

УДК 534.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДУЛЯЦИИ БИЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ СУПЕРПОЗИЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

С.Ю. Клименко, А.П. Савинов

Томский политехнический университет

E-mail: savinov@phtd.tpu.ru

Выявлена возможность существования многоуровневой модуляции биений, определяющей последовательность чередования интервалов биений с различной длительностью, возникающих при парном звучании монофонических сигналов. Установлено, что цепные дроби являются не просто одним из разделов математики, позволяющим приближенно вычислять значения функций, но и несут в себе глубокий физический смысл. Показано, что параметры цепных дробей адекватно описывают с желаемой точностью поведение акустического или электрического сигнала во времени, а также отражают его компонентную структуру, однозначно связаны с длительностями периодов соответствующих уровней модуляции интервалов биений, возникающих при суперпозиции двух гармонических сигналов с произвольными отношениями частот.

### Ключевые слова:

Комбинационные тона, акустический сигнал, биения, многоуровневая модуляция биений, цепные дроби.

### Key word:

Combinative tone, audible signal, beats, all level modulation of beats, chain fraction.

Математическая теория процесса биения, возникающего при сложении акустических и электрических гармонических сигналов, была развита в работах [1, 2], а затем [3]. Согласно результатам этих исследований, при суммировании гармонических сигналов  $F_1=A_1\sin 2\pi f_1 t$  и  $F_2=A_2\sin 2\pi f_2 t$ , близких по частоте, возникают колебания, модулированные по амплитуде, частоте и фазе. Эти колебания в общем виде описываются уравнением биений:

$$F(t) = A(t) \sin \varphi(t), \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  – мгновенное значение фазового угла результирующего сигнала, обуславливающее, в общем случае, возникновение фазовой и частотной модуляции;  $\sin \varphi(t)$  – высокочастотная составляющая суммарного колебания, круговая частота за-

полнения которого  $\omega_n = 2\pi f_n = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ ;  $A(t)$  – мгновенное значение огибающей, определяющей амплитуду результирующего сигнала:

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\pi(f_2 - f_1)t}. \quad (2)$$

Как видно из уравнений (1, 2), частота колебания амплитуды огибающей равна разности частот суммируемых сигналов.

Экспериментальные исследования [4], проведенные на ЭВМ, показали, что частота биения огибающей результирующего сигнала совпадает по величине с разностью частот суммируемых колебаний только при определенном соотношении их частот и равенстве их амплитуд. В остальных случаях наблюдается многоуровневая модуляция огибающей результирующего сигнала по амплитуде и частоте биений. Детальному исследованию выявленной закономерности и посвящена данная статья.

Вычисление амплитудно-частотных характеристик суммарного сигнала проводилось методом

сверхбыстрого спектрального оценивания, изложенного в [5, 6].

1. Формировался результирующий сигнал, описываемый уравнениями (1, 2), путем суммирования гармонических колебаний  $F_1$  и  $F_2$ .
2. Выделялись из суммарного сигнала экстремальные значения его амплитуд  $F_i^{эк}$  и их временные координаты  $t_i$ .
3. Измерялись временные интервалы между соседними экстремумами  $\{\Delta t_i\}$  и соответствующие им амплитудные приращения  $\{\Delta F_i^{эк}\}$  и, вычислялись параметры высокочастотной составляющей, т. е. несущей.

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{1}{2f_i},$$

где  $t_i, t_{i+1}$  – временные координаты, когда  $F'(t)=0$ .

Суммирование и усреднение  $(N-1)$  приращений дает, соответственно, оценки среднего периода и частоты несущей результирующего колебания:

$$\bar{T}_n = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta t_i}{N-1} = \frac{1}{2f_n}, \quad (3)$$

где  $N$  – порядковый номер последнего экстремума результирующего сигнала.

Аналогичным образом находились оценка амплитуды спектральной составляющей частоты несущей:

$$A_i^{эк} = 0,5 \left| F_{i+1}^{эк} - F_i^{эк} \right|, \\ \bar{A}_n = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} A_i^{эк}}{N-1}. \quad (4)$$

4. Далее из исходных экстремумов процесса  $F(t)$  исключались максимумы или минимумы (в нашем случае минимумы), и в оставшемся массиве определяют новые экстремумы.
5. Выделялись стандартным способом новые экстремумы и находились значения составляющей более низкой частоты, т. е. огибающей.

$$T_{b_j} = t_{j+1}^{\max} - t_j^{\max} = \frac{1}{f_{b_j}}, \quad (5)$$

где  $t_j, t_{j+1}$  – временные координаты, когда огибающая  $A(t)$  принимает максимальное значение.

$$\bar{T}_b = \frac{\sum_{j=1}^M T_{b_j}}{M} = \frac{1}{f_b}, \quad (6)$$

$$A_{b_j} = 0,5 \left| A_{j\max}^{\max} - A_{j\max}^{\min} \right|, \quad (7)$$

$$\bar{A}_b = \frac{\sum_{j=1}^M A_{b_j}}{M}, \quad (8)$$

где  $M$  – число колебаний огибающей по длине реализации, относящихся к близким по значениям периодам  $T_{b_j}$ . Далее, в случае необходимости нахождения более низких частот, процесс обработки сигнала повторялся по алгоритму (5)–(8).

Частота дискретизации исследуемого сигнала равнялась 100 кГц. Это более чем достаточно для исследуемого диапазона частот от 1 до 500 Гц. В этом случае максимальная погрешность, возникающая при расчетах временной координаты экстремума колебаний амплитуды несущей результирующего сигнала, не превышает 0,5 %, а точность расчета амплитуд экстремумов гарантируется до 4-го знака включительно после запятой. Кроме того известно, согласно исследованиям [5], что по экстремумам можно восстанавливать случайный процесс со среднеквадратичной погрешностью около 2 %.

Эксперименты показали, что частота биений  $f_b = f_2 - f_1$ , если целочисленные коэффициенты пропорциональности<sup>1</sup>  $k_2$  и  $k_1$  отношения суммируемых частот  $f_2$  к  $f_1$  отличаются друг от друга на единицу, т. е.  $k_2 - k_1 = 1$ .

$$k = \frac{k_2}{k_1} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (9)$$

В этом случае максимальные значения амплитуды огибающей равны между собой, а длительности интервалов, заключенных между ними, постоянны по величине. Необходимо отметить, что число колебаний амплитуды результирующего сиг-

нала за период его биения равно интервальному коэффициенту  $k_2$ , а его средняя по времени частота всегда равна верхней частоте колебаний амплитуды суммируемых сигналов. Данное утверждение справедливо не только в случае  $A_2 > A_1$ , как следует из [3], но и для равных по амплитуде суммируемых сигналов.

Рассмотренный вид биений характерен для натурального строя, интервалы которого образованы гармоническими интервалами: 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 9/8 и т. д. Пример такого вида колебаний показан на рисунке, *a*. Необходимо отметить, что на остальных графиках «*b*» и «*c*» непрерывное изменение во времени амплитуды суммарного сигнала представлено только его экстремальными значениями.

При разности интервальных коэффициентов  $k_2 - k_1 = 2$ , отмеченная выше равномерная последовательность интервалов биений нарушается. Наблюдается поочередное изменение длительности периода колебания огибающей (рисунок, *b*).

Частота биения не равна в этом случае разности частот суммируемых колебаний.

Периодичность процесса наблюдается в последовательности интервалов биений, состоящих из совокупности не одинаковых по длительности двух смежных интервалов биений  $T_{b=q}$  и  $T_{b=q+1}$ :

$$T_b^m = T_{b=q} + T_{b=q+1} = \frac{2}{f_2 - f_1}. \quad (10)$$

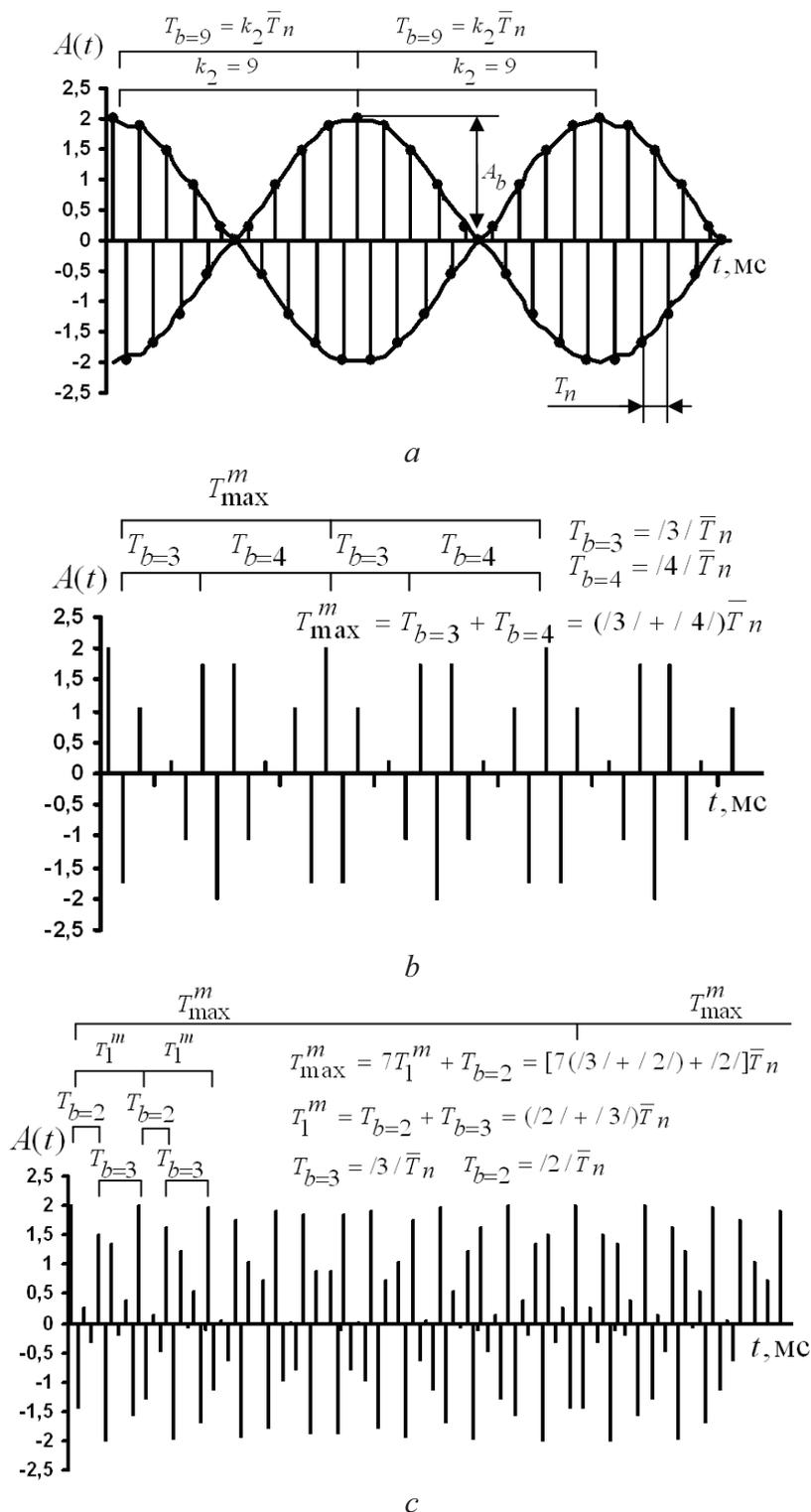
Индекс «*q*» означает минимальное число колебаний амплитуды результирующего сигнала, кратно укладывающееся на одном интервале биений.

Число колебаний амплитуды результирующего сигнала, кратно укладывающихся на одном периоде модулированных в определенной последовательности интервалов биений, равно сумме колебаний несущей в двух смежных интервалах биений и равно по величине числителю  $k_2$  отношения коэффициентов пропорциональности (9). При этом интервалы биений, образующие периодическую последовательность, отличаются друг от друга по числу колебаний амплитуды несущей в данных интервалах всегда на единицу.

Максимальные значения амплитуды огибающей постоянны во времени и равны между собой. Такой характер биений присущ для натурального звукоряда, отношения интервальных коэффициентов суммируемых частот в котором представлены в виде простых дробей: 5/3, 7/5, 9/7, 11/9 и т. д.

При разности интервальных коэффициентов  $k_2 - k_1 > 2$  возникают низкочастотные периодичности модулированных в определенной последовательности интервалов биений. Длительность этих периодичностей равна сумме длительностей ( $k_2 - k_1$ )

<sup>1</sup> Коэффициенты пропорциональности  $k_1$  и  $k_2$  в музыкальной практике называют интервальными коэффициентами, характер отношений которых характеризует благозвучность ощущения последовательно или одновременно звучащих тонов [7].



**Рисунок.** Зависимость периодичности в последовательности интервалов биений результирующего сигнала от соотношения частот суммируемых колебаний, амплитуды которых  $A_1=A_2=1$ : а)  $f_1=264$  Гц,  $f_2=297$  Гц,  $k_2/k_1=9/8$ ; б)  $f_1=264$  Гц,  $f_2=369,6$  Гц;  $k_2/k_1=7/5$ ; в)  $f_1=220$  Гц,  $f_2=370$  Гц,  $k_2/k_1=37/22$

интервалов биений амплитуды результирующего сигнала.

В наблюдаемой глобальной периодичности процесса в этом случае наблюдаются и локальные периодические последовательности интервалов

биений. Совокупность интервалов биений  $T_1^m$  (рисунок, в), образующая равные по времени периодические последовательности, составляет первый уровень модуляции интервалов биений. Локальные уровни модуляции располагаются, в соответствии с

существующей иерархией, по длительности периодов модуляции последовательности интервалов биений.

Экспериментальные исследования показали, что максимальная по длительности периодичность в поведении результирующих колебаний суммируемых частот наблюдается на временной оси через  $(k_2 - k_1)$  интервалов биений и соответственно период верхнего уровня (максимальный по длительности) модулированных в определенной последовательности интервалов биений определяется соотношением:

$$T_{\max}^m = \frac{k_2 - k_1}{f_2 - f_1}. \quad (11)$$

Полученное ранее ур. (10) является частным случаем выражения (11).

Как видно из равенства (11), чем больше разность между целочисленными коэффициентами пропорциональности суммируемых частот, тем больше будет период повторения результирующих колебаний на временной оси. Интересно отметить, что если один из коэффициентов пропорциональности является не целочисленным, а иррациональным числом, например,  $k_2 = \sqrt{10}$ , то при сложении гармонических колебаний возникает случайный процесс. Такой случайный процесс называют в [8] почти периодическим.

Экспериментально подтверждено, что разность частот суммируемых колебаний в равенстве (11) имеет физический смысл средней частоты колебания огибающей, определенной на  $(k_2 - k_1)$  интервалах биений:

$$\bar{f}_b = (f_2 - f_1) = \frac{k_2 - k_1}{T_{\max}^m}. \quad (12)$$

Для иллюстрации вышеизложенного в таблице приведен пример с расчетами по формулам (3–8) параметров сигнала, образованного суммированием гармонических колебаний с отношением частот, равным

$$k = \frac{f_2}{f_1} = \frac{422,4}{264} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{8}{5} \text{ и амплитудами } A_1 = A_2 = 1.$$

Исходная последовательность экстремальных значений амплитуд и соответствующих им временных координат результирующего сигнала представлены в колонках № 1–3 таблицы.

Расчеты средней частоты колебания амплитуды суммарного сигнала (колонка № 4) показали, что на интервалах усреднения, кратных максимальному периоду модуляции последовательности биений  $T_{\max}^m$  она точно равна частоте  $f_2$  второй компоненты суммируемых колебаний и, соответственно, число ее колебаний за этот период составляет  $k_2$ . При этом разброс значений рассчитанной частоты слабо зависит от увеличения длины интервала усреднения.

Таким образом, экспериментально установлено, что средний период колебания амплитуды суммарного сигнала связан с максимальным периодом

модулированных в определенной последовательности интервалов биений следующим соотношением:

$$\bar{T}_n = \frac{T_{\max}^m}{k_2}. \quad (13)$$

Биение амплитуды колебания результирующего сигнала происходит с частотами  $\bar{f}_{b=2} = 223,3$  Гц и  $\bar{f}_{b=3} = 138,35$  Гц. Соответствующие им значения периодов колебания биений представлены в колонке № 8.

Индекс «b» означает число колебаний амплитуды результирующего сигнала в его интервалах биений. Значения, принимаемые «b», показаны в колонке № 10.

Средняя частота колебания амплитуды огибающей (12) равна:  $\bar{f}_b = 158,4$  Гц.

Таким образом, видно, что частота биений амплитуды колебания результирующего сигнала изменяется относительно средней частоты колебания огибающей в процессе модуляции последовательности интервалов биений от  $f_{b=3} = 138,35$  Гц до  $f_{b=2} = 223,3$  Гц.

Количество интервалов биений равно разности коэффициентов пропорциональности:  $k_2 - k_1 = 3$ .

Максимальный период модуляции совокупности интервалов биений (колонка № 12) определяется суммой трех интервалов биений, расположенных между однополярными максимальными значениями огибающей (колонка № 8).

$$T_{\max}^m = 18,94 \text{ мс.}$$

Соответствующая этому периоду минимальная частота модуляции последовательности биений  $f_{\min}^m = 52,8$  Гц. В данном случае она показывает, что частота периодической компоненты, обусловленной модуляцией биений в суммарном сигнале, намного ниже частотного диапазона, в котором находятся биения и несущая результирующих колебаний.

Период модуляции биений, согласно (13) и данных таблицы (колонки № 4 и 14), имеет следующий структурный состав интервалов биений:

$$T_{\max}^m = (2 + 2/3) \bar{T}_n. \quad (14)$$

В данном случае слешами окаймлены числа, указывающие на количество колебаний амплитуды результирующего сигнала за один интервал биения. Цифра 2, стоящая перед слешем 3, соответствует количеству интервалов с числом колебаний амплитуды суммарного акустического сигнала, равным трем. Разность между числом колебаний результирующего сигнала в интервалах биений никогда не превышает единицу.

Зависимость усредненного значения амплитуды несущей от временного интервала усреднения приведена в колонке № 5. Значения амплитуд биений и модулированной последовательности интервалов биений показаны в колонках № 9 и 13. В дан-

ном случае наблюдается значительное уменьшение амплитуды модулированных колебаний по отношению к амплитудам биений. Проведенные дополнительные исследования для многоуровневой модуляции последовательности интервалов биений показали следующее.

С увеличением уровня модуляции  $n$  происходит увеличение максимального периода модуляции огибающей и обратное этому процессу существенное уменьшение амплитуды этих колебаний, т. е.  $A_n^m \rightarrow 0$ .

Из этого следует, что доля вклада в общий процесс глобальной периодической составляющей при значительном увеличении ее периода будет стремиться к нулю, и периодичность процесса будет определяться периодичностью локальных модулированных колебаний последовательности интервалов биений результирующих колебаний.

Экспериментально выявлено, что наличие или отсутствие модуляции биений при суперпозиции близких по частоте и равных по амплитуде двух гармонических колебаний определяется отношением:

$$k = \frac{f_2}{f_2 - f_1} = \frac{k_2}{k_2 - k_1}. \quad (15)$$

Длительности интервалов биений, в общем случае, могут быть не равными по величине, и соотношения между ними, как показывают эксперименты, коррелированы с числом колебаний амплитуды суммарного сигнала в данных интервалах.

Эвристически установлено и экспериментально подтверждено, что число колебаний несущей в каждом интервале биения можно найти путем разложения значений числителя отношения (15) на совокупность целых чисел, разность между кото-

**Таблица.** Амплитуды и длительность биений для отношения частот акустических колебаний  $k=8/5$

$i$	$t$ , мс	$F_{\text{эк}}(t)$	$\bar{F}_n$ , Гц	$\bar{A}_n$	$j$	$F_{\text{max}}$	$T_b$ , мс	$A_b$	$b$	$F_{\text{max}}^m$	$T_{\text{max}}^m$ , мс	$A_{\text{max}}^m$	Структура $k_2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,69	1,8768	375,94	1,441	1	1,8768	4,48	0,9228	2	1,8768			
2	2,02	-1,0044	427,35	0,979									
3	3,03	0,0312	468,75	0,760		0,0312							
4	3,89	-0,6143	446,43	0,855									
5	5,17	1,6654	427,35	1,049	2	1,6654	7,23	0,7041	3	1,6654			
6	6,54	-1,9861	415,51	1,154									
7	7,91	1,3668	417,66	1,624		1,3668							
8	9,07	-0,2573	435,73	0,999									
9	9,87	0,2572	435,20	0,978		0,2572							
10	11,03	-1,3668	426,98	1,048									
11	12,4	1,9861	420,49	1,119	3	1,9861	7,23	0,6859	3	1,9861			
12	13,77	-1,6654	417,83	1,120									
13	15,05	0,6143	427,07	1,059		0,6143							
14	15,91	-0,0312	431,30	1,020									
15	16,92	1,0044	421,10	1,048		1,0044							
16	18,25	-1,8768	422,39	1,100							18,94	0,1603	(/2/+2/3/)
17	19,63	1,8768	419,34	1,12	4	1,8768	4,48	0,9228	2	1,8768			
18	20,96	-1,0044	422,93	1,087									
19	21,97	0,0312	429,09	1,047		0,0312							
20	22,83	-0,6143	426,98	1,051									
21	24,11	1,6653	423,56	1,088	5	1,6653	7,23	0,7041	3	1,6653			
22	25,48	-1,9861	420,49	1,115									
23	26,85	1,3667	420,94	1,102		1,3667							
24	28,01	-0,2573	426,74	1,066									
25	28,81	0,2572	426,91	1,056		0,2572							
26	29,97	-1,3668	424,14	1,08									
27	31,34	1,9860	421,61	1,108	6	1,9860	7,23	0,6859	3	1,9860			
28	32,71	-1,6654	420,42	1,109									
29	33,99	0,6143	424,6	1,082		0,6143							
30	34,84	-0,0312	426,5	1,063									
31	35,86	1,0044	424,66	1,075		1,0044							
32	37,19	-1,8768	422,39	1,1							18,94	0,1603	(/2/+2/3/)
33	38,57	1,8768	420,81	1,111	7	1,8768		0,9328		1,8768			
34	39,9	-1,0045	422,67	1,093									
35	40,91	0,0312	426,0	1,071		0,0312							

рыми не превышает единицу. Число членов разложения равно:  $k_2 - k_1$ . Значения членов разложения, составляющие числитель отношения (15), определяют компонентный состав по числу колебаний амплитуды несущей в каждом интервале биения.

Значения и количество членов разложения числителя  $k_2$  в отношении (15) можно определить по эвристически разработанному алгоритму:

1. Вычисляется частное от деления интервального коэффициента  $k_2$  на разность коэффициентов  $(k_2 - k_1)$ . Целое часть этого частного определяет минимальное число колебаний амплитуды суммарного сигнала  $q$ , кратно укладывающихся на интервале биения.
2. Величина числителя остатка от деления определяет число интервалов биений, в которых число результирующих колебаний превосходит минимальное  $q$  на единицу.
3. Число интервалов с  $q$  колебаниями амплитуды суммарного сигнала на приходящихся на  $R_2 - R_1$  интервалов биений определяется путем вычитания из разности  $(k_2 - k_1)$  числителя остатка от деления отношения (15).

Продолжая далее аналогичные операции с дробной частью остатка, путем деления его числителя на знаменатель остатка, приходим в конечном итоге к правильной цепной дроби, известной в математике как алгоритм Евклида [9]:

$$\frac{P_n}{Q_n} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{\frac{U_{n-1}}{U_n}}}}}, \quad (16)$$

где  $P_n/Q_n$  называется  $n$ -й подходящей дробью правильной цепной дроби;  $q_n = u_{n-1}/u_n$  — целочисленным знаменателем;  $u_{n-1}$  и  $u_n$  — остатками от деления, полученными на  $(n-1)$ -м и  $n$ -м шагах разложения рациональных чисел в цепную дробь.

Для выражения (16) справедливы следующие рекуррентные отношения:

$$\begin{aligned} P_n &= q_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned}$$

При этом полагают [9]:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q}{1}, \quad \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}, \quad \text{т. е. } P_0 = q, Q_0 = 1, P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0.$$

Исследования показали, что представление частот суммируемых колебаний в виде отношения  $k = f_2/(f_2 - f_1)$ , с последующим разложением их в правильные цепные дроби, позволяет вычислить значение подходящей дроби  $k_n = P_n/Q_n$  с заданной погрешностью приближения к исходному отношению.

Использование подходящей дроби для приближенного описания исходного отношения  $k$  осуществляется, когда минимальные значения коэф-

фициентов пропорциональности  $k_1$  и  $k_2$ , исчисляются тысячами или десятками тысяч. Точность описания исходного отношения частот  $k$  определяется желаемой погрешностью приближения:

$$\varepsilon = 100 \frac{|k - k_n|}{k}.$$

Например:  $k = \frac{29366}{3203} = 9,168279738$ . Раз-

ложим данное отношение по формуле (16). В этом случае приближенное значение  $k_n$  в зависимости от уровня приближения  $n$  примет следующие значения:

$$\begin{aligned} 1) \frac{46}{5} &= 9,2; \quad 2) \frac{55}{6} = 9,16666667; \\ 3) \frac{926}{101} &= 9,1683168; \quad 4) \frac{1907}{208} = 9,16826923 \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Соответственно погрешность приближенного описания отношения  $k$  будет равна:

$$\begin{aligned} 1) 0,345979 \% ; \quad 2) 0,017593 \% ; \quad 3) 0,000405 \% ; \\ 4) 0,0000114 \% \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Поскольку отношение  $k$  характеризует количество колебаний амплитуды суммарного сигнала, приходящегося на одно усредненное в общем случае колебание огибающей, то и значения подходящих дробей будут иметь тот же физический смысл. При этом степень приближения совокупности подходящих дробей к истинному отношению, описывающему реальный процесс, однозначно определяется уровнем учитываемой модуляции последовательности интервалов биений различной длительности, которая физически проявляется расширением нижней границы частотного диапазона исследуемого сигнала.

Вышеизложенное позволяет получить рекуррентную формулу, которая связывает период модуляции  $(k_2 - k_1)$  интервалов биения верхнего уровня с периодами модуляции последовательности интервалов биений, соответствующих нижним уровням:

$$\begin{aligned} T_1^m &= (q_1 - 1)T_{b=q} + T_{b=q+1} = [(q_1 - 1)q + (q + 1)]\bar{T}_n; \\ T_2^m &= q_2 T_1^m + T_{b=q}; \\ T_3^m &= q_3 T_2^m + T_1^m. \end{aligned} \quad (17)$$

Соответственно, период  $n$ -го уровня модуляции последовательности биений будет равен:

$$T_n^b = q_n T_{n-1}^b + T_{n-2}^b. \quad (18)$$

Каждый член последовательности (16), используемой в рекуррентной формуле (17, 18), несет определенный физический смысл, например:

- $q$  — минимальное число колебаний амплитуды результирующего сигнала, кратно укладывающееся на одном интервале биений;
- $(q+1)$  — максимальное число колебаний амплитуды результирующего сигнала, укладывающееся на одном интервале биений;

- $(q_1-1)$  – количество интервалов с числом колебаний  $q$ , приходящихся на один интервал биений с  $q+1$  колебаниями амплитуды суммарного сигнала;
- $q_2$  – количество периодов первого уровня модуляции биений, входящих в состав периода второго уровня модуляции огибающих суммарного сигнала.

Остальные коэффициенты имеют такой же смысл только для каждого последующего уровня модуляции биений.

Минимальная и максимальная длительность интервалов биений, из которых комплектуются модулированные колебания верхних уровней, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{b=q} &= q\bar{T}_n, \\ T_{b=q+1} &= (q+1)\bar{T}_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Значение среднего периода высокочастотного заполнения, выраженного через входные параметры суммируемых колебаний, получим, подставляя равенство (11) в (13):

$$\bar{T}_n = \frac{k_2 - k_1}{k_2(f_2 - f_1)}. \quad (20)$$

Приведем для сравнения с рассмотренным численным экспериментом результаты расчетов, полученных по формулам (16–20) для суммируемых тонов, отношения интервальных коэффициентов которых составляют 8/5.

$$\begin{aligned} q=2, q_1=1, q_2=2, \bar{T}_n &= 2,367 \text{ мс}, \bar{f}_n = 422,4 \text{ Гц}, \\ T_{b=2} &= 4,736 \text{ мс}, T_1^m = T_{b=3} = 7,102 \text{ мс}, f_1^m = 140,8 \text{ Гц}, \\ T_2^m = T_{\max}^m &= 18,94, f_2^m = f_{\min}^m = 52,8 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Сравнение численных экспериментальных значений периодов  $T_{b=2}$ ,  $T_{b=3}$  и  $T_{\max}^m$  (колонка № 8 и 12) с аналогичными параметрами, рассчитанными по формулам (18), (20) и (21), показывают, что погрешность вычисления указанных параметров уменьшается по мере увеличения длительностей регистрируемых периодичностей в поведении огибающей результирующего сигнала. Это наблюдается, в частности, и в рассматриваемом примере:

$$\varepsilon_{T_{b=2}} = 5,7 \%; \varepsilon_{T_1^m} = \varepsilon_{T_{b=3}} = 1,7 \%; \varepsilon_{T_2^m} = \varepsilon_{T_{\max}^m} = 0.$$

Существующее незначительное расхождение эксперимента с теорией в расчетах периодов биений  $T_{b=2}$  и  $T_{b=3}$  обусловлено наличием флуктуации среднего значения частоты относительно точного значения высокочастотной составляющей результирующего сигнала, рассчитанной на этих интервалах. Указанный фактор наблюдается в колонке № 4 таблицы, в то время как при теоретических расчетах несущая частота сигнала считается постоянной на всем временном промежутке модуляции последовательности интервалов биений.

Равенство нулю последней погрешности объясняется тем, что средняя частота колебаний амплитуды результирующего сигнала совпадает с ее точ-

ным значением на интервале времени, равном максимальному периоду модуляции огибающей.

Взаимосвязь верхнего уровня модуляции с компонентами нижнего уровня, определяющими структуру результирующего сигнала, описывается уравнением:

$$\begin{aligned} T_{\max}^m = T_2^m &= \{q_2[(q_1-1)q + (q+1)] + q\}\bar{T}_n = \\ &= (2/2 + 2/3)\bar{T}_n. \end{aligned} \quad (21)$$

Сравнение равенств (14) и (21) показывает, что они идентичны по своей структуре.

Таким образом, применяя аппарат цепных дробей, не проводя численных экспериментов, можно теоретически исследовать структуру и частотные характеристики сигналов, являющихся суперпозицией парных гармонических составляющих. В подтверждение сказанному, исследуем структуру, частотные и временные характеристики сигнала, изображенного на рисунке, с.

Разложим отношение  $k=k_2/(k_2-k_1)$  в правильную цепную дробь. По формуле (16) определяем параметры цепной дроби:  $q=2$ ,  $q_1=2$ ,  $q_2=7$ . Подставляя данные параметры в равенства (18–21), найдем временные и частотные характеристики, а также структуру сигнала, образованного суперпозицией гармонических колебаний с частотами, равными  $f_1=220$  Гц и  $f_2=370$  Гц:

$$\begin{aligned} \bar{T}_n &= 2,703 \text{ мс}, \bar{f}_n = 370 \text{ Гц}, \bar{T}_{b=2} = 5,405 \text{ мс}, \\ \bar{f}_{b=2} &= 185 \text{ Гц}, \bar{T}_{b=3} = 8,108 \text{ мс}, \bar{f}_{b=3} = 123,33 \text{ Гц}, \\ T_1^m &= (2/2 + 3/3) \cdot \bar{T}_n = 13,513 \text{ мс}, f_1^m = 74 \text{ Гц}, \\ T_{\max}^m = T_2^m &= [7(2/2 + 3/3) + 2/2] \bar{T}_n = 0,1 \text{ с}, \\ f_{\min}^m = f_2^m &= 10 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Анализ аналитических расчетов, сделанных с помощью аппарата цепных дробей, указывает на наличие в рассматриваемом сигнале двух низкочастотных периодических процессов, обуславливающих модуляцию интервалов огибающей с частотой 74 и 10 Гц. Частота колебания огибающей последовательно изменяется с 123,33 на 185 Гц и обратно относительно средней частоты биения, равной разности частот суммируемых колебаний:  $f_2-f_1=150$  Гц.

## Выводы

В отличие от сложившегося в научном мире традиционного мнения, что частота биений, возникающих при суперпозиции близких по частоте гармонических колебаний, всегда равна разности частот этих колебаний, проведенные исследования показали следующее:

1. Данное утверждение справедливо только в частном случае, когда разность коэффициентов пропорциональности суммируемых частот равна единице.
2. В остальных случаях наблюдается одно- или многоуровневая модуляция последовательности интервалов биений с различной длительно-

стью, в зависимости от соотношения частот. Как правило, глобальная периодичность процесса сопровождается возникновением локальных периодичностей, образованных совокупностью интервалов биений, последовательность которых модулирована определенным образом.

3. Разность частот суммируемых колебаний в указанных случаях равна средней частоте биений, усредненной на интервале времени, равном максимальному периоду модуляции последовательности интервалов биений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельмгольц Г. Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. – СПб.: Типография товарищества «Общественная польза», 1875. – 591 с.
2. Гоноровский И.С. Частотная модуляция и ее применения. – М.: Изд-во литературы по вопросам связи и радио, 1948. – 476 с.
3. Попов А.Н. Математический анализ биений. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 31 с.
4. Гнусов К.С., Савинов А.П. Экспериментальное исследование условий возникновения низкочастотной модуляции биения огибающей // Современная техника и технологии: Труды XIII Междунар. научно-практ. конф. молодых ученых. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – Т. 2. – С. 316–318.
5. Пономарева И.Д., Цепков Г.В. Сверхбыстрый спектральный анализ // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 107–114.
6. Пономарева И.Д., Карпенко А.В., Цепков Г.В. Адаптивный секвентный базис в задачах фильтрации случайных сигналов // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 2. – С. 82–87.
7. Ирисов А.С. Звук и музыка. – М.: Госиздат, 1926. – 41 с.
8. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 20 с.
9. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / под ред. Л.А. Люстерника и А.Р. Янпольского. – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1961. – 266 с.

Выявленная закономерность будет наблюдаться там, где происходят биения, возникающие при суперпозиции гармонических колебаний, близких по частоте, в частности, в электрических сигналах.

Предложенная методика, основанная на использовании математического аппарата цепных дробей, позволяет, не проводя численных экспериментов, получить аналитическим путем информацию о компонентной структуре результирующего сигнала, о локальных и глобальных периодичностях в поведении огибающей и их частотах, если таковые имеются.

*Поступила 26.10.2009 г.*