}} = 3$

$n$ и $c$	Значения измеряемой величины $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
$n = 4; c = 1$	 2,0                      3,0                      4,0                      5,0
$n = 5; c = 0,75$	 2,0                      2,75                      3,50                      4,25                      5,0
$n = 6; c = 0,6$	 2,0                      2,6                      3,2                      3,8                      4,4                      5,0
$n = 7; c = 0,5$	 2,0                      2,5                      3,0                      3,5                      4,0                      4,5                      5,0
$n = 8; c = 0,43$	 2,0                      2,43                      2,86                      3,29                      3,72                      4,15                      4,58                      5,0
$n = 9; c = 0,375$	 2,0                      2,375                      2,750                      3,125                      3,500                      3,875                      4,250                      4,625                      5,0
$n = 10; c = 0,33$	 2,0                      2,33                      2,66                      2,99                      3,32                      3,65                      3,98                      4,31                      4,64                      5,0

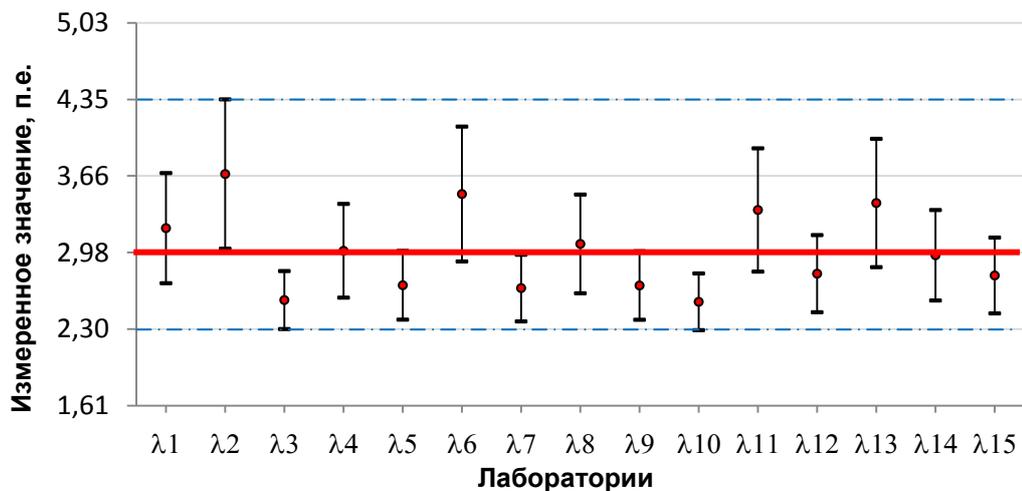
Рассмотрим на примере сгенерированных данных численного эксперимента (индивидуальная задача 33), обработанных МАП, как изменяется значение  $x_{\text{ref}}$  при различных значениях  $n = \{4, 5, \dots, 10\}$ . Для номинального значения  $x_{\text{ном}} = 3$  при нормальном распределении были сгенерированы данные сличений для 15 лабораторий (таблица 3.5).

Таблица 3.5 – Результаты сгенерированных данных сличений

Лаборатория	$x_i$	$u(x_i)$
1	3,20	0,49
2	3,68	0,67
3	2,55	0,26
4	2,99	0,42
5	2,69	0,31
6	3,50	0,60
7	2,66	0,30
8	3,06	0,44
9	2,68	0,31
10	2,54	0,25
11	3,36	0,55
12	2,79	0,34
13	3,42	0,57
14	2,95	0,40
15	2,77	0,34

Диапазон актуальных значений от 2,30 до 4,35 для рассматриваемого примера обрабатывался Алгоритмом 5 при  $n = \{4, 5, \dots, 10\}$ .

- 1)  $n = 4$ . В первом случае ДАЗ был разбит на три равных интервала (рисунок 3.12), границы которых соответствовали четырем значениям измеряемой величины  $a_1 = 2,30$ ,  $a_2 = 2,98$ ,  $a_3 = 3,66$ ,  $a_4 = 4,35$ . На основании полученного единственного ранжирования консенсуса  $\beta_{\text{fin}} = \{a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_1\}$  было определено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,98$ .

Рисунок 3.12 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 4$ )

- 2)  $n = 5$ . Рассмотренный ДАЗ был разбит на четыре равных интервала, таким образом, получили  $n = 5$  значений измеряемой величины (рисунок 3.13). Было определено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,81$  по итогам обработки данных МАП. Единственное ранжирование консенсуса приняло вид  $\beta_{\text{fin}} = \{a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_5\}$ .

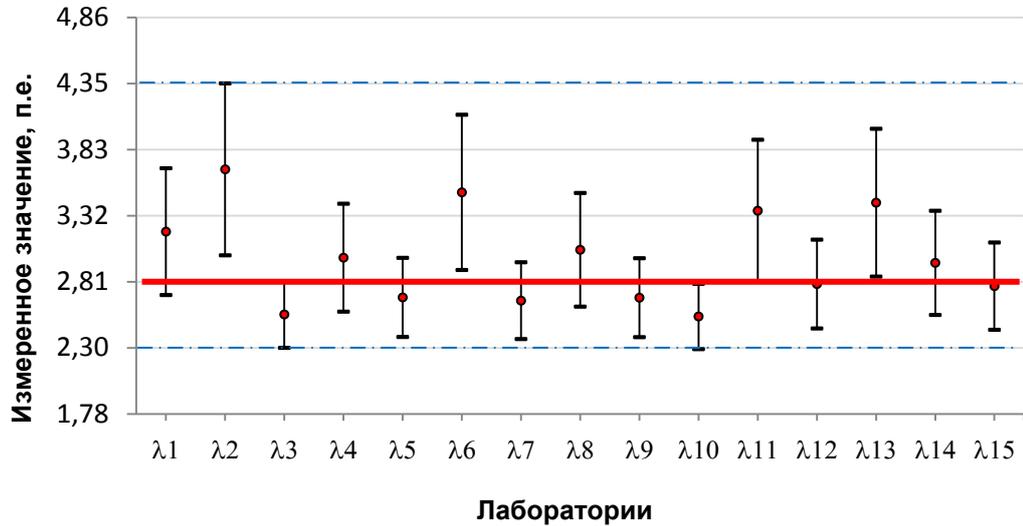


Рисунок 3.13 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 5$ )

- 3)  $n = 6$ . При разбиении ДАЗ на  $n = 6$  значений измеряемой величины было получено медианное опорное значение (рисунок 3.14). По итогам обработки результатов МАП единственное ранжирование консенсуса приняло вид  $\beta_{\text{fin}} = \{a_2 \sim a_3 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_6\}$  и найдено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,92$ .

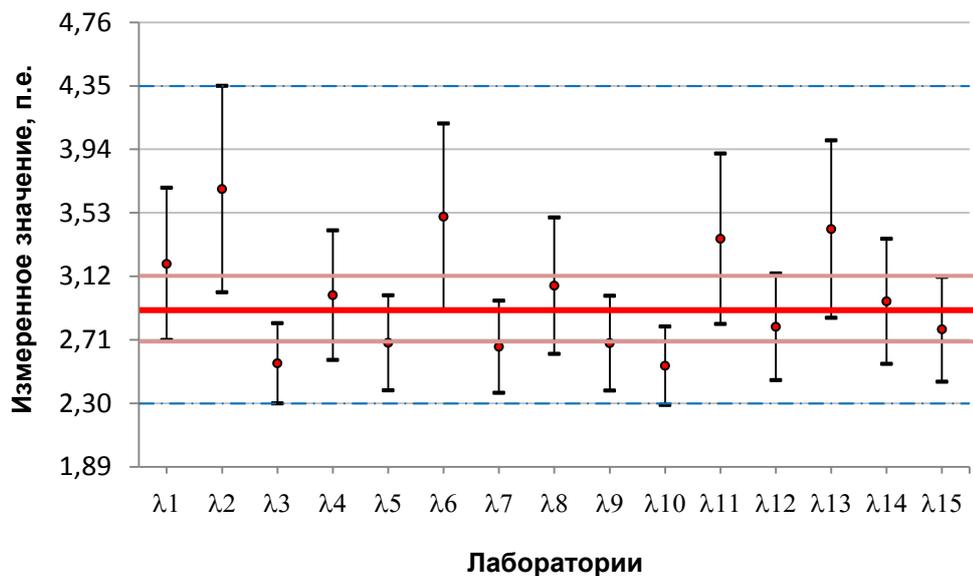


Рисунок 3.14 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 6$ )

- 4)  $n = 7$ . В случае разбиения ДАЗ на шесть равных интервалов и получении  $n = 7$  значений измеряемой величины (рисунок 3.15) было определено такое же опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,98$ , как и при  $n = 4$ . Единственное ранжирование консенсуса приняло вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_6 \succ a_1 \succ a_7\}$ .

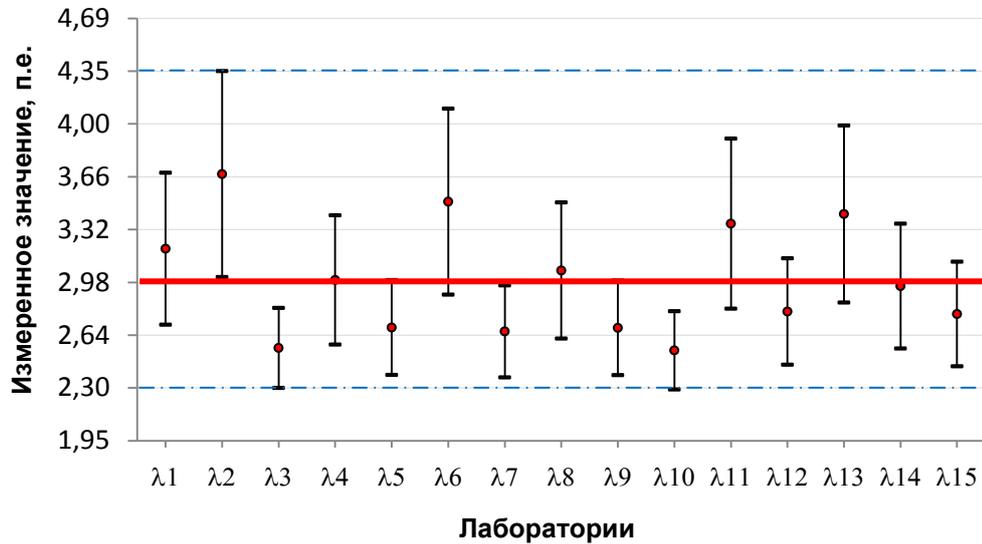


Рисунок 3.15 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 7$ )

- 5)  $n = 8$ . На рисунке 3.16 при  $n = 8$  значений измеряемой величины получено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,88$ , как и при  $n = 4$ . Единственное ранжирование консенсуса приняло вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_6 \succ a_7 \succ a_8 \succ a_1\}$ .

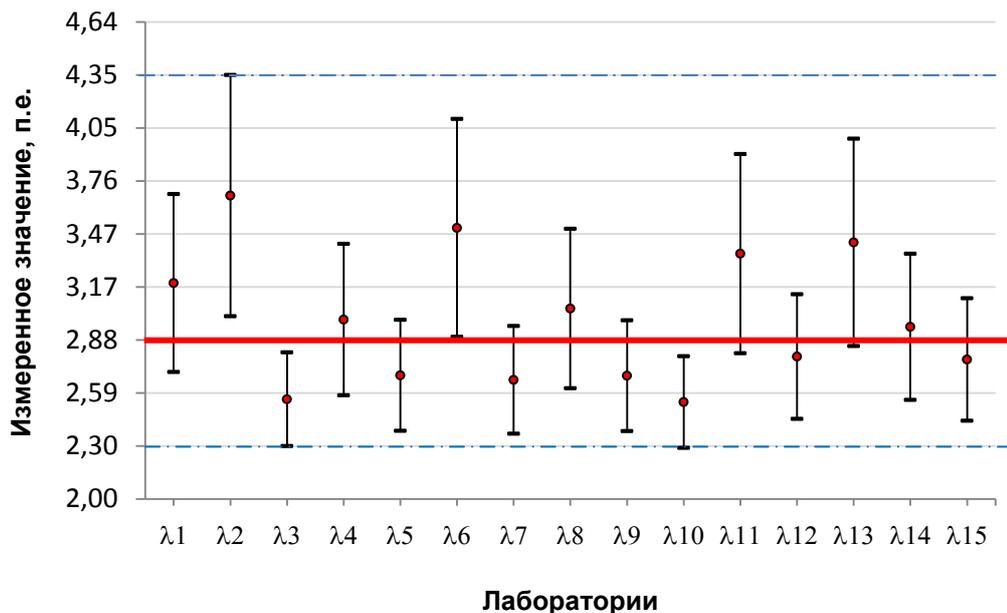


Рисунок 3.16 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 8$ )

б)  $n = 9$ . На рисунке 3.17 приведены результаты разбиения ДАЗ на 8 интервалов. По результатам обработки случаев было получено медианное опорное значения. При  $n = 9$  единственное ранжирование консенсуса приняло вид  $\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \sim a_4 \succ a_5 \succ a_2 \succ a_6 \succ a_7 \succ a_8 \succ a_1 \succ a_9\}$ , опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,93$ .

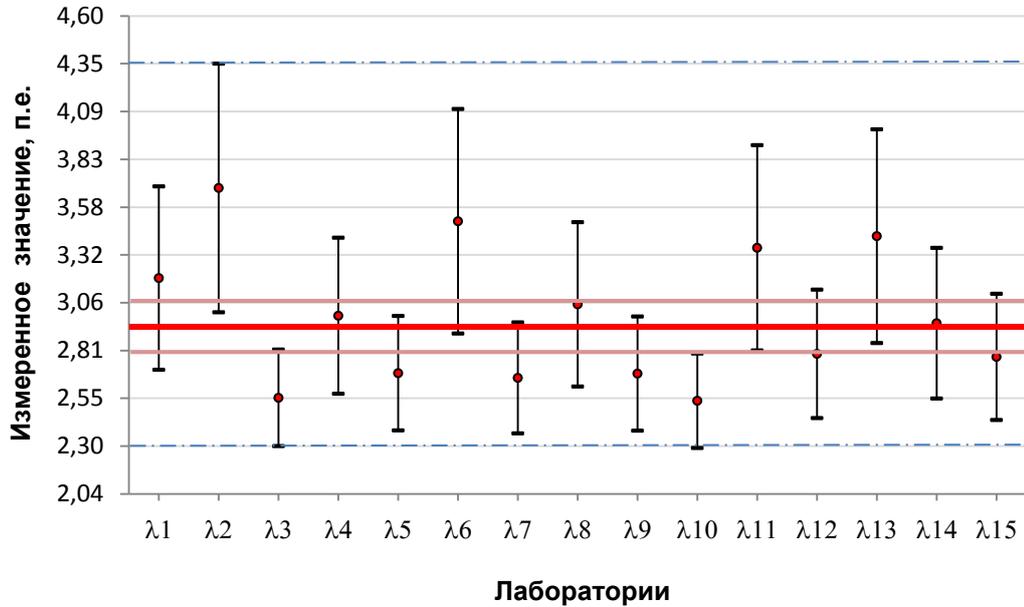


Рисунок 3.17 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 9$ )

7)  $n = 10$ . При  $n = 10$  получено  $\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \sim a_4 \succ a_6 \succ a_3 \succ a_7 \succ a_8 \succ a_9 \succ a_{10} \succ a_1\}$  и соответствующее опорное значение  $x_{\text{ref}} = 2,87$  (рисунок 3.18).

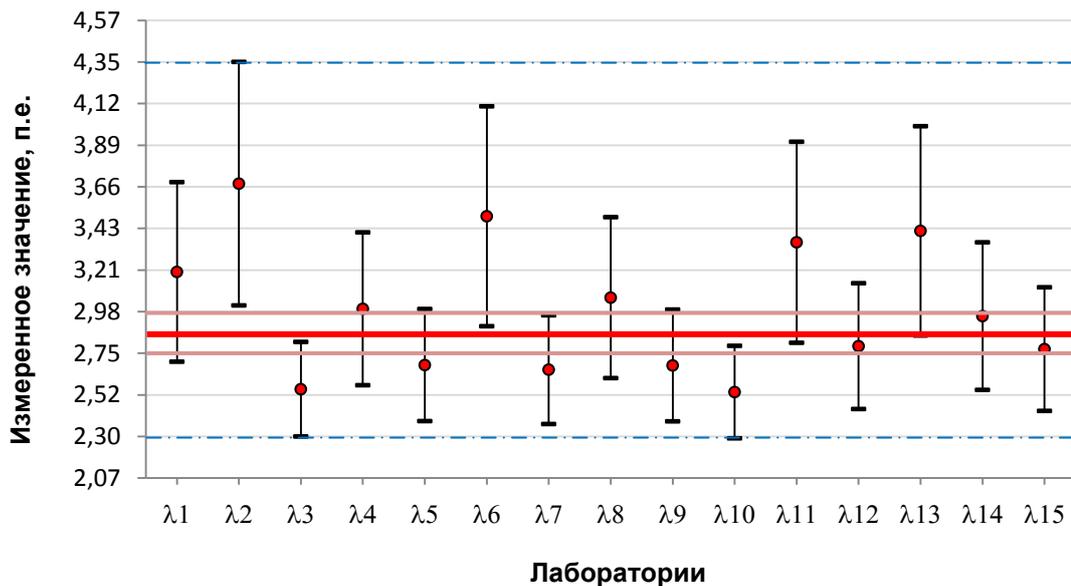


Рисунок 3.18 – Сгенерированные данные сличений ( $n = 10$ )

Данные сличений обрабатывались МАП при различных значениях  $n = \{4, 5, \dots, 10\}$  для того, чтобы сформировать рекомендации по выбору подходящего числа значений ДАЗ. Полученные экспериментальные данные были использованы для получения оценок вероятностей  $P(\xi \leq \xi_{гр})$  того, что отклонение  $\xi$  не превышает некоторое фиксированное значение  $\xi_{гр}$ . Например, если значения  $\xi \leq 0,39$  получились в 90 индивидуальных задачах из 100, то вероятность  $P(\xi \leq 0,39) = 0,90$ .

В таблице 3.6 представлены отклонения  $\xi$  для определения значения  $\xi_{гр}$  для МАП, Процедуры А и алгоритма Нильсена по нормальному закону распределения.

Таблица 3.6 – Отклонение  $\xi$  (нормальный закон распределения)

$\xi$	Метод агрегирования предпочтений							Процедура А	Алгоритм Нильсена
	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$		
<b>0,01</b>	11	6	9	7	8	7	6	14	10
<b>0,02</b>	24	11	13	17	11	14	18	20	15
<b>0,03</b>	34	15	20	23	17	22	20	29	20
<b>0,04</b>	38	21	27	25	24	30	25	30	29
<b>0,05</b>	46	25	30	29	25	31	31	32	35
<b>0,06</b>	54	33	32	36	32	38	37	37	39
<b>0,07</b>	61	36	36	41	37	42	39	44	47
<b>0,08</b>	67	42	39	50	40	52	43	47	52
<b>0,09</b>	71	46	41	55	46	55	49	54	57
<b>0,10</b>	74	48	45	58	48	58	51	58	59
<b>0,11</b>	76	53	50	60	56	63	54	61	64
<b>0,12</b>	78	56	53	64	59	64	54	62	66
<b>0,13</b>	82	57	59	65	63	66	58	63	67
<b>0,14</b>	84	63	62	69	66	69	61	65	68
<b>0,15</b>	86	69	64	70	68	76	68	68	72
<b>0,16</b>	89	71	64	70	68	80	69	69	73
<b>0,17</b>	<b>90</b>	76	66	73	72	81	73	73	77
<b>0,18</b>	91	78	68	76	75	83	77	73	79
<b>0,19</b>	91	79	71	78	78	86	79	75	81
<b>0,20</b>	92	82	75	80	79	88	80	79	81
<b>0,21</b>	94	88	75	81	81	89	82	79	82
<b>0,22</b>	<b>95</b>	<b>90</b>	79	81	82	<b>90</b>	84	80	83
<b>0,23</b>	96	91	80	83	84	90	85	83	83
<b>0,24</b>	96	93	84	84	87	91	85	84	85

Продолжение таблицы 3.6

$\xi$	Метод агрегирования предпочтений							Процедура А	Алгоритм Нильсена
	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$		
0,25	97	94	87	87	89	93	86	85	86
0,26	98	94	88	88	89	93	86	87	89
0,27	98	94	89	88	89	94	88	87	89
0,28	98	<b>95</b>	<b>92</b>	89	89	<b>96</b>	88	88	89
0,29	98	95	92	<b>91</b>	<b>91</b>	96	88	89	89
0,37		97	<b>100</b>	97	95	97	96	94	95
0,38		97		98	96	98	97	94	96
0,39		97		98	98	98	97	<b>95</b>	96
0,40		97		99	98	98	98	95	96
0,41		97		99	98	99	99	95	96
0,42		97		99	98	99	99	95	96
0,43		98		99	99	99	99	95	96
0,44		98		99	99	99	99	95	97
0,45		98		<b>100</b>	<b>100</b>	99	99	96	97
0,46		99				99	99	96	97
0,47		99				99	99	97	97
0,48		99				<b>100</b>	<b>100</b>	97	98
0,49		99						97	98
0,50		99						97	98
0,51		99						97	98
0,52		99						97	98
0,53		99						98	98
0,54		<b>100</b>						99	98
0,55								99	98
0,56								99	98
0,57								99	98
0,58								99	98
0,59								99	99
0,60								<b>100</b>	99
0,61									99
0,62									99
0,63									99
0,64									<b>100</b>

В таблице 3.7 представлены отклонения  $\xi$  для определения значения  $\xi_{гр}$  для МАП, Процедуры А и алгоритма Нильсена по равномерному закону распределения.

Таблица 3.7 – Отклонение  $\xi$  (равномерный закон распределения)

$\xi$	Метод агрегирования предпочтений							Процедура <i>А</i>	Алгоритм <i>Нильсена</i>
	<i>n</i> = 4	<i>n</i> = 5	<i>n</i> = 6	<i>n</i> = 7	<i>n</i> = 8	<i>n</i> = 9	<i>n</i> = 10		
<b>0,01</b>	9	3	4	5	2	6	8	5	5
<b>0,02</b>	21	6	9	11	7	10	10	7	5
<b>0,03</b>	27	11	12	15	12	14	12	8	7
<b>0,04</b>	33	16	16	19	15	18	13	9	8
<b>0,05</b>	38	17	17	21	17	20	14	10	11
<b>0,06</b>	42	26	23	23	22	26	19	12	15
<b>0,07</b>	51	27	24	25	24	27	23	13	18
<b>0,08</b>	53	30	25	29	27	30	24	15	21
<b>0,09</b>	57	32	26	31	33	32	25	15	26
<b>0,10</b>	61	38	26	34	34	34	27	20	28
<b>0,11</b>	63	43	29	35	37	37	31	21	31
<b>0,12</b>	65	47	34	38	39	41	35	26	35
<b>0,13</b>	67	50	38	42	42	42	38	26	36
<b>0,14</b>	73	54	43	43	46	45	40	26	41
<b>0,15</b>	75	56	45	46	47	47	41	28	43
<b>0,16</b>	78	63	49	48	49	50	43	29	43
<b>0,17</b>	79	66	54	50	50	51	43	33	45
<b>0,18</b>	79	69	55	51	50	55	47	34	48
<b>0,19</b>	79	73	58	53	58	57	49	34	50
<b>0,20</b>	79	75	59	53	61	58	52	34	55
<b>0,21</b>	80	75	62	54	63	59	56	36	56
<b>0,22</b>	80	77	67	57	64	61	60	36	59
<b>0,23</b>	82	79	70	62	66	64	63	40	59
<b>0,24</b>	82	81	70	64	66	68	68	41	60
<b>0,25</b>	83	82	77	64	68	70	68	43	62
<b>0,26</b>	85	83	81	64	74	70	69	43	66
<b>0,27</b>	85	85	82	66	76	73	71	44	68
<b>0,28</b>	86	85	84	68	77	76	72	47	68
<b>0,29</b>	86	85	84	69	77	78	74	48	70
<b>0,30</b>	86	87	86	72	78	83	76	48	72
<b>0,31</b>	87	87	86	75	79	83	80	51	75
<b>0,32</b>	87	88	88	75	80	83	83	51	75
<b>0,33</b>	87	88	89	78	82	84	85	51	78
<b>0,34</b>	87	89	<b>90</b>	79	84	85	87	52	79
<b>0,35</b>	88	92	90	84	87	86	88	53	80
<b>0,36</b>	88	92	90	84	88	87	89	53	82
<b>0,37</b>	88	92	90	85	<b>90</b>	89	<b>90</b>	55	84
<b>0,38</b>	89	94	90	86	91	<b>91</b>	91	58	88
<b>0,39</b>	<b>90</b>	94	90	86	93	93	92	58	89
<b>0,40</b>	90	94	90	87	<b>95</b>	93	92	58	89

Продолжение таблицы 3.7

$\xi$	Метод агрегирования предпочтений							Процедура <i>A</i>	Алгоритм Нильсена
	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$		
<b>0,41</b>	90	94	91	88	95	93	93	59	89
<b>0,42</b>	90	94	91	<b>90</b>	95	93	<b>95</b>	60	<b>90</b>
<b>0,43</b>	90	<b>95</b>	92	90	95	93	96	63	91
<b>0,44</b>	90	97	92	92	95	94	96	65	92
<b>0,45</b>	92	97	94	92	96	94	96	68	92
<b>0,46</b>	92	97	<b>95</b>	92	96	<b>95</b>	96	70	93
<b>0,47</b>	93	97	96	92	97	95	96	71	94
<b>0,48</b>	93	97	96	92	97	95	96	71	94
<b>0,49</b>	93	97	96	92	97	95	96	71	94
<b>0,50</b>	93	98	96	92	97	96	98	71	<b>95</b>
<b>0,51</b>	93	98	96	92	97	96	98	74	95
<b>0,52</b>	93	98	97	92	98	97	98	74	95
<b>0,53</b>	93	99	97	93	98	98	99	74	96
<b>0,54</b>	93	99	97	93	98	99	99	75	97
<b>0,55</b>	94	99	97	93	98	<b>100</b>	99	77	98
<b>0,56</b>	94	99	97	93	98		99	77	99
<b>0,57</b>	94	99	97	93	98		99	79	<b>100</b>
<b>0,58</b>	94	99	97	93	98		99	79	
<b>0,59</b>	94	99	97	94	98		99	80	
<b>0,60</b>	94	99	97	94	98		99	81	
<b>0,61</b>	94	<b>100</b>	97	<b>95</b>	98		99	82	
<b>0,62</b>	<b>96</b>		97	96	99		<b>100</b>	84	
<b>0,63</b>	98		98	97	<b>100</b>			85	
<b>0,64</b>	98		98	97				85	
<b>0,65</b>	98		98	97				86	
<b>0,66</b>	98		99	97				86	
<b>0,67</b>	99		99	98				86	
<b>0,68</b>	99		99	98				87	
<b>0,69</b>	99		99	98				87	
<b>0,70</b>	99		99	98				88	
<b>0,71</b>	99		<b>100</b>	98				88	
<b>0,72</b>	99			98				89	
<b>0,73</b>	99			98				89	
<b>0,74</b>	99			98				89	
<b>0,75</b>	99			98				<b>90</b>	
<b>0,76</b>	99			99				90	
<b>0,77</b>	99			99				90	
<b>0,78</b>	99			99				90	
<b>0,79</b>	99			99				90	
<b>0,80</b>	99			99				92	

Продолжение таблицы 3.7

$\xi$	Метод агрегирования предпочтений							Процедура А	Алгоритм Нильсена
	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$		
<b>0,81</b>	99			99				92	
<b>0,82</b>	99			99				92	
<b>0,83</b>	99			<b>100</b>				92	
<b>0,84</b>	99							94	
<b>0,85</b>	99							94	
<b>0,86</b>	<b>100</b>							94	
<b>0,87</b>								94	
<b>0,88</b>								94	
<b>0,89</b>								94	
<b>0,90</b>								94	
<b>0,91</b>								94	
<b>0,92</b>								94	
<b>0,93</b>								94	
<b>0,94</b>								<b>95</b>	
<b>0,95</b>								95	
<b>0,96</b>								95	
<b>0,97</b>								95	
<b>0,98</b>								95	
<b>1,00</b>								95	
<b>1,01</b>								95	
<b>1,02</b>								95	
<b>1,03</b>								95	
<b>1,04</b>								95	
<b>1,05</b>								95	
<b>1,06</b>								95	
<b>1,07</b>								96	
<b>1,08</b>								97	
<b>1,09</b>								99	
<b>1,10</b>								<b>100</b>	

Полученные таким способом значения  $\xi_{гр}$  для вероятностей 0,90; 0,95 и 1,00 сведены в таблицу 3.8. Из данных таблицы 3.8 следует, что при нормальном распределении получены наименьшие значения  $\xi_{гр}$  для минимального  $n = 4$  в методе агрегирования предпочтений. Алгоритм Нильсена и Процедура А дали почти в два раза большие значения  $\xi_{гр}$ . В случае равномерного распределения значения  $\xi_{гр}$ , полученные Процедурой А и алгоритмом Нильсена, также хуже полученных МАП, в котором, однако, наименьшие  $\xi_{гр}$  соответствуют различным  $n$ .

Таблица 3.8 – Значения  $\xi_{гр}$  при вероятностях  $P(\xi \leq \xi_{гр}) = 0,90; 0,95; 1,00$ 

Методы		Нормальное распределение			Равномерное распределение		
		$\xi_{гр}$			$\xi_{гр}$		
		$P = 0,90$	$P = 0,95$	$P = 1,00$	$P = 0,90$	$P = 0,95$	$P = 1,00$
МАП	$n = 4$	<b>0,17</b>	<b>0,22</b>	<b>0,33</b>	0,39	0,62	0,82
	$n = 5$	0,22	0,28	0,37	0,35	0,43	0,61
	$n = 6$	0,28	0,32	0,37	<b>0,34</b>	0,46	0,71
	$n = 7$	0,29	0,33	0,45	0,42	0,61	0,83
	$n = 8$	0,29	0,36	0,45	0,37	<b>0,40</b>	0,63
	$n = 9$	0,22	0,28	0,48	0,38	0,46	<b>0,55</b>
	$n = 10$	0,31	0,38	0,48	0,37	0,42	0,62
Алгоритм Нильсена		0,30	0,36	0,64	0,42	0,50	0,57
Процедура А		0,31	0,39	0,60	0,75	0,94	1,10

При практическом применении МАП можно рекомендовать находить опорные значения при различных  $n$  и выбирать из них то опорное значение, при котором получается НСП максимальной мощности.

### Выводы к главе 3

1. Предложен и исследован метод обработки данных сличений, названный методом агрегирования предпочтений (МАП), основанный на преобразовании интервалов неопределенности в ранжирования, нахождении для них ранжирования консенсуса по правилу Кемени и назначения в качестве опорного значения сличений наилучшей альтернативы в ранжировании консенсуса.
2. Разработан программный комплекс INTERLABCOM, позволяющий в автоматизированном режиме генерировать исходные данные сличений с заданными законами распределения и проводить их обработку различными методами. На разработанное программное обеспечение получены два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612262 и № 2015612263.
3. При проведении численных экспериментов были сгенерированы распределенные по нормальному и равномерному законам данные для 100 индивидуальных задач, отличающихся друг от друга случайными интервалами неопределенности лабораторий; число лабораторий  $m = 15$ ; номинальное

значение измеряемой величины  $x_{\text{ном}} = 3$ . Данные были обработаны МАП, Процедурой А и алгоритмом Нильсена. Качество метода обработки результатов сличений оценивалось по значению разности  $\xi$  между найденным опорным и номинальным значениями.

4. Результаты численного эксперимента показали, что расхождение между значениями  $\xi$ , полученными для нормального и равномерного распределений, в случае использования МАП не превышает 0,08. Процедура А дала значительно большее расхождение – порядка 0,46, алгоритм Нильсена – порядка 0,18. Таким образом, вид распределения практически не влияет на качество работы метода агрегирования предпочтений, т.е. метод агрегирования предпочтений характеризуется значительно большей робастностью по сравнению с другими методами.
5. При использовании МАП выбор числа  $n$  значений измеряемой величины при разбиении ДАЗ оказывает существенное влияние на точность определения  $x_{\text{ref}}$ . Поэтому данные сличений обрабатывались МАП при различных значениях  $n = \{4, 5, \dots, 10\}$  для того, чтобы сформировать рекомендации по выбору подходящего числа значений ДАЗ. Полученные экспериментальные данные были использованы для получения оценок вероятностей  $P(\xi \leq \xi_{\text{гр}})$  того, что отклонение  $\xi$  не превышает некоторое фиксированное значение  $\xi_{\text{гр}}$ . Таким способом были получены значения  $\xi_{\text{гр}}$  для вероятностей 0,90; 0,95 и 1,00.
6. Наименьшие значения  $\xi_{\text{гр}}$  при нормальном распределении получились для минимального  $n = 4$  в методе агрегирования предпочтений. Алгоритм Нильсена и Процедура А дали почти в два раза большие значения  $\xi_{\text{гр}}$ . В случае равномерного распределения значения  $\xi_{\text{гр}}$ , полученные алгоритмом Нильсена, также хуже полученных МАП, в котором, однако, наименьшие  $\xi_{\text{гр}}$  соответствуют различным  $n$ . При практическом применении МАП можно рекомендовать находить опорные значения при различных  $n$  и выбирать из них то опорное значение, при котором получается НСП максимальной мощности.

## ГЛАВА 4

### ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРАКТИЧЕСКИХ СЛИЧЕНИЙ

В этой главе даны рекомендации по выбору рационального числа  $m$  участвующих в сличениях лабораторий на основе геометрического распределения, связывающего вероятность определения опорного значения  $x_{\text{ref}}$  измеряемой величины с числом  $m$  лабораторий-участников сличений.

Приведены результаты применения МАП для обработки данных реальных сличений, опубликованных в отчетах ВІРМ и в других публикациях сотрудников НМИ, в области измерений электрических и магнитных величин.

#### 4.1 Выбор числа участников сличений

Проблеме обоснования рационального выбора числа  $m$  участников сличений в научно-технической литературе уделено мало внимания. Руководствами и рекомендациями СИРМ и РМО регламентированы основные этапы проведения и оценки данных сличений национальных эталонов. Но об определении количества участников сличений упоминается лишь в п. 3.4 руководства СИРМ МРА [47, 58] в контексте того, что при выборе участников сличений консультативные комитеты должны учитывать должное региональное представительство и число участников ключевых сличений может быть ограничено по техническим причинам [47].

Во введенном в действие с 01.03.2015 г. ГОСТ ISO/IEC 17043 [8] "Оценка соответствия. Основные требования к проведению проверки квалификации" (п. 4.4.4.3) рекомендуется при разработке методов обработки данных сличений "тщательно рассмотреть" вопрос о "минимальном количестве участников в программе проверки квалификации, необходимом для достижения целей статистического расчета" [8].

Действительно, в том случае, когда целью сличений является определение опорного значения измеряемой величины или приписанного значения группой экспертных лабораторий, привлечение к этой процедуре каждого нового

участника требует значительных финансовых затрат и временных ресурсов. С другой стороны, числа лабораторий может быть недостаточным для обеспечения заданной достоверности результата.

Поэтому число участников сличений, как правило, не должно превышать некоторой минимальной верхней границы и определение обоснованного количества  $m$  участников сличений представляет собой актуальную задачу.

Для этой цели будем использовать простые *вероятностные* соображения, которые позволяют получить оценку верхней границы для числа  $m$  в явном аналитическом виде. Далее на основе схемы Бернулли рассматривается геометрическое распределение числа испытаний до первого успеха. С помощью геометрического распределения вводится вероятностная модель обнаружения опорного значения. Также дан анализ роста вероятности обнаружения опорного значения группой из  $m$  лабораторий при введении в ее состав  $k$  дополнительных лабораторий.

#### 4.1.1 Схема Бернулли и геометрическое распределение

Для последовательности *независимых* испытаний рассмотрена классическая схема Бернулли [7, 30]. Каждое из испытаний может иметь один из *двух* исходов – "успех" или "неудачу". Пусть  $p$  – вероятность успеха (т.е. *элементарная вероятность*), тогда вероятность неудачи в каждом испытании равна  $q = 1 - p$ . Вероятности исходов  $p$  и  $q$  остаются *неизменными* во всех испытаниях.

Пусть  $X$  обозначает число испытаний до первого успеха. Тогда вероятность  $P(X = m)$  того, что успех случится во время  $m$ -го испытания, равна вероятности  $(1 - p)^{m-1}$  того, что он не случится во время  $m - 1$  испытаний, умноженной на вероятность  $p$  того, что успех произойдет во время  $m$ -го испытания, т.е.:

$$P(X = m) = p(1 - p)^{m-1} = pq^{m-1}, m = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

В этом случае говорят, что случайная величина  $X$  имеет дискретное *геометрическое распределение* с параметром  $p$  [30].

Вероятность того, что успех не наступает при испытании  $m$  или до него равна вероятности  $(1 - p)^m$  последовательных  $m$  неудач. Это значит, что вероятность того, что успех наступит после  $m$  испытаний, имеет вид:

$$P(X \leq m) = 1 - (1 - p)^m = 1 - q^m. \quad (4.2)$$

Для геометрического распределения выражения (4.1) и (4.2) представляют собой функцию (плотности) вероятности и соответственно функцию распределения.

В терминах геометрического распределения можно ставить и решать много практически полезных задач, таких как выбор числа экспертов для оценивания удобства и простоты использования пользовательского интерфейса [93, 94] или для оценивания качества продукции [84]. В работе [98] с использованием геометрического распределения дан анализ времени, необходимого для того, чтобы при наборе на печатной машинке произвольных символов получился бы связный литературный текст. В учебнике Е.С. Вентцель и Л.А. Овчарова [7] рассмотрена следующая задача: "При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью  $p$ . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при  $m$  циклах объект будет обнаружен". В качестве решения задачи в [7] используется формула (4.2).

Для определения необходимого и достаточного количества  $m$  лабораторий, участвующих в сличениях будет использовано геометрическое распределение.

#### 4.1.2 Вероятностная модель обнаружения опорного значения

Пусть  $p$  – вероятность обнаружения опорного значения  $x_{\text{ref}}$  после предоставления результата его измерения одной лабораторией. Можно полагать, что каждая из участвующих в сличениях лабораторий получает свой результат независимо от других. Тогда по формуле (4.2) можно рассчитать вероятность  $F$  того, что опорное значение определено по результатам  $m$  лабораторий:

$$F = 1 - (1 - p)^m. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует выражение для числа участвующих в сличениях лабораторий:

$$m = \frac{\ln(1 - F)}{\ln(1 - p)}. \quad (4.4)$$

Из таблицы 4.1 и графика на рисунке 4.1, построенного по формуле (4.3), видно, что существует некоторое критическое значение  $m_{кр}$  числа  $m$  такое, что при  $m > m_{кр}$  не происходит существенного увеличения вероятности обнаружения опорного значения. Например, при  $p = 0,6$  нет необходимости иметь более 5 лабораторий, т.к. вероятность нахождения опорного значения при  $m > m_{кр} = 5$  равна единице.

Рассмотрим, как изменится вероятность  $F$  при привлечении *одной новой* лаборатории к участию в сличениях. Выражение, показывающее, во сколько раз вероятность  $F_1 = F(m + 1)$  превосходит вероятность  $F = F(m)$ , имеет следующий вид:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{1 - (1 - p)^{m+1}}{1 - (1 - p)^m} = 1 + \frac{p(1 - p)^m}{1 - (1 - p)^m}. \quad (4.5)$$

Таблица 4.1 – Значения вероятности  $F$ , рассчитанные по формуле (4.3) для различных  $m$  и  $p$

$m$	Элементарная вероятность $p$			
	0,05	0,1	0,2	0,6
2	0,10	0,19	0,36	0,84
4	0,19	0,34	0,59	0,97
6	0,26	0,47	0,74	1,00
8	0,34	0,57	0,83	1,00
10	0,40	0,65	0,89	1,00
12	0,46	0,72	0,93	1,00
14	0,51	0,77	0,96	1,00
16	0,56	0,81	0,97	1,00
18	0,60	0,85	0,98	1,00
20	0,64	0,88	0,99	1,00

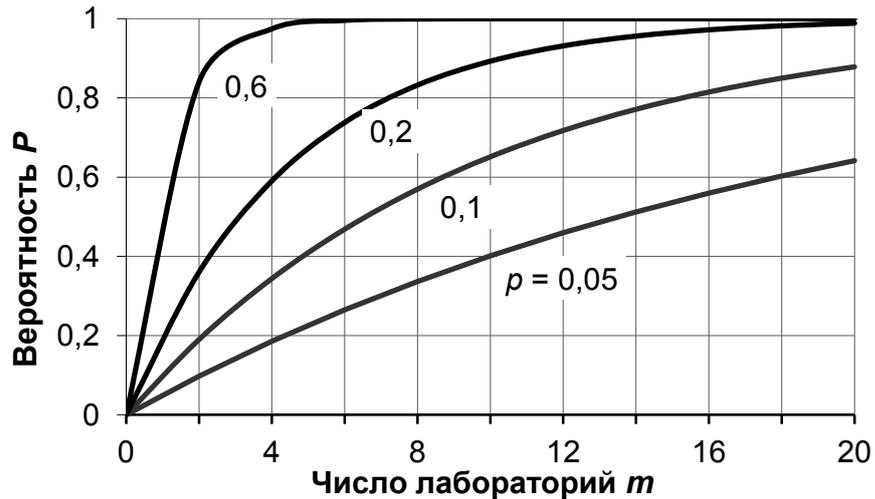


Рисунок 4.1 – Зависимость вероятности  $F$  от  $m$  для различных значений  $p$ , см. формулу (4.3)

Из таблицы 4.2 и рисунка 4.2 видно, что увеличение числа лабораторий-участников на единицу приводит к незначительному росту вероятности  $F$ . Это увеличение становится еще более несущественным для всех  $m > m_{кр} = 4$ . И чем больше элементарная вероятность  $p$ , тем более несущественным становится вклад новой лаборатории.

Таблица 4.2 – Значения отношения  $F_1/F$ , рассчитанные по формуле (4.5) для различных  $m$  и  $p$

$m$	Элементарная вероятность $p$		
	0,05	0,2	0,6
1	1,95	1,80	1,40
2	1,46	1,36	1,11
4	1,22	1,14	1,02
6	1,14	1,07	1,00
8	1,10	1,04	1,00
10	1,07	1,02	1,00
12	1,06	1,01	1,00
14	1,05	1,01	1,00
16	1,04	1,01	1,00
18	1,03	1,00	1,00
20	1,03	1,00	1,00

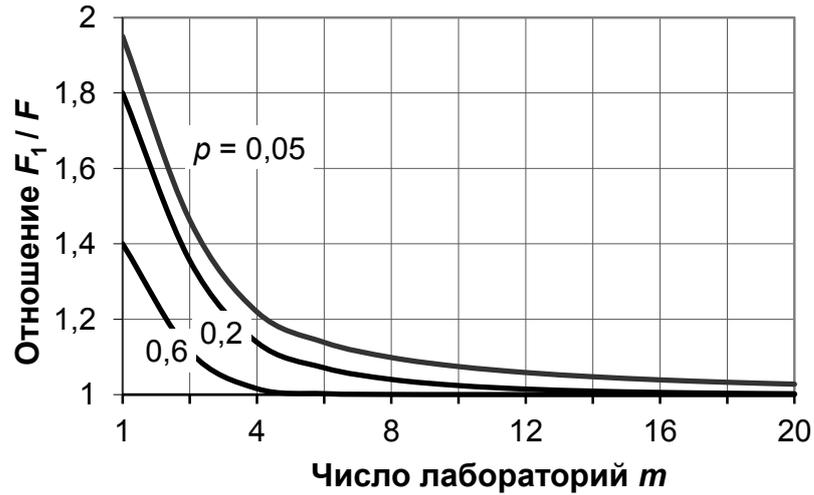


Рисунок 4.2 – Зависимость отношения  $F_1/F$  от  $m$  для различных значений  $p$ , см. формулу (4.5)

#### 4.1.3 Анализ роста вероятности обнаружения опорного значения при добавлении дополнительных лабораторий в группу участников сличений

Описанное в п. 4.2.2 изменение вероятности  $F$  стоит оценить в более явном и общем виде. Обозначим через  $\gamma$  относительный рост вероятности  $F$  в результате добавления  $k$  дополнительных лабораторий в группу  $m$  участников сличений, т.е.:

$$\gamma = \frac{F(m+k) - F(m)}{F(m)} = \frac{F_k - F}{F}, \quad (4.6)$$

где

$$F_k = 1 - (1-p)^m(1-p)^k. \quad (4.7)$$

Из выражений (4.3), (4.6) и (4.7) получается:

$$\gamma = (1-p)^m \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)^m}, \quad (4.8)$$

В таблице 4.3 представлены значения относительного роста вероятности  $\gamma(k)$  для различных чисел  $m$ , рассчитанные по выражению (4.8), а на рисунке 4.3 показаны соответствующие графики.

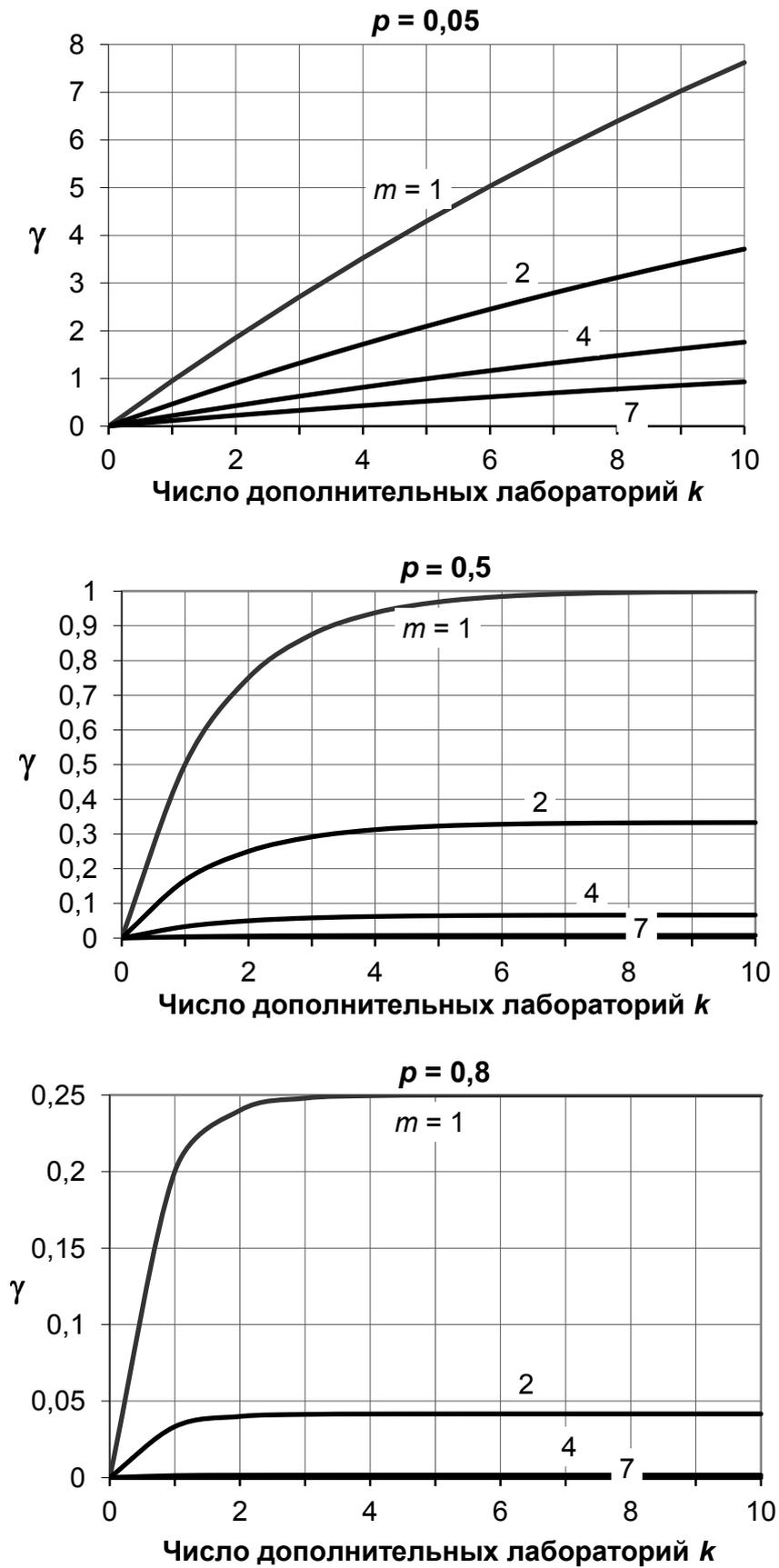


Рисунок 4.3 – Зависимости (для  $p = 0,05; 0,5$  и  $0,8$ ) относительного роста вероятности  $\gamma$  от числа  $k$  дополнительных лабораторий при различных  $m$

Таблица 4.3 – Значения относительного роста вероятности  $\gamma(k)$  для различных чисел  $m$

$k$	Элементарная вероятность $p$											
	0,05				0,5				0,8			
	$m$				$m$				$m$			
	1	2	4	7	1	2	4	7	1	2	4	7
1	0,95	0,46	0,21	0,11	0,5	0,17	0,03	0,004	0,2	0,03	0,0013	0
2	1,85	0,90	0,42	0,22	0,75	0,25	0,05	0,006	0,24	0,04	0,0015	0
3	2,71	1,32	0,63	0,33	0,87	0,29	0,06	0,007	0,25	0,04	0,0016	0
4	3,52	1,72	0,81	0,42	0,94	0,31	0,06	0,007	0,25	0,04	0,0016	0
5	4,30	2,09	0,99	0,52	0,97	0,32	0,06	0,008	0,25	0,04	0,0016	0
6	5,03	2,45	1,16	0,61	0,98	0,33	0,07	0,008	0,25	0,04	0,0016	0
7	5,73	2,79	1,32	0,70	0,99	0,33	0,07	0,008	0,25	0,04	0,0016	0
8	6,39	3,11	1,48	0,78	1,0	0,33	0,07	0,008	0,25	0,04	0,0016	0
9	7,02	3,42	1,62	0,86	1,0	0,33	0,07	0,008	0,25	0,04	0,0016	0
10	7,62	3,71	1,76	0,93	1,0	0,33	0,07	0,008	0,25	0,04	0,0016	0

Как видно из данных таблицы 4.1 и рисунка 4.3, существенное увеличение вероятности определения опорного значения  $x_{\text{ref}}$ , благодаря привлечению дополнительных  $k$  лабораторий-участников происходит только в том случае, если элементарная вероятность  $p$  мала (график для  $p = 0,05$  на рисунке 4.3). В этом случае, зависимость  $\gamma(k)$  имеет почти линейный характер. Видно, что при  $m = 1$  удвоение шансов найти опорное значение (т.е. когда  $\gamma$  увеличивается на 1 или на 100 %) происходит при каждом увеличении  $k$  на 1, особенно при малых  $k$ . Однако, уже при  $m = 7$  такое удвоение шансов происходит только при  $k = 10$ .

При  $p = 0,5$  можно видеть, что если группа участников сличений состоит из 4 лабораторий, добавление в группу нового участника бесполезно, т.к. оно не увеличивает вероятность нахождения опорного значения.

В случае  $p = 0,8$  (рисунок 4.3) можно убедиться, что нет необходимости в добавлении новых участников уже при  $k = 3$ , хотя в группу участников сличений входит лишь одна лаборатория.

Анализ данных таблицы 4.1 и рисунков 4.3 и 4.4 позволяет сделать вывод о важности способа формирования группы участников сличений. Действительно, значения параметров  $p = 0,05$ ;  $m = 2$  и  $k = 8$  дают относительный рост вероятности

$\gamma = 3,11$ , в то время как  $\gamma = 1,16$  при  $m = 4$  и  $k = 6$ ; причем в том и другом случаях общее число участников  $m + k = 10$ . Следовательно, комбинация различных  $m$  и  $k$  при их одинаковой сумме обеспечивает больший выигрыш  $\gamma$ , если  $m < k$ .

Число  $k$  может быть легко определено в явном виде, используя выражение (4.6):

$$k = \frac{\ln(1 - F_k)}{\ln(1 - p)} - m = m \frac{\ln(1 - F_k)}{\ln(1 - F)} - m. \quad (4.9)$$

На практике число  $k$  может быть рассчитано, исходя из известного желательного или критического значения  $F_k$ .

Конечно, элементарная вероятность  $p$  должна быть заранее задана или оценена. Задать ее значение можно, исходя из соображений приемлемого риска с учетом мнений экспертов. Следует также использовать малейшую возможность оценивания этой вероятности. Ясно, что  $p$  является параметром не только геометрического, но и биномиального распределения. Известны различные методы оценивания параметра  $p$  биномиального распределения на основе метода максимального правдоподобия и метода моментов [51]. Например, оценка  $\tilde{p}$  максимального правдоподобия имеет простейший вид:  $\tilde{p} = m/n$ , где  $n$  – общее число испытаний, т.е. может быть основана на имеющемся опыте проведенных ранее испытаний [95].

При задании значения  $p$  (случай, который нередко имеет место при практических расчетах [46]) следует учитывать факт, что часть участников сличений могут предоставлять ненадежные результаты [2, 42, 53, 57, 88], несмотря на то, что они декларируют высокий уровень доверительной вероятности при предоставлении результата  $\langle x_i, u(x_i) \rangle$ . Тогда значение  $p$  следует снижать на некоторый согласованный уровень.

Таким образом, несмотря на простоту, рассмотренная в параграфе основанная на геометрическом распределении модель, которая связывает в явном аналитическом виде вероятность определения опорного значения  $x_{\text{ref}}$  измеряемой величины с числом  $m$  лабораторий-участников сличений, позволила провести

достаточно глубокий анализ зависимости вероятности определения опорного значения измеряемой величины от числа дополнительных лабораторий, введенных в состав группы участников сличений.

На основе этого анализа можно рекомендовать назначать число участников сличений от 4 до 10-15. Как правило, при таком количестве участников, привлечение к сличениям новых лабораторий не дает положительного эффекта. В ситуациях, когда необходимо выявлять опорное значение с помощью группы экспертных лабораторий, минимизацией числа лабораторий в такой группе можно избежать значительных материальных затрат.

Далее приведены результаты реальных сличений, организованные пилот-НМИ и провайдерами. Рассмотрено применение МАП для обработки результатов практических сличений.

## **4.2 Обработка данных реальных сличений**

### **4.2.1 Ключевые сличения эталона высокочастотной мощности**

КС КК СИРМ ССЕМ.RF-K25.W по электричеству и магнетизму в области измерений высокочастотной мощности были проведены в период с декабря 2010 года по май 2013 года с участием девяти НМИ [75]. Пилотным НМИ в этих сличениях являлся Физико-технический федеральный институт (РТВ, ФРГ). Участвующие в сличениях НМИ определяли коэффициент преобразования и калибровочный коэффициент эталонов сравнения, в роли которых выступали датчики мощности с волновыми термисторами в диапазоне частот от 33 до 50 ГГц.

При этом коэффициент преобразования эталона сравнения определялся как отношение замещенной постоянной мощности  $P_{DC,sub}$  к поглощенной мощности  $P_{RF,abs}$ , определяемой по формуле:

$$\eta_{eff} = \frac{P_{DC,sub}}{P_{RF,abs}}. \quad (4.10)$$

Калибровочный фактор  $\eta_{cal}$  участники сличений рассчитывали в соответствии с выражением:

$$\eta_{\text{cal}} = (1 - \Gamma^2)\eta_{\text{eff}}, \quad (4.11)$$

где  $\Gamma$  – входной коэффициент отражения – измерялся как комплексная величина, определяемая как размер и фаза при измеряемой частоте.

**Обработка данных сличений по коэффициенту преобразования эталона сравнения.** Результаты проведенных сличений по коэффициенту преобразования  $\eta_{\text{eff}}$  в рамках проекта CSEM.RF-K25.W на частоте 36 ГГц представлены в таблице 4.4. Опорное значение КС определялось в соответствии с разделом 8 технического протокола на основании среднего арифметического значения [75]:

$$x_{\text{ref}} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} x_i. \quad (4.12)$$

Стандартная неопределенность рассчитывалась по формуле:

$$u(x_{\text{ref}}) = \sqrt{\frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} u^2(x_i)}. \quad (4.13)$$

Для идентификации выбросов применялась медиана абсолютных отклонений [75]:

$$\sigma \approx S(MAD) \equiv k_1 \text{median}\{|\eta_i - \eta_{\text{med}}|\}. \quad (4.14)$$

где  $k_1$  – коэффициент, определяемый путем моделирования;

$\eta_{\text{med}}$  – значение медианы результатов измерений  $\{\eta\}$ .

Значение  $\eta_i$ , которое отличалось от медианы более чем на  $2,5 \cdot S(MAD)$  рассматривалось как выброс и исключалось из расчета опорного значения. Этот критерий применялся для проверки каждого результата измерения [75]:

$$|\eta_i - \eta_{\text{med}}| > 2,5 \cdot S(MAD). \quad (4.15)$$

Таблица 4.4 – Данные ключевых сличений по проекту CSEM.RF-K25.W

№	НМИ (страна)	Коэффициент преобразования, $\eta_{\text{eff}}$	
		$x_i$	$u(x_i)$
1	РТВ (Германия)	0,9153	0,0031
2	NPL (Великобритания)	0,9167	0,0060
3	NIST (Америка)	0,9184	0,0064

Продолжение таблицы 4.4

№	НМИ (страна)	Коэффициент преобразования, $\eta_{\text{eff}}$	
		$x_i$	$u(x_i)$
4	LNE (Франция)	0,9157	0,0018
5	KRISS (Корея)	0,9143	0,0104
6	VNIFTRI (Россия)	0,9160	0,0079
7	NIM (Китай)	0,8360	0,0072
8	MNIA (Австралия)	0,9174	0,0071
9	NRC (Канада)	0,9375	0,0130

По итогам оценки данных сличений было определено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 0,9161$  для коэффициента преобразования  $\eta_{\text{eff}}$ , неопределенность которого составила  $u(x_{\text{ref}}) = 0,0027$ . При этом NIM, MNIA, NRC, не участвовали в определении опорного значения, т.к. результаты измерений NIM, NRC были признаны статистическими выбросами в соответствии с критерием медианы абсолютных отклонений, а результат MNIA оказался прослеживаемым к результату других участников.

Графические иллюстрации результатов сличений и определенного опорного значения в рамках проекта CSEM.RF-K25.W приведены на рисунке 4.4.

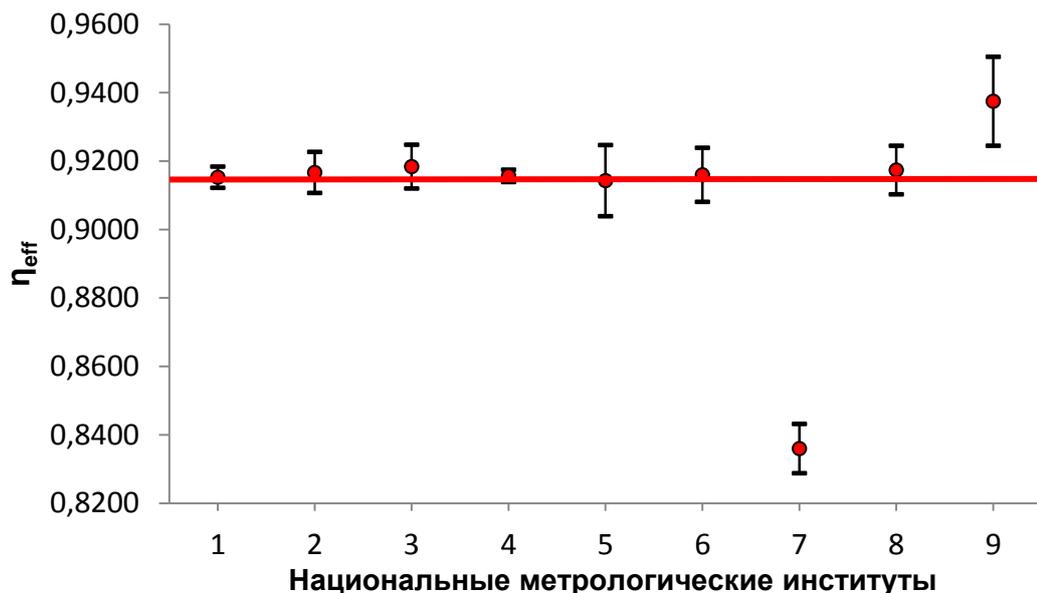


Рисунок 4.4 – Данные КС по проекту CSEM.RF-K25.W

Обработка данных таблицы 4.4 была проведена с помощью МАП. Алгоритм 5 запускали при различных значениях  $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Максимальная мощность НСП была достигнута при  $n = 8$ . Таким образом ДАЗ был разбит на  $n - 1 = 7$  равных интервалов. Границы интервалов соответствовали восьми значениям измеряемой величины  $a_1 = 0,8288$ ,  $a_2 = 0,8462$ ,  $a_3 = 0,8636$ ,  $a_4 = 0,8809$ ,  $a_5 = 0,8983$ ,  $a_6 = 0,9157$ ,  $a_7 = 0,9331$ ,  $a_8 = 0,9505$ .

Профиль предпочтения был сформирован из 9 ранжирований, описывающих интервалы неопределенности соответствующих НМИ:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_2: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_3: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_4: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_5: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 . \\
 \lambda_6: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_7: a_1 \succ a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_8: a_6 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \\
 \lambda_9: a_7 \sim a_8 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Для данного профиля предпочтений были получены 144 оптимальных решения. В таблице 4.5 приведен фрагмент множества оптимальных решений (ранжирований Кемени) для рассматриваемого профиля.

Найденное итоговое ранжирование консенсуса с учетом множественности решений приняло вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{a_6 \succ a_1 \sim a_7 \sim a_8 \succ a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5\}$ . Было получено опорное значение результатов сличений  $x_{\text{ref}} = 0,9157$  с неопределенностью  $u(x_{\text{ref}}) = 0,0018$ . НСП было сформировано из 7 НМИ, результаты которых можно признать надёжными. Результаты измерений NIM, NRC признаны выбросами, т.к. не содержат в себе полученное опорное значение (рисунок 4.5).

Обобщенный результат обработки данных сличений по проекту CSEM.RF-K25.W двумя методами приведен в таблице 4.6.

Таблица 4.5 – Фрагмент выходного профиля, полученного для входного профиля предпочтений (4.16)

6	8	7	1	2	5	4	3
6	8	7	1	2	5	3	4
6	8	7	1	2	4	5	3
6	8	1	7	2	4	3	5
6	8	1	7	2	3	5	4
6	8	1	7	5	4	3	2
6	1	8	7	5	4	2	3
6	1	8	7	5	3	4	2
6	1	8	7	5	2	4	3
$D_{\text{least}} = 194$				$D(\beta, \Lambda) = 194$			
$N_{\text{kem}} = 144$				$n = 8; m = 9$			

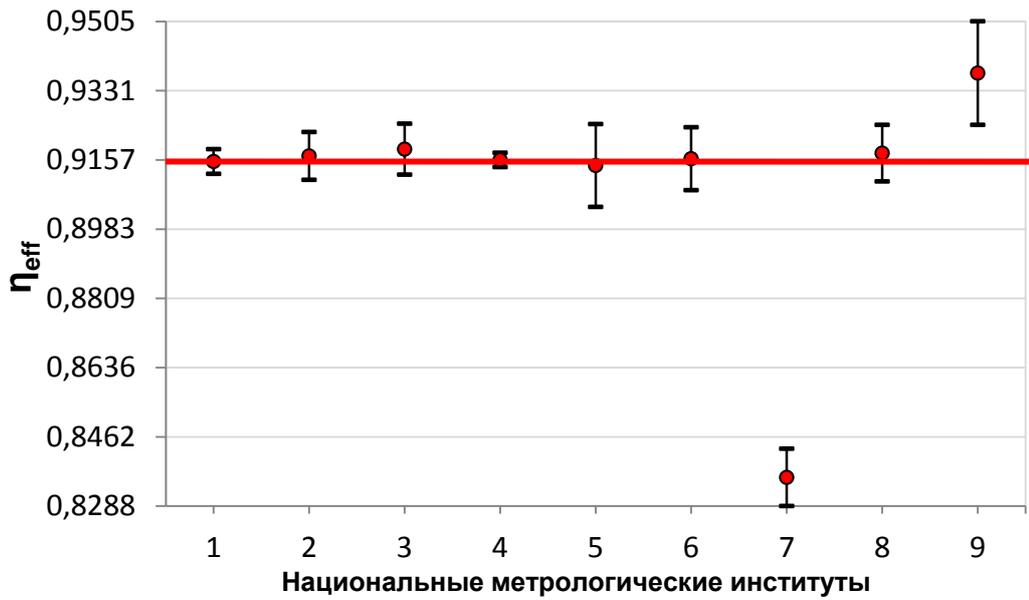


Рисунок 4.5 – Данные КС по проекту ССЕМ.RF-K25.W, обработанные МАП

Таблица 4.6 – Результаты обработки данных сличений ССЕМ.RF-K25.W на основании среднего арифметического значения и МАП

Метод, использованный в ССЕМ.RF-K25.W			МАП		
$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП	$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП
0,9161	0,0027	6	0,9157	0,0018	7

**Обработка данных сличений по калибровочному коэффициенту эталона сравнения.** В качестве ещё одного примера сличений по проекту ССЕМ.RF-K25.W рассмотрено оценивание результатов сличений для калибровочного коэффициента, приведенные в таблице 4.7 и на рисунке 4.6.

Таблица 4.7 – Результаты ключевых сличений по проекту ССЕМ.RF-K25.W

№	НМИ (страна)	Калибровочный коэффициент, $\eta_{cal}$	
		$x_i$	$u(x_i)$
1	PTB (Германия)	0,7954	0,0036
2	NPL (Великобритания)	0,7937	0,0067
3	NIST (Америка)	0,7976	0,0070
4	LNE (Франция)	0,7914	0,0046
5	KRISS (Корея)	0,7935	0,0079
6	NIM (Китай)	0,7936	0,0031
7	VNIFTRI (Россия)	0,7820	0,0105
8	MNIA (Австралия)	0,7972	0,0073
9	NRC (Канада)	0,8140	0,0130

Для результатов, предоставленных НМИ, было определено опорное значение калибровочного коэффициента  $\eta_{cal}$ , значение которого составило  $x_{ref} = 0,7942$  с неопределенностью измерений  $u(x_{ref}) = 0,0024$ . По итогам оценки результаты VNIFTRI и NRC были признаны выбросами. Результат MNIA оказался прослеживаемым к результату других участников.

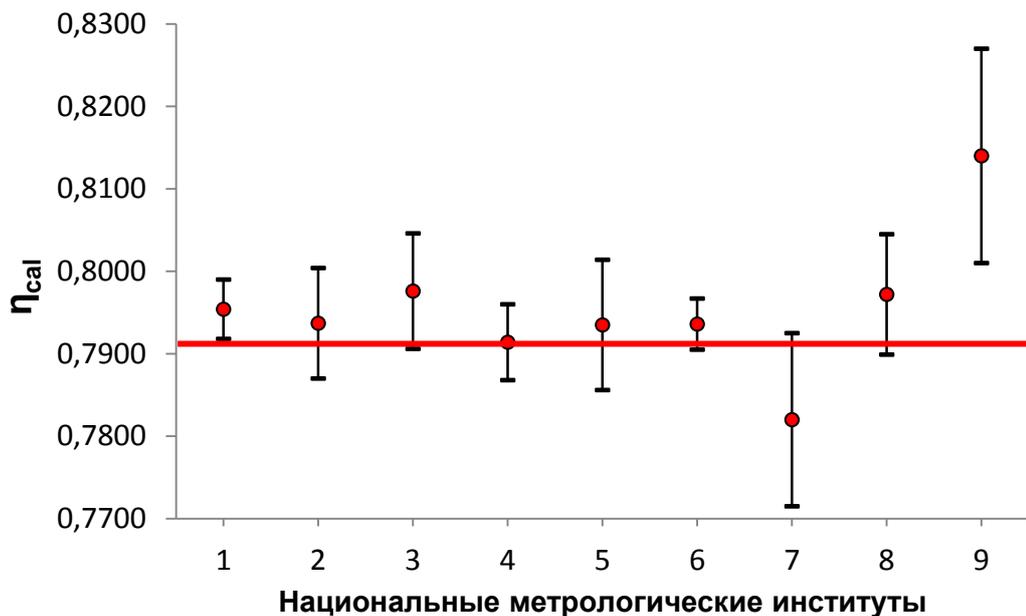


Рисунок 4.6 – Результаты КС по проекту ССЕМ.RF-K25.W

С помощью МАП была проведена обработка данных таблицы 4.7. Алгоритм 5 запускали при различных значениях  $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Максимальная мощность НСП была достигнута при  $n = 6$ . Таким образом ДАЗ был разбит на  $n - 1 = 5$  равных интервалов. Границы интервалов соответствовали шести значениям измеряемой величины  $a_1 = 0,7715$ ,  $a_2 = 0,7826$ ,  $a_3 = 0,7937$ ,  $a_4 = 0,8048$ ,  $a_5 = 0,8159$ ,  $a_6 = 0,8270$  (рисунок 4.7).

Профиль предпочтения был сформирован из 6 ранжирований, описывающих интервалы неопределенности соответствующих НМИ:  $\lambda_1: \{ a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \}$ ;  $\lambda_2: \{ a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \}$ ; ...;  $\lambda_7: \{ a_2 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_6 \}$ ;  $\lambda_8: \{ a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \}$ ;  $\lambda_9: \{ a_4 \sim a_5 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_6 \}$ .

Для входного профиля предпочтений получено 24 оптимальных решения. В таблице 4.8 приведен фрагмент оптимальных решений для рассмотренного профиля.

Таблица 4.8 – Фрагмент оптимальных решений для профиля предпочтений

3	5	4	2	6	1
3	5	2	6	4	1
3	4	6	5	2	1
3	4	6	5	2	1
3	4	6	2	5	1
$D_{\text{least}} = 100$			$D(\beta, \Lambda) = 100$		
$N_{\text{kem}} = 24$			$n = 6; m = 9$		

Найденное итоговое ранжирование консенсуса с учетом множественности решений имеет вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{ a_3 \succ a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \succ a_1 \}$ . Обобщенный результат обработки данных сличений по проекту ССЕМ.RF-K25.W двумя методами приведен в таблице 4.9.

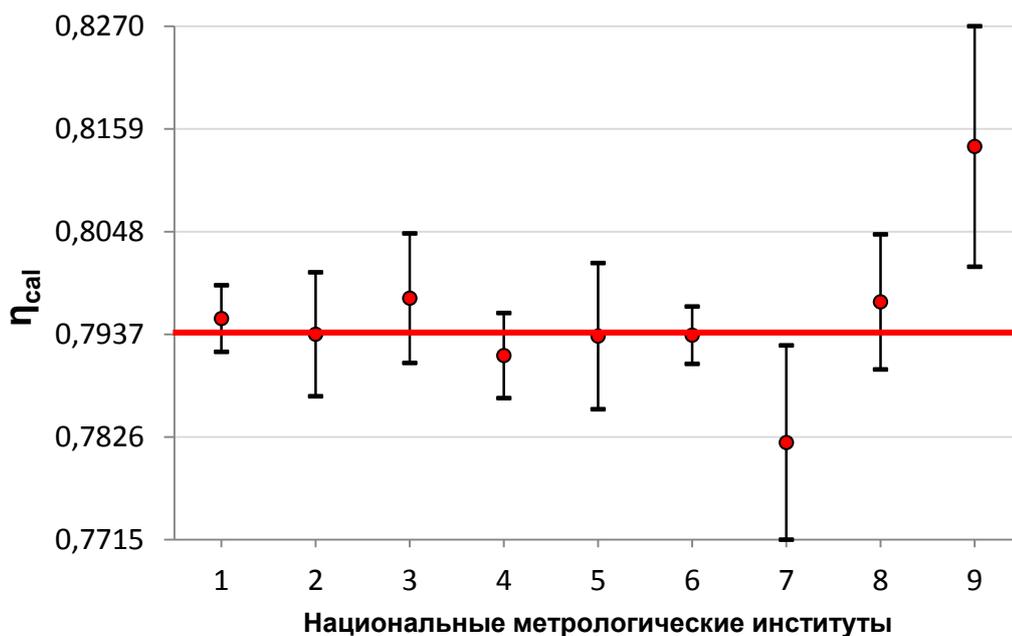


Рисунок 4.7 – Данные КС по проекту CCEM.RF-K25.W

Таблица 4.9 – Результаты обработки данных сличений CCEM.RF-K25.W на основании среднего арифметического значения и МАП

Метод, использованный в CCEM.RF-K25.W			МАП		
$x_{ref}$	$u(x_{ref})$	НСП	$x_{ref}$	$u(x_{ref})$	НСП
0,7942	0,0024	6	0,7937	0,0019	7

#### 4.2.2 Дополнительные сличения эталона единицы электрической мощности

ДС СООМЕТ.ЕМ-S2 между участниками РМО КООМЕТ эталона единицы электрической мощности и коэффициента мощности на диапазоне частот 50 и 53 Гц проводились с 8 января 2008 года. и завершились 29 декабря 2011 года [102, 103].

Участниками сличений стали три НМИ: Всеукраинский государственный научно-производственный центр стандартизации, метрологии, сертификации и защиты прав потребителей (ГП "Укрметртестстандарт" UMTS), Белорусский государственный институт метрология (BelGIM), Болгарский институт метрологии (BIM).

Координатором сличений был ГП "Укрметрестандарт", который обеспечивал транспортировку эталона сравнения, координацию графика сличений и подготовку проектов отчетов сличений. Участникам необходимо было провести ряд измерений активной электрической мощности прецизионного эталона электрической мощности RM 15-04 (рисунок 4.8), который был выбран в качестве эталона сравнения.



Рисунок 4.8 – Эталон сравнения RM 15-04

Анализ международных ДС по проекту COOMET.EM-S2 выявил, что сличения проходили по 6 точкам, приведенные в таблице 4.10.

Таблица 4.10 – Технические требования к проведению сличений

Международные сличения	COOMET.EM-S2
Эталон	RM 15-04
Напряжение	120 В
Сила тока	5 А
Коэффициент мощности	1,0; 0,5 Lag; 0,5 Lead
Частота	50 и 53 Гц

В качестве примера рассмотрим две точки из шести: 1-я точка с параметрами 120 В, 5 А, 53 Гц, 0,5 Lag, и 2-я точка с параметрами 120 В, 5 А, 50 Гц, 0,5 Lead. Результаты измерений участниками сличений COOMET.EM-S2 активной электрической мощности  $x_i$  и соответствующей расширенной неопределенности  $u(x_i)$  для 0,5 Lag (53 Гц) и 0,5 Lead (50 Гц), приведены в таблице 4.11.

Опорное значение и соответствующая неопределенность были определены на основании рекомендаций COOMET R/GM/19 [61]. Оценивание данных ДС, в рассматриваемом примере, проводилось Процедурой А [61, 102] (п. 1.3.1).

Таблица 4.11 – Результаты измерений эталона сравнения

НМИ	$x_i$	$u(x_i)$	$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$
0,5 Lag (53 Гц)				
BelGIM	-31,1	58,0	-62,2	11,1
UMTS	-40,1	45,0		
BIM	-65,0	11,8		
0,5 Lead (50 Гц)				
BelGIM	31,2	58,0	50,1	10,8
UMTS	48,0	45,1		
BIM	50,9	11,4		

Графическое изображение данных сличений и его опорное значение 1-й точки с параметрами *120 В, 5 А, 53 Гц, 0,5 Lag* приведены на рисунке 4.9.

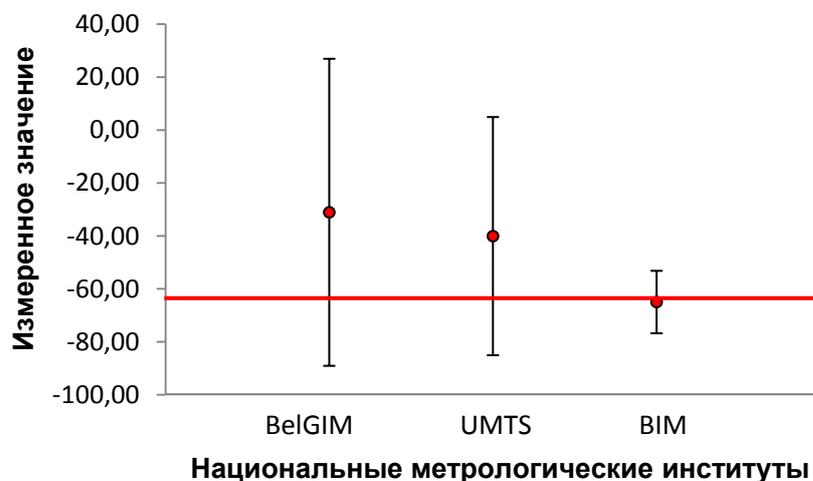


Рисунок 4.9 – Результаты измерений участников ДС COOMET.EM-S2  
(PF = 0,5 Lag,  $f = 53$  Гц)

Данные таблицы 4.10 для первого примера с параметрами 120 В, 5 А, 53 Гц, 0,5 Lag обрабатывались с помощью. Алгоритм 5 запускали при различных значениях  $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Максимальная мощность НСП была достигнута при  $n = 5$ . Таким образом ДАЗ был разбит на  $n - 1 = 4$  равных интервалов. Границы интервалов соответствовали пяти значениям измеряемой величины  $a_1 = -$

89,1,  $a_2 = -60,1$ ,  $a_3 = -31,1$ ,  $a_4 = -2,1$ ,  $a_5 = 26,9$ . Профиль предпочтения состоял из трех ранжирований:

$$\begin{aligned} \lambda_1: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \\ \lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_5 \\ \lambda_3: a_2 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для входного профиля предпочтений (4.16) получено 4 оптимальных решения (таблица 4.12).

Таблица 4.12 – Оптимальных решений для профиля предпочтений

2	4	3	1	5
2	4	3	5	1
2	3	4	1	5
2	3	4	5	1
$D_{\text{least}} = 20$		$D(\beta, \Lambda) = 20$		
$N_{\text{kem}} = 4$		$n = 5; m = 3$		

Итоговое ранжирование консенсуса приняло вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{a_2 \succ a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_5\}$ . Опорное значение результатов сличений СООМЕТ.ЕМ-S2 оцененных МАП составило  $x_{\text{ref}} = -60,1$  с неопределенностью измерений  $u(x_{\text{ref}}) = 6,9$  (рисунок 4.10).

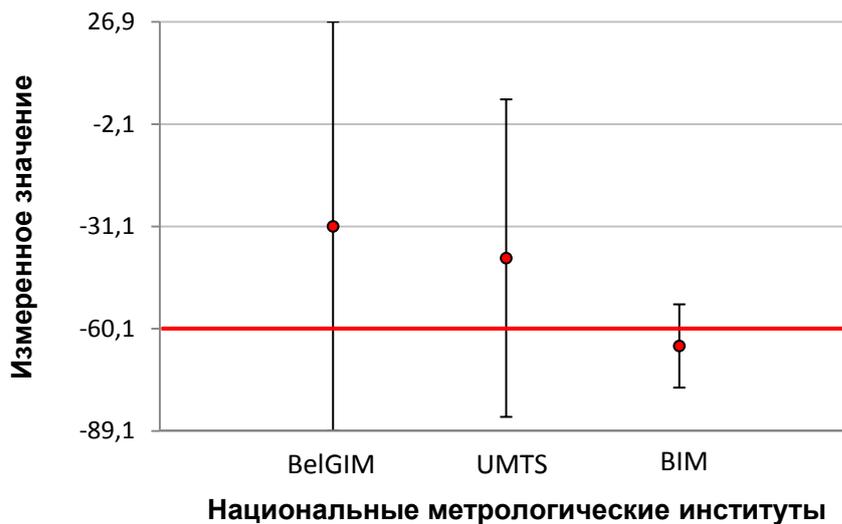


Рисунок 4.10 – Результаты измерений участников ДС СООМЕТ.ЕМ-S2 (PF = 0,5 Lag,  $f = 53$  Гц)

Таблица 4.13 – Результаты обработки данных ДС СООМЕТ.ЕМ-S2 Процедурой А и МАП

Процедура А			МАП		
$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП	$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП
-62,2	11,1	3	-60,1	6,9	3

Графическое изображение данных сличений и его опорное значение второй точки с параметрами *120 В, 5 А, 50 Гц, 0,5 Lead* приведены на рисунке 4.11.

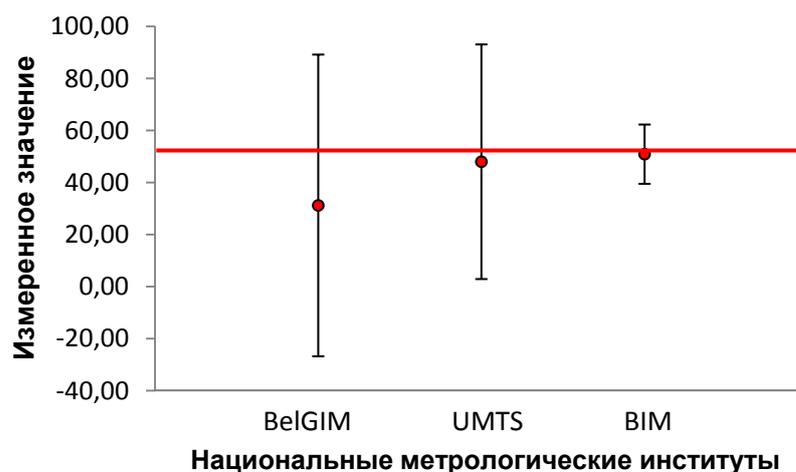


Рисунок 4.11 – Результаты измерений участников ДС СООМЕТ.ЕМ-S2 (PF = 0,5 Lead,  $f = 50$  Гц)

Соответственно для второго с параметрами 120 В, 5 А, 50 Гц, 0,5 Lead максимальная мощность НСП при различных значениях  $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  была достигнута при  $n = 8$ . Соответственно, границы ДАЗ были разбиты на  $n - 1 = 7$  семь интервалов с соответствующими значениями  $n$  измеряемой величины:  $a_1 = -26,80$ ,  $a_2 = -9,66$ ,  $a_3 = 7,47$ ,  $a_4 = 24,61$ ,  $a_5 = 41,75$ ,  $a_6 = 58,89$ ,  $a_7 = 76,02$ ,  $a_8 = 93,16$ . Профиль предпочтения состоял также из трех ранжирований:  $\lambda_1: \{ a_8 \sim a_7 \sim a_6 \sim a_5 \sim a_4 \sim a_3 \sim a_2 \succ a_1 \}$ ;  $\lambda_2: \{ a_6 \sim a_5 \sim a_4 \sim a_3 \sim a_2 \sim a_1 \succ a_7 \sim a_8 \}$ ;  $\{ a_4 \sim a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \}$ .

Фрагмент полученных 72 оптимальных решений для этого примера представлен в таблице 4.14.

Таблица 4.14 – Фрагмент оптимальных решений для профиля предпочтений

3	4	6	5	2	7	8	1
3	4	6	5	2	8	1	7
3	4	6	5	2	8	7	1
4	3	2	5	6	1	7	8
4	3	2	5	6	1	8	7
4	3	2	5	6	7	1	8
$D_{\text{least}} = 57$				$D(\beta, \Lambda) = 57$			
$N_{\text{kem}} = 72$				$n = 8; m = 3$			

Найденное итоговое ранжирование консенсуса с учетом множественности решений имеет вид:  $\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \sim a_4 \succ a_2 \sim a_5 \succ a_6 \sim a_1 \sim a_7 \sim a_8\}$ . Медианное опорное значение результатов сличений COOMET.EM-S2 оцененных МАП составило  $x_{\text{ref}} = 50,2$  с неопределенностью измерений  $u(x_{\text{ref}}) = 10,8$  (рисунок 4.11).

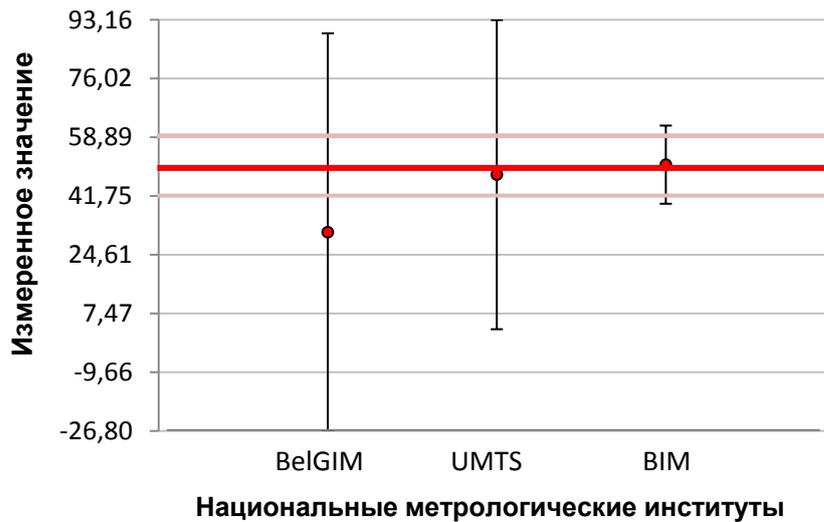


Рисунок 4.11 – Результаты измерений участников сличений COOMET.EM-S2 (PF = 0,5 Lag,  $f = 53$  Гц)

Таблица 4.14 – Результаты обработки данных сличений COOMET.EM-S2  
Процедурой А и МАП

Процедура А			МАП		
$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП	$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП
50,1	10,8	3	50,2	10,8	3

### 4.2.3 Межлабораторные сличения для определения размера единицы мощности микроволнового излучения

В работе [53] рассмотрены результаты межлабораторных сличений SIT.AF-01 единицы мощности микроволновых излучениях (50 МГц – 26,5 ГГц), организатором которых являлся Национальный институт метрологических исследований (INRIM) в Турине. В качестве эталона сравнения 12 лабораториям был разослан датчик мощности модели 438А компании Hewlett Packard. Целью сличений являлось подтверждение заявленных неопределенностей лабораторий, аккредитованные в национальной системе аккредитации в области измерений микроволнового излучения.

В таблице 4.15 и на рисунке 4.12 приведены результаты сличений 12 лабораторий. В качестве эталона сравнения использован датчик мощности с номинальным калибровочным коэффициентом 1,0 на частоте 1 ГГц. Для обработки результатов сличений авторами статьи был выбран алгоритм Нильсена (п. 1.3.3). Было получено опорное значение  $x_{\text{ref}} = 0,985$ , соответствующее наибольшему числу "голосов" лабораторий.

По итогам анализа данных, НСП, сформированное по результатам обработки алгоритмом Нильсена, включило в себя одиннадцать лабораторий, кроме лаборатории номер 11, т.к. её результат в соответствии с условиями алгоритма признан ненадежным.

Таблица 4.15 – Результаты межлабораторных сличений в области измерений микроволнового излучения

Лаборатория	$x_i$	$u(x_i)$
1	0,985	0,013
2	0,989	0,008
3	0,982	0,013
4	0,982	0,035
5	0,984	0,014
6	0,98	0,028
7	0,981	0,017
8	0,99	0,021
9	0,982	0,011
10	0,989	0,017

Продолжение таблицы 4.15

Лаборатория	$x_i$	$u(x_i)$
11	1,017	0,014
12	0,987	0,019

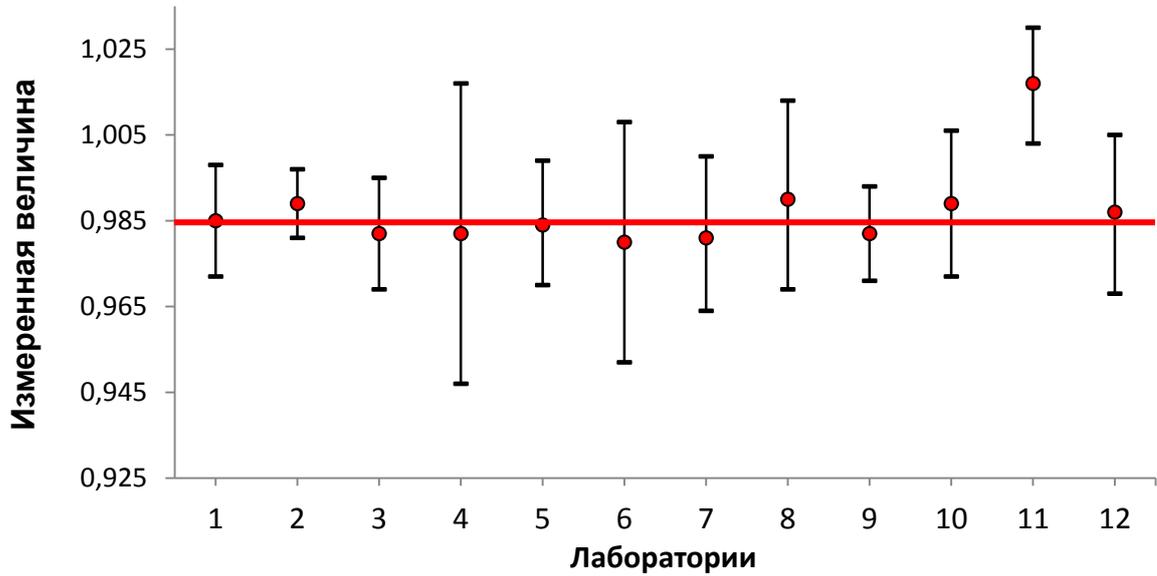


Рисунок 4.12 – Результаты МС в области измерений микроволнового излучения, обработанные алгоритмом Нильсена

Ранжирование  $\lambda_1$  для лаборатории 1 имели вид:  $a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5$ ; ранжирование  $\lambda_2$ :  $a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5$ ; ... ранжирование  $\lambda_7$ :  $a_2 \sim a_3 \succ a_1 \sim a_4 \sim a_5$ ;  $\lambda_8$ :  $a_3 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_5$  и т.д. Для профиля предпочтений было получено два оптимальных решения (таблица 4.16).

Таблица 4.16 – Оптимальных решений для профиля предпочтений

3	2	4	5	1
3	2	4	1	5
$D_{\text{least}} = 74$		$D(\beta, \Lambda) = 74$		
$N_{\text{kem}} = 2$		$n = 5; m = 12$		

Таким образом, единственное ранжирование консенсуса приняло вид:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1 \sim a_5\}.$$

В нем первое место, строго предпочитаемое остальным, заняло значение  $a_3$ , поэтому оно было выбрано в качестве опорного значения  $x_{\text{ref}} = 0,989$  с соответствующей неопределенностью  $u(x_{\text{ref}}) = 0,004$ . В НСП, сформированное по результатам обработки МАП, было включено также 11 лабораторий, как и при обработке алгоритмом Нильсена (рисунок 4.13).

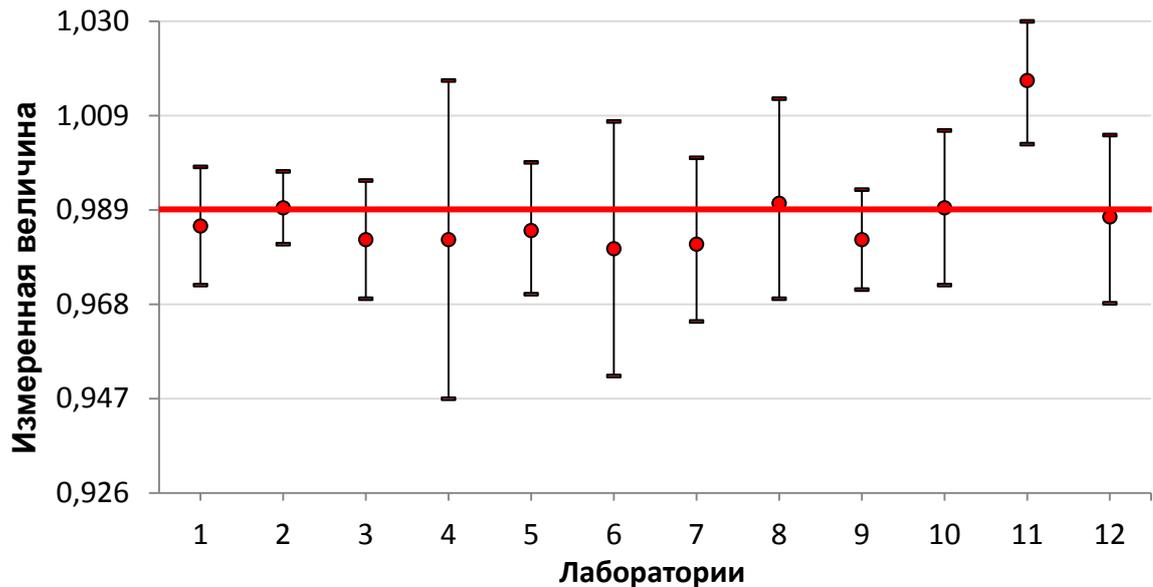


Рисунок 4.13 – Результаты МС в области измерений микроволнового излучения, обработанные МАП

Таблица 4.17 – Результаты обработки данных МС SIT.AF-01 алгоритмом Нильсена и МАП

Алгоритм Нильсена		МАП	
$x_{\text{ref}}$	мощность НСП	$x_{\text{ref}}$	мощность НСП
0,985	11	0,989	11

#### 4.2.4 Межлабораторные сличительные калибровки цифрового вольтметра

Результаты межлабораторных сличений рассмотрены на основании межлабораторных сличительных калибровок цифрового вольтметра, проведенные Белорусским государственным метрологическим институтом [14]. Лаборатории-участники в предложенной программе ПК при помощи калибруемого вольтметра

выполняли измерение напряжения переменного тока на пределе 2 В и частоте 20 Гц. В таблице 4.18 приведены результаты калибровок.

Результаты сличений в статье были обработаны Процедурой А. Для этого рассчитывалось средневзвешенное значение  $y$  и стандартная неопределенность  $u(y)$  в соответствии с формулами (1.4) и (1.5).

Таблица 4.18 – Результаты МС калибровок вольтметра

Лаборатории	$x_i$	$u(x_i)$
1	1,993500	0,008180
2	1,996200	0,008992
3	1,995190	0,001624
4	1,997700	0,002980
5	1,994620	0,004120
6	1,999145	0,001630
7	1,997150	0,001620
8	2,002174	0,000200

Результаты сличений в статье были обработаны Процедурой А. Для этого рассчитывалось средневзвешенное значение  $y$  и стандартная неопределенность  $u(y)$  в соответствии с формулами (1.4) и (1.5). Итоговое средневзвешенное значение  $y$ , при выполнении неравенства для  $\chi^2$ , было принято в качестве опорного значения по итогам сличений  $x_{\text{ref}} = 1,9962$  В, неопределенность которого составила  $u(x_{\text{ref}}) = 0,0005$  (рисунок 4.4). При этом из НСП исключены 6 и 8 лаборатории. Графическое изображение результатов межлабораторных сличительных калибровок цифрового вольтметра, обработанные Процедурой А приведено на рисунке 4.14.

Обработка данных таблицы 4.18 была проведена с помощью МАП. Алгоритм 5 запускали при различных значениях  $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Максимальная мощность НСП была достигнута при  $n = 4$ . Таким образом ДАЗ был разбит на  $n - 1 = 3$  равных интервалов. Границы интервалов соответствовали шести значениям измеряемой величины:  $a_1 = 1,9853$ ,  $a_2 = 1,9919$ ,  $a_3 = 1,9986$ ,  $a_4 = 2,0052$  (рисунок 4.15).

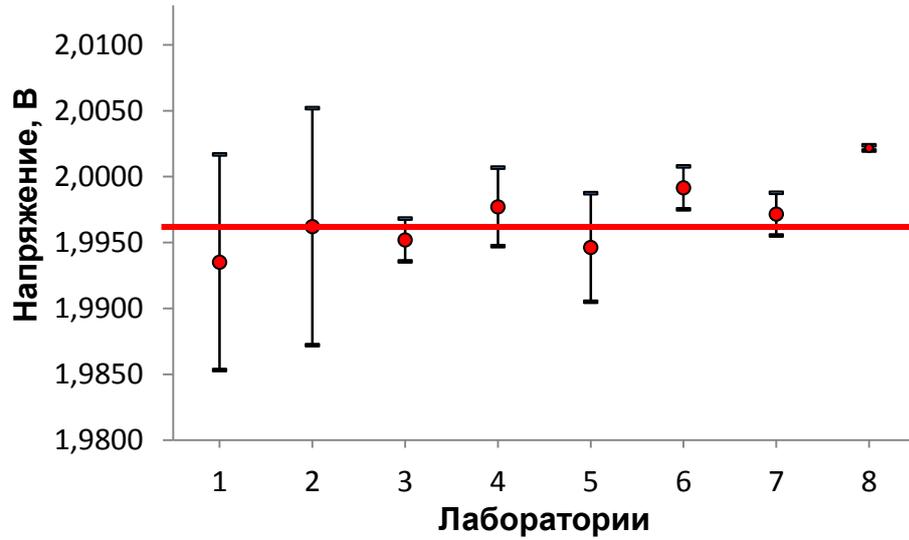


Рисунок 4.14 – Результаты межлабораторных сличительных калибровок цифрового вольтметра, обработанные Процедурой А

Ранжирование неопределенностей результатов измерений для восьми участников сличений представлено в виде профиля предпочтений:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1: a_3 \sim a_2 \succ a_1 \sim a_4 \\
 \lambda_2: a_3 \sim a_2 \succ a_1 \sim a_4 \\
 \lambda_3: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \\
 \lambda_4: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \\
 \lambda_5: a_3 \succ a_2 \sim a_1 \sim a_4 . \\
 \lambda_6: a_2 \sim a_1 \succ a_3 \sim a_4 \\
 \lambda_7: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \\
 \lambda_8: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Для данного профиля предпочтений было получено два оптимальных решения (таблица 4.19).

Таблица 4.19 – Оптимальных решений для профиля предпочтений

3	2	1	4
3	2	4	1
$D_{\text{least}} = 74$		$D(\beta, \Lambda) = 74$	
$N_{\text{kem}} = 2$		$n = 4; m = 8$	

Таким образом, оптимальное ранжирование консенсуса приняло вид:

$$\beta_{\text{fin}} = \{a_2 \succ a_3 \succ a_1 \sim a_4\},$$

в котором значение  $a_2 = 1,9986$ , было принято в качестве опорного значения  $x_{\text{ref}}$ , с соответствующей стандартной неопределенностью  $u(x_{\text{ref}}) = 0,001085$ . Из рисунка 4.15 видно, что результаты лабораторий  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$  не могут рассматриваться надежными, т.к. их интервалы неопределенности не включают в себя найденное опорное значение. Следовательно, данные результаты были исключены из формирования НСП результатов сличений.

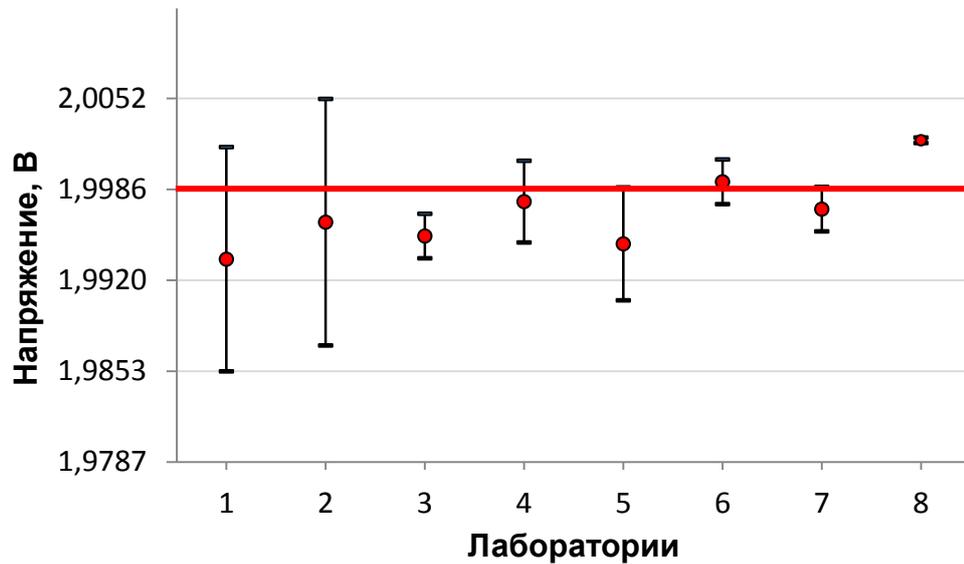


Рисунок 4.15 – Результаты МС калибровок цифрового вольтметра, обработанные МАП

Таблица 4.20 – Результаты обработки данных МС калибровок цифрового вольтметра Процедурой А и МАП

Процедура А			МАП		
$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП	$x_{\text{ref}}$	$u(x_{\text{ref}})$	мощность НСП
1,9962	0,0010	6	1,9986	0,0011	6

#### Выводы к главе 4

1. Разработана основанная на геометрическом распределении модель, связывающая в явном аналитическом виде вероятность определения опорного

значения измеряемой величины с числом  $m$  лабораторий-участников сличений.

2. Даны рекомендации по выбору рационального числа  $m$  лабораторий-участников сличений. На основе анализа рекомендуется назначать число участников сличений от 4 до 10-15. Как правило, при таком количестве участников, привлечение к сличениям новых лабораторий не дает положительного эффекта. В ситуациях, когда необходимо выявлять опорное значение с помощью группы экспертных лабораторий, минимизацией числа лабораторий в такой группе можно избежать значительных материальных затрат.
3. На результатах практических сличений экспериментально проверена работоспособность метода агрегирования предпочтений. Во всех случаях, применение МАП показало, что определяемое с его помощью опорное значение и соответствующая неопределенность весьма близки к значениям, полученным координаторами сличений.

## Заключение

1. Предложен и исследован метод обработки данных сличений, названный методом агрегирования предпочтений, основанный на преобразовании интервалов неопределенности в ранжирования, нахождении для них ранжирования консенсуса по правилу Кемени и назначения в качестве опорного значения сличений наилучшей альтернативы в ранжировании консенсуса.
2. Разработанный метод обеспечивает нахождение опорного значения сличений с неопределенностью, позволяющей сформировать наибольшее совместимое подмножество участников сличений мощности не меньшей или превышающей мощность НСП при традиционных методах.
3. Показано, что МАП при обработке результатов сличений обеспечивает формирование опорного значения, характеризующегося повышенной устойчивостью (робастностью) к виду закона распределения измерительных данных по сравнению с традиционными методами и обеспечивает получение опорного значения не менее, чем в 2 раза более близкого к номинальному значению по сравнению с известными робастными методами.
4. Разработана основанная на геометрическом распределении модель, связывающая в явном аналитическом виде вероятность определения опорного значения сличений с числом участников сличений, которая позволяет рекомендовать выбирать количество участников сличений из диапазона от 4 до 15.
5. Результаты диссертационной работы используются в Казахском институте метрологии (КазИнМетр) (г. Астана) и в испытательном центре "КабельТестСтандарт" ТОО FORBEST (г. Сарань, Казахстан) (Приложение А)
6. Результаты диссертационной работы использованы при выполнении двух НИР, выполненных по гранту РФФИ и в рамках базовой части государственного задания "Наука" Министерства образования и науки РФ.

### Список сокращений и обозначений

1. ДАЗ – Диапазон актуальных значений
2. ДС – Дополнительные сличения
3. ИЛ – Испытательная лаборатория
4. КИВ – Калибровочные и измерительные возможности
5. КК – Консультативный Комитет
6. КЛ – Калибровочная лаборатория
7. КООМЕТ – Евро-азиатское сотрудничество государственных метрологических учреждений
8. КС – Ключевые сличения
9. МАП – Метод агрегирования предпочтений,
10. МБМВ – Международное бюро мер и весов
11. МКМВ – Международный комитет по мерам и весам
12. МС – Межлабораторные сличения
13. НМИ – Национальные метрологические институты
14. НСП – Наибольшее согласованное подмножество
15. ПК – Проверки квалификации
16. ПЛ – Поверочная лаборатория
17. ПС – Пилотные сличения
18. РМО – Региональные метрологические организации
19. РФФИ – Российский фонд фундаментальных исследований
20. ТК – Технический комитет
21. ФВ – Физическая величина
22. BelGIM – Белорусский государственный институт метрологии.
23. BIM – Болгарский институт метрологии
24. BIPM – Bureau International des Poids et Mesures (Международное бюро мер и весов)
25. CIPM – Comité International des Poids et Mesures (Международный комитет по мерам и весам)

26. СМС – Calibration and measurement capabilities (алибровочные и измерительные возможности)
27. COOMET – Euro-asian cooperation of national metrological institutions (Евразийское сотрудничество государственных метрологических учреждений)
28. EURAMET – European Association of National Metrology Institutes (Европейская ассоциация национальных метрологических институтов)
29. KCDB – Key comparison database (Международная база данных)
30. KRISS – Korea Research Institute of Standards and Science (Корейский исследовательский институт стандартов и науки)
31. LNE – Laboratoire national de métrologie et d'essais, France (Национальная метрологическая лаборатория, Франции)
32. MNIA – Metrology national institute of Australia (Метрологический Национальный институт Австралии)
33. MRA – Mutual recognition agreement (Соглашение о взаимном признании)
34. NIM – National Institute of Metrology, China (Национальный институт метрологии, Китай)
35. NIST – National Institute of Standards and Technology, USA (Национальный институт стандартов и технологий, США)
36. NPL – National Physical Laboratory, Great Britain (Национальная физическая лаборатория, Великобритания)
37. NRC – National Research Council Canada (Национальный исследовательский совет Канады)
38. PTB – Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Bundesrepublik Deutschland (Физико-Технический Институт, ФРГ)
39. UMTS – Всеукраинский государственный научно-производственный центр стандартизации, метрологии, сертификации и защиты прав потребителей (ГП "Укрметртестстандарт", Украина)
40. VNIIFTRI – Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
41.  $m$  – число участвующих в сличениях лабораторий

42.  $m'$  – число лабораторий, результаты которых признаны надежными
43.  $x_i$  – измеренное значение, предоставленное  $i$ -ой участвующей лабораторией,  $i = 1, \dots, m$
44.  $u(x_i)$  – соответствующая стандартная неопределенность
45.  $x_{\text{ref}}$  – опорное значение измеряемой величины
46.  $u(x_{\text{ref}})$  – неопределенность опорного значения
47.  $y$  – средневзвешенное значение
48.  $u(y)$  – неопределенность средневзвешенного значения
49.  $\chi^2$  – выборочное значение критерия Пирсона
50.  $\chi_{v,\alpha}^2$  – табличное значение критерия Пирсона
51.  $E_n$  – нормализованное отклонение
52.  $\bar{x}$  – среднее значение результатов измерений  $m$  лабораторий
53.  $x_{(1)}$  – наименьшее выборочное значение
54.  $x_{(m)}$  – наибольшее выборочное значение
55.  $G$  – статистика Граббса
56.  $G_{m,1-\alpha}$  – табличное значение
57.  $\alpha$  – уровень значимости
58.  $\hat{\sigma}$  – оценка стандартного отклонения
59.  $S_i$  – сумма голосов
60.  $S_{\text{max}}$  – максимальное количество "голосов"
61.  $x_{i\text{max}}$  – измеренное значение, представленное лабораторией, набравшей максимальное количество "голосов"
62.  $i\text{max}$  – индекс лаборатории, набравшей максимальное количество голосов
63.  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  – профиль предпочтения
64.  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество альтернатив
65.  $n$  – число значений ДАЗ
66.  $c$  – цена деления диапазона актуальных значений
67.  $P = [p_{ji}]$  –  $(n \times n)$  матрица профиля
68.  $P_u$  – верхняя треугольная подматрица матрицы  $P$

69.  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  – частичное решение (лидер)
70.  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{K-n}\}$  – дополнение  $S$  до полного порядка
71.  $K = 0, \dots, n - 1$  – уровень дерева поиска
72.  $D$  – сумма элементов  $P_u$ , соответствующих текущему лидеру
73.  $D_u$  – верхняя граница
74.  $D_{low}$  – нижняя граница
75.  $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  – первые  $n$  натуральных чисел
76.  $N_{kem}$  – число ранжирований консенсуса
77.  $\beta_{N_{kem}}$  – ранжирование консенсуса
78.  $\beta_{fin}$  – единственное итоговое ранжирование консенсуса

### Список используемой литературы

1. Белоцерковский, В.И. Результаты и перспективы международного сотрудничества по взаимному признанию национальных эталонов / В.И. Белоцерковский, В.Ю. Бугаев, А.В. Иванов, С.В. Коростин // Измерительная техника. – 2003. – № 4. – С. 53-57.
2. Бурмистрова, Н.А. Разработка и исследование алгоритма обработки несогласованных данных ключевых сличений эталонов / Н.А. Бурмистрова // Измерительная техника. – 2014. – № 10. – С. 7-12.
3. Воробьева, Н.В. Предварительные результаты применения алгоритма нахождения отношения консенсуса в межлабораторных сравнительных испытаниях / Н.В. Воробьева, И.А. Маринушкина // Современные техника и технологии: сборник трудов XVIII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 9-13 апреля 2012 г.), Томск: ТПУ, 2012. – Т. 1 – С. 179-180.
4. Воробьева, Н.В. Экспериментальные исследования применения метода агрегирования предпочтений в межлабораторных сравнительных испытаниях / Н.В. Воробьева, И.А. Маринушкина // Современные техника и технологии: сборник трудов XIX Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 15-19 апреля 2013 г.), Томск: ТПУ, 2013. – Т. 1 – С. 146-147.
5. Величко, О.Н. Прослеживаемость результатов измерений на разных уровнях метрологических работ / О.Н. Величко // Измерительная техника. – 2009. – № 11. – С. 69-73.
6. Величко, О.Н. Калибровочные и измерительные возможности национальных институтов: особенности подготовки, экспертизы и публикации / О.Н. Величко // Измерительная техника. – 2010. – № 6. – С. 69-73.
7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

8. ГОСТ ISO/IEC. 17043-2013. Оценка соответствия. Основные требования к проведению проверки квалификации. – М.: Стандартинформ, 2013. – 39 с.
9. ГОСТ Р ИСО 13528-2010. Статистические методы. Применение при экспериментальной проверке компетентности посредством межлабораторных сравнительных испытаний. – М.: Стандартинформ, 2012. – 61 с.
10. ГОСТ ISO/IEC 17025-2009. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий. – М.: Стандартинформ, 2013. – 34 с.
11. ГОСТ 8.532-2002 ГСИ. Стандартные образцы состава веществ и материалов. Межлабораторная метрологическая аттестация. Содержание и порядок проведения работ. М.: Стандартинформ, 2008. – 12 с.
12. ГОСТ Р ИСО 5725-2-2002 Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Основной метод определения повторяемости и воспроизводимости стандартного метода измерений. – М: Изд-во Стандартов, 2002. – 43 с.
13. Ефремова, Н.Ю. Работы в области аккредитации и межлабораторных сравнительных испытаний / Н.Ю. Ефремова, В.И. Макаревич, С.А. Миранович-Качур, М.В. Гайдук // Стандартные образцы. – 2013. – № 2. – С. 71-87.
14. Ефремова, Н.Ю. Опыт оценивания данных межлабораторных сличений калибровочных и поверочных лабораторий / Н.Ю.Ефремова, А.Г.Чуновкина // Измерительная техника. – 2007. – № 6. – С. 15-21.
15. Кемени, Дж. Кибернетическое моделирование. / Дж., Кемени, Дж. Снелл – М.: Сов. радио, 1972. – 192 с.
16. Лемешко, Б.Ю. Расширение области применения критериев типа Граббсаб используемых при отбраковке аномальных измерений / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2005. – № 6. – С. 13-19.
17. Литвак, Б.Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. / Б.Г. Литвак – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
18. Маринушкина, И.А. Разработка программного комплекса для моделирования

- и обработки результатов межлабораторных сличений / И.А. Маринушкина, С.А. Хруль // Научная сессия ТУСУР–2015: материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 13–15 мая 2015 г.): В-Спектр, 2015. – Ч. 4. – С. 232-234.
19. Маринушкина, И.А. Получение робастного опорного значения результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений / И.А. Маринушкина, С.В. Муравьев // Метрология (Казахстан). – № 2, 2015 – С. 18-20.
  20. Маринушкина, И.А. Робастный метод обработки результатов межлабораторных сличений на основе агрегирования предпочтений / Маринушкина, И.А. // Сборник работ участников VI Международного конкурса "Лучший молодой метролог КОOMET-2015", 17-18 июня 2015 г., Киев, Украина. – С. 49-52.
  21. Маринушкина, И.А. Межлабораторные сличения как инструмент оценки качества работы измерительных лабораторий / Маринушкина, И.А. // Сборник материалов VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием "Россия молодая". (21-24 апреля 2015 г., Кемерово) – С. 1-3.
  22. МИ 2838-2003. Рекомендации. ГСИ. Стандартные образцы состава и свойств веществ и материалов. Общие требования к программам и методикам аттестации. – Екатеринбург: ФГУП "УНИИМ", 2003. – 14 с.
  23. Муравьев, С.В. Передача данных в беспроводных сенсорных сетях с приоритетами на основе агрегирования предпочтений / С.В. Муравьев, Е.В. Тараканов // Известия ТПУ. – 2012. – Том 320. – № 5. – С. 111-116.
  24. Муравьев, С.В. Агрегирование предпочтений как метод решения задач в метрологии и измерительной технике / С.В. Муравьев // Измерительная техника. – 2014. – № 2. – С. 19-24.

25. Муравьев, С.В. Алгоритмы голосования в программах проверки квалификации испытательных лабораторий / С.В. Муравьев, И.А. Маринушкина // Ползуновский вестник. – 2015. – № 2. – С. 31-35.
26. Муравьев, С.В. К обоснованию выбора числа лабораторий в межлабораторных сличениях / С.В. Муравьев, И.А. Маринушкина // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2015. – № 4. – С. 49-64.
27. Муравьев, С.В. Применение алгоритмов голосования в программах проверки квалификации испытательных лабораторий / С.В. Муравьев, И.А. Маринушкина // Измерение, контроль, информатизация: материалы XVI международной научно-технической конференции. Том 1. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2015. – С. 152-156.
28. Нильсен, Л. Идентификация и обращение с отличными от основной группы результатами измерений при ключевых сличениях / Л. Нильсен // Измерительная техника. – 2003. – № 10. – С. 63-68.
29. ПМГ 42-2001. Сличения государственных (национальных) эталонов. Порядок организации и проведения. – М. : Стандартиформ, 2001. – 10 с.
30. Прохоров, Ю.В. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Ю.В. Прохоров – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912 с.
31. Р 50.2.050-2005. ГСИ. Средства поверки одинакового уровня точности. Проверка качества поверочных и калибровочных работ посредством МС. Алгоритмы обработки результатов измерений. – СПб.: ФГУП "ВНИИМ им. Д.И.Менделеева", 2006 . – 12 с.
32. РМГ 29-2013. ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – М. : Стандартиформ, 2014. – 60 с.
33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612262 (RU); заявка № 2014663436 от 23.12.2014, дата рег. 16.02.2015; Бюл. № 3 от 20.03.2015 // С.В. Муравьев, И.А. Маринушкина, С.А. Хруль.

- Программное обеспечение для обработки результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений.
34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612263 (RU); заявка № 2014663437 от 23.12.2014, дата рег. 16.02.2015; Бюл. № 3 от 20.03.2015 // С.В. Муравьев, И.А. Маринушкина, С.А. Хруль. Программный комплекс для моделирования и обработки результатов межлабораторных сличений.
  35. Соболев, И.М. Численные методы Монте-Карло. / И.М. Соболев – М.: Наука, 1973. – 412 с.
  36. Ханов, Н.И. Роль ВНИИМ в международной системе обеспечения единства измерений / Н.И. Ханов, Ю.А. Кустиков, А.Б. Дятлев // Экономика качества. – 2014. – №3. – С 25-31.
  37. Харитонов, И.А. Выбор алгоритма обработки результатов ключевых сличений для установления эквивалентности национальных эталонов / И.А. Харитонов // Измерительная техника. – 2003. – № 4. – С. 58-60.
  38. Харитонов, И.А. Вычисление опорного значения ключевых сличений по результатам измерений, выполненных разными абсолютными методами / И.А. Харитонов, А.Г. Чуновкина // Измерительная техника. – 2007. – № 7. – С. 14-17.
  39. Чуновкина, А.Г. Разработка и исследование методов оценивания результатов измерений в новых метрологических задачах: дис. ...д-ра технич. наук: 05.11.15 / Чуновкина Анна Гурьевна. – СПб.: 2010. - 209 с.
  40. Чуновкина, А.Г. Международные сличения как инструмент подтверждения измерительных и калибровочных возможностей национальных метрологических институтов / А.Г. Чуновкина, И.А. Харитонов // Измерительная техника. – 2007. – № 7. – С. 14-17.
  41. Чуновкина, А.Г. Некоторые подходы к определению опорного значения и степеней эквивалентности при ключевых сличениях / А.Г. Чуновкина // Измерительная техника. – 2003. – № 4. – С. 60-64.

42. Чуновкина, А.Г. Об одном подходе к оцениванию результатов ключевых сличений эталонов при несогласованных данных / А.Г.Чуновкина, Н.А.Бурмистрова, Н.Д.Звягин // Измерительная техника. – 2013. – № 6. – С. 3-6.
43. Циарлини, П. Некоторые основные вопросы обработки данных межлабораторных сличений / П. Циарлини, Ф. Павезе // Измерительная техника. – 2003. – № 10. – С. 68-71.
44. Фридман, А.А. Дискретные задачи и метод ветвей и границ / А.А. Фридман, А.А. Вотяков А.А. // Экономика и математические методы. – 1974. – №. 3. – С. 611-621.
45. Allen, J. W. Effective Efficiency in Waveguide R-400 (WR-22) / J. W. Allen, J. Ascroft, B. Mellouet, V. Perepelki // Metrologia. – 2001. – Vol. 38. – P. 462-470,.
46. Bich, W. Uncertainty in measurements by counting / W. Bich, F. Pennecchi // Metrologia. – 2012. – Vol. 49. – P. 15-19.
47. BIPM 1999. Mutual Recognition of National Measurement Standards and of Calibration and Measurement Certificates issued by National Metrology Institutes (MRA) <http://www.bipm.org>.
48. Barthélemy, J.P. Human centered processes and decision support systems / J.P. Barthélemy, R. Bisdorff, G. Coppin // European Journal of Operational Research. – 2002 – Vol. 136. – № 2. – P. 233-252.
49. Barthélemy, J.P. Median linear orders: heuristics and a branch and bound algorithm / J.P. Barthélemy, A. Guenoche, O. Hudry // European Journal of Operational Research. – 1989 – Vol. 42. – № 2. – P. 313-325.
50. Barthelemy, J.P., Arrow's theorem: unusual domains and extended codomains / J.P. Barthélemy // Mathematical Social Sciences. – 1982 – Vol. 3. – Issue 1. – P. 79-89.
51. Blumenthal, S. Estimating the Binomial Parameter  $n$  / S. Blumenthal, R.C. Dahiya // Journal of the American Statistical Association. – 1981. – Vol. 76. – № 376. – P. 903-909.

52. Betzler, N. Fixed-Parameter Algorithms for Kemeny Rankings / N. Betzler, M.R. Fellows, J. Guo, R. Niedermeier, F.A. Rosamond // Theoretical Computer Science [J]. – 2009. – № 45. – P. 4554-4570.
53. Box, G.E.P. A note on the generation of random normal deviates / G.E.P. Box, M.E. Muller // The Annals of Mathematical Statistics. – 1958. – Vol. 29. – № 2. – P. 610-611.
54. Brunetti, L. Establishing reference value in high frequency power comparisons / L. Brunetti, L. Oberto, M. Sellone, P. Terzi // Measurement. – 2009. – Vol. 42. – P. 13181323.
55. Calibration and Measurement Capabilities - CMCs. <http://kcdb.bipm.org/AppendixC/default.asp>
56. CIPM MRA-D-05. Measurement comparisons in the CIPM MRA <http://www.bipm.org/en/cipm-mra/cipm-mra-documents/>.
57. Cox M.G. The evaluation of key comparison data / M.G.Cox // Metrologia. – 2002. – Vol. 39. – P. 589-595.
58. Cox, M.G. The evaluation of key comparison data: determining the largest consistent subset / M.G.Cox // Metrologia. – 2007. – Vol. 44. – P. 187-200.
59. CIPM MRA-D-05. Measurement comparisons in the context of the CIPM MRA. <http://www.bipm.org/en/cipm-mra/cipm-mra-documents/>
60. COOMET R/GM/11:2005. Положение о сличениях эталонов национальных метрологических институтов COOMET. – Минск : KOOMET, 2010. – 33 с.
61. COOMET R/GM/14:2006. Руководство по оцениванию данных ключевых сличений KOOMET. – Санкт-Петербург: KOOMET, 2008. – 13 с.
62. COOMET R/GM/19:2008. Руководство по оцениванию данных дополнительных сличений KOOMET. – Харьков : KOOMET, 2008. – 4 с.
63. Davenport, A. A computational study of the Kemeny rule for preference aggregation / A. Davenport, J. Kalagnanam // AAAI– 2004.– P. 697-702.
64. Dutta, B. Covering sets and a new Condorcet choice correspondence / B. Dutta // Journal of Economic Theory. – 1988. –44. – P. 63-80.

65. Dwork, C. Rank Aggregation Methods for the Web. Proc. / C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, D. Sivakumar // 10th WWW. – 2001. – P. 613-622.
66. Elkind, E. Choosing Collectively Optimal Sets of Alternatives Based on the Condorcet Criterion / E.Elkind, J.Lang, A.Saffidine // Proc. 22nd Intern. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'11, 16–22 July 2011, Barcelona, Spain). – Vol 1. – P. 186-191.
67. Elster, C. Analysis of key comparisons data: critical assessment of elements of current practice with suggested improvements / C. Elster, B. Toman // Metrologia. – 2013. – Vol. 50. – P. 549-555.
68. Ferrero, C. The equivalence in accreditation: robust or standard statistical analysis of interlaboratory comparisons / C. Ferrero // Measurement. – 2009. – № 42. – P. 1541-1545.
69. Fowler M. Patterns of Enterprise Application Architecture. / M. Fowler – Addison-Wesley Professional, 2002. – 560 c.
70. Fishman, G.S. Monte Carlo Concepts, Algorithms, and Applications. / G.S. Fishman – Springer Series in Operations Research, 1996. – 689 p.
71. Gehrlein, W.V. Condorcet Efficiency and Proximity to Single-Peaked Preferences. / W.V.Gehrlein // Proc. 3rd Intern. Conf. on Logic, Game Theory and Social Choice (September 2003, Siena, Italy). – P. 282-283.
72. Gehrlein, W.V. Condorcet's paradox / W.V. Gehrlein // Theory and Decision. – 1983. – № 15. – P. 161-197.
73. ILAC P10:01/2013. ILAC Policy on Traceability of Measurement Results <http://anab.org/media/1078/ilac-p10-jan2013-traceability.pdf>.
74. ISO/IEC Guide 99:2007. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM 3). [http://www.iso.org/iso/ru/iso\\_catalogue/catalogue\\_tc/catalogue\\_detail.htm?csnumber=45324](http://www.iso.org/iso/ru/iso_catalogue/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=45324)
75. Jones, B. Condorcet Winners and the Paradox of Voting: Probability Calculations for Weak Preference Orders / B.Jones, B.Radcliff, C.Taber, R.Timpone // The American Political Science Review. – 1995. – №89. – 137-144.

76. Judaschke, R. Final Report of the Pilot Laboratory CCEM Key Comparison CCEM.RF-K25.W RF power from 33 GHz to 50 GHz in waveguide / R. Judaschke // Physikalisch-Technische Bundesanstalt – 2014. – P. 1-84.
77. Kemeny, J. Mathematics without numbers / J. Kemeny // Daedalus. – 1959. – Vol. 88. – P. 571–591.
78. Kemeny, J.G. Mathematical Models in the Social Sciences / J.G. Kemeny, J.L.Snell // New York Ginn. –1962 – P. 159.
79. Lira, I. Analysis of key comparisons incorporation knowledge about bias / I. Lira, A. Chunovkina, C. Elster, W.Woeger // IEE Transaction on instrumentation and measurement. – 2012. – Vol. 61. – P. 2079-2084.
80. Maassen, H. Generating random weak orders and the probability of a Condorcet winner / H.Maassen, T.Bezembinder // Social Choice and Welfare. – 2002. – № 19. – P. 517-532.
81. Metropolis, N. The Monte Carlo Method / N. Metropolis, S. Ulam // Journal of the American Statistical Association. – 1949. – № 44 – C. 335-341.
82. Muravyov, S.V. Special interpretation of formal measurement scales for the case of multiple heterogeneous properties / S.V. Muravyov, V. Savolainen // Measurement. – 2001– Vol. 29. – P. 209-223.
83. Muravyov, S.V. Rankings as ordinal scale measurement results / S.V. Muravyov // Metrology and Measurement Systems. – 2007. – Vol. XIII. – №. 1 – P. 9-24.
84. Muravyov, S.V. About reasonable number of rankings in preference profile when measuring quality / S.V. Muravyov // Proceedings of the 9th IMEKO Symposium on Measurement and Quality Control (ISMQC) 2007 (Indian Institute of Technology Madras, Chennai, India, 2007). – P. 331-334.
85. Muravyov, S.V. Largest consistent subsets in interlaboratory comparisons: preference aggregation approach / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina // 14th Joint International IMEKO TC1, TC7, TC13 Symposium on Intelligent Quality Measurements – Theory, Education and Training 2011 (Jena, Germany, 31 August - 2 September, 2011). – P. 69-73.

86. Muravyov, S.V. Multiple solutions of an exact algorithm for determination of all Kemeny rankings: preliminary experimental results / S.V.Muravyov, E.V.Tarakanov // Proc. Intern. Conf. on Instrumentation, Measurement, Circuits and Systems (ICIMCS 2011, 13-14 December 2011, Hong Kong) ASME Press New York. – Vol. 1. – P. 17-20.
87. Muravyov, S.V. Aggregation of interlaboratory comparison results using consensus ranking / S.V. Muravyov, N.V. Vorobyeva, I.A. Marinushkina // 23th National Scientific Symposium with International Participation "Metrology and metrology assurance 2013" (Sozopol, Bulgaria, 9-13 September 2013). – P. 432-437.
88. Muravyov, S.V. Ordinal measurement, preference aggregation and interlaboratory comparisons / S.V.Muravyov // Measurement. – 2013. – Vol. 46. – № 8. – P. 2927-2935.
89. Muravyov, S.V. Intransitivity in multiple solutions of Kemeny Ranking Problem / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina // Journal of physics: conference series – 2013. – Vol. 459. – P. 012006.
90. Muravyov, S.V. Dealing with chaotic results of Kemeny ranking determination / S.V.Muravyov // Measurement. – 2014. – Vol. 51. – P. 328-334.
91. Muravyov, S.V. A software tool for simulation of interlaboratory comparison data evaluation method using preference aggregation / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina // 21st IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry" (Prague, Czech Republic, 30 August – 4 September, 2015). – P. 955-959.
92. Nielsen H.S. Determining consensus values in interlaboratory comparisons and proficiency testing // NCSLI Newsletter. 2004. V. 44. No. 2. P. 12-15.
93. Nielsen, J. Heuristic evaluation. In: Usability Inspection Methods / J. Nielsen, R.L. Mack (Eds.) // John Wiley & Sons, New York. –1994. – № –P. 55-62.
94. Nielsen, J., A mathematical model of the finding of usability problems / J. Nielsen, T.K. Landauer // Proceedings of the ACM/IFIP INTERCHI'93 Conference, IOS Press, The Netherlands, Amsterdam. – 1993. – P. 206-213.

95. NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, 1.3.6.6.18. Binomial Distribution <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda366i.htm>.
96. Parhami, B. Distributed Interval Voting with Node Failures of Various Types / B. Parhami // 12th IEEE Workshop on Dependable Parallel, Distributed and Network-Centric Systems (DPDNS'07). – Long Beach, California USA, 2007. – P. 1-7.
97. Regenwetter, M. Transitivity of Preferences / M.Regenwetter, J.Dana, C.P.Davis-Stober // Psychological Review. – 2011. – № 118. – P. 42-56.
98. Spiegelhalter, D. Understanding uncertainty: Infinite monkey business / D. Spiegelhalter, O. Smith // Plus Magazine, University of Cambridge. – 2010. – Issue 54. <https://plus.maths.org/content/infinite-monkey-business>.
99. Tao, S. Pritrans: A Prioritized Converge-cast Scheme using Consensus Ranking in Wireless Sensor Networks / S.Tao, M.C.Chan, S.V.Muravyov, E.V.Tarakanov // Proc. IEEE Sensors Applications Symp. (SAS-2010, 23-25 February 2010, Limerick, Ireland). – P. 251-256.
100. Thompsom, M. The International harmonized protocol for the proficiency testing of analytical chemistry laboratories (IUPAC Technical report) / M. Thompsom, S.L.R. Elison, R. Wood // In pure and applied chemistry. – 2006. – Vol. 78. – № 1. – P. 145-196.
101. Van Deemen, A. M. A. The probability of the paradox of voting for weak preference orderings // Social Choice and Welfare. – 1999. – № 16. – P. 171-82.
102. Velychko, O. Final report on COOMET 344/UA/05 Supplementary Comparison of 50/60 Hz Power (COOMET.EM-S2) / O. Velychko, S. Karpenko, V. Gachok, O. Akhmadov // SE Ukrmetrteststandard, Kyiv, Ukraine – 2013. – P. 1-29.
103. Velychko O. The Results of Supplementary Comparison of 50/60 Hz Power COOMET.EM-S2 / O. Velychko, S. Karpenko, V. Gachok // 10<sup>th</sup> International Congress on Electrical Metrology. Congress Digest. – Buenos Aires, Argentina (September 25–27, 2013). – 4 p.
104. Vidu, L. The minimal quota for a complete and transitive majority relation to be transitive / L.Vidu // Group Decision and Negotiation . – 2000. – № 9. – P. 531-534.

105. Woeger, W. Remarks on the  $E_n$  criterion used in measurement comparisons / W. Woeger // PTB-Mitteilungen. – 1999. – № 109. – P. 24-37.
106. Young, H.P. Optimal voting rules / H.P. Young // Journal of Economic Perspectives. – 1995. – № 9. – P. 51-64.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Акты внедрения результатов диссертационной работы**

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ИНВЕСТИЦИЯЛАР  
ЖӘНЕ ДАМУ МИНИСТРЛІГІ  
Техникалық реттеу және метрология комитетінің  
"Қазақстан метрология институты (КазИнМетр)"  
шаруашылық жүргізу құқығындағы  
республикалық мемлекеттік кәсіпорны



Республиканское государственное предприятие  
на праве хозяйственного ведения "Казакстанский  
институт метрологии (КазИнМетр)"  
Комитета технического регулирования и метрологии  
МИНИСТЕРСТВА ПО ИНВЕСТИЦИЯМ  
И РАЗВИТИЮ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

010000, Қазақстан Республикасы, Астана қаласы, Есіл ауданы, Ормыбор көшесі, 11 үй  
Тел: (7172) 79-32-52, факс: (7172) 79-32-99,  
БИН 961140000222, ИИК KZ026010111000033182, "Қазақстан халық Банкі" АҚ,  
БИК HSBKZKZKX, КБе 16, e-mail: kazinmetr@kazinmetr.org

010000, Республика Казахстан, город Астана, р-н Есик, ул. Ормыбор, д. 11  
Тел: (7172) 79-32-52, факс: (7172) 79-32-99,  
БИН 961140000222, ИИК KZ026010111000033182, АО "Народный банк Казахстана",  
БИК HSBKZKZKX, КБе 16, e-mail: kazinmetr@kazinmetr.org

12.08.2015 № 2102-10-01-5/8786

### Акт внедрения результатов кандидатской диссертации Маринушкиной И.А. в РГП «Казакстанский институт метрологии (КазИнМетр)»

Настоящий акт составлен в том, что в РГП «Казакстанский институт метрологии» при обработке результатов межлабораторных сличений по поверке/калибровке средств измерений электрических величин, давления, температуры и теплофизических величин применяются:

- метод оценки результатов межлабораторных сличений на основе агрегирования предпочтений;
- программное обеспечение для обработки результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений, предложенные в диссертационной работе Маринушкиной И.А.

Метод агрегирования предпочтений для обработки результатов межлабораторных сличений и соответствующее программное обеспечение, защищенное свидетельством о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612262 (RU) (заявка № 2014663436 от 23.12.2014, дата рег. 16.02.2015; Бюл. № 3 от 20.03.2015), позволяет повысить точность определения опорного значения сличений в среднем не менее, чем в два раза по сравнению с традиционными методами.

Генеральный директор  
РГП «КазИнМетр»



В. Н. Михалченко



Казахстан Республикасы, Қарағанды облысы  
Саран к-сы, Шахтер к-сы, 30 "А"  
СТТН 302000307148  
БЖН 100540004279  
Есеп шот (ЖАК): KZ67856000003867729 (KZT)  
Қабылдаушы банк: "Банк Центр Кредит" АҚ ҚФ  
банк БЖН: КСІВКЗКХ

Республика Казахстан, Карагандинская область  
г. Сарань, ул. Шахтерская, 30 "А"  
РНН 302000307148  
БИН 100540004279  
Расчетный счет (НИК): KZ67856000003867729 (KZT)  
Банк получателя: КФ АО "Банк Центр Кредит"  
БНК банка: КСІВКЗКХ

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ТОО "FORBEST"

Ю.А. Лютов

2015 г.



### АКТ

#### о внедрении результатов кандидатской диссертации Маринушкиной И.А. в испытательном центре "КабельТестСтандарт" ТОО "FORBEST"

Комиссия в составе: начальника испытательного центра Савиной В.И., заведующего лабораторией Колесникова С.А., техника-лаборанта Пивоварова А.С. – составили настоящий акт в том, что результаты диссертационной работы И.А. Маринушкиной:

- метод оценки результатов межлабораторных сличений на основе агрегирования предпочтений;
- программное обеспечение для обработки результатов межлабораторных сличений методом агрегирования предпочтений

используются в ИЦ "КабельТестСтандарт" для проведения внутрилабораторного контроля качества результатов измерений при проведении испытаний кабельной продукции в соответствии со стандартом предприятия СМ ИЦ-ДП-17-2015 "Внутрилабораторный контроль".

Метод агрегирования предпочтений и соответствующее программное обеспечение, защищенное свидетельством о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612262 (RU) (заявка № 2014663436 от 23.12.2014, дата рег. 16.02.2015; Бюл. № 3 от 20.03.2015), позволяют при проверке правильности проведения испытаний персоналом испытательного центра одних и тех же контрольных образцов продукции несколькими специалистами независимо друг от друга повысить точность определения приписанного значения в среднем не менее, чем в два раза по сравнению с традиционными методами. Это обеспечило повышение качества работ отдельных исполнителей и всего испытательного центра в целом.

Начальник ИЦ

Зав. лабораторией ИЦ

Техник-лаборант ИЦ

В.И. Савина

С.А. Колесников

А.С. Пивоваров