

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В КАНАЛЕ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ: ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Рыженьков Владимир Олегович¹,

v.o.ryzhenkov@gmail.com

Иващенко Владислав Александрович¹,

vladivashchenko@mail.ru

Мулладжанов Рустам Илхамович^{1,2},

rustammul@gmail.com

¹ Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

² Институт теплофизики СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1.

Актуальность: турбулентные течения жидкости и газа реализуются во многих инженерных приложениях. В частности, транспортировка нефти и газа по трубопроводам, которая достигает 12 % в структуре энергопотребления нефтедобычи, осуществляется при высоких числах Рейнольдса, т. е. в турбулентном режиме. Задача контролировать и управлять характеристиками турбулентных потоков является крайне актуальной как с научной, так и с экономической точки зрения. Развивающиеся компьютерные технологии делают методы численного моделирования перспективными для решения подобных оптимизационных задач.

Цель работы. Для аккуратного численного расчета уравнений Навье–Стокса, особенно при высоких числах Рейнольдса, необходимо использовать разностные схемы с низкой диссипацией, т. е. высокого порядка точности аппроксимации. Хорошим методом для пространственной дискретизации является метод спектральных элементов. В работе вышеобозначенным методом рассчитывается каноническое турбулентное течение в прямоугольном канале. Цель работы состоит в исследовании точности метода спектральных элементов при расчете отфильтрованных уравнений Навье–Стокса с замыканием подсеточных напряжений при помощи пространственной динамической модели Смагоринского.

Методы. Для численного исследования используется открытый пакет программ Nek5000 для расчета дифференциальных уравнений в частных производных при помощи метода спектральных элементов. Этот код использует неструктурированные гексаэдральные расчетные сетки и протокол MPI для ускорения вычислений в мультипроцессорном режиме.

Результаты. Проведено исследование турбулентного течения в канале при числах Рейнольдса 2800 и 6800. Результаты прямого численного моделирования (DNS) уравнений Навье–Стокса и моделирования методом крупных вихрей (LES) очень хорошо согласуются с профилями средней скорости, температуры и их пульсаций из литературных данных. Даже для самых грубых расчетных сеток с количеством узлов в 25–30 раз меньшим, чем у DNS, удалось очень точно воспроизвести пик пульсаций скорости около стенки, соответствующий полосатым когерентным вихревым структурам. Как следствие, скорость трения предсказывается с погрешностью <3,0 %, что указывает на перспективность использования метода спектральных элементов.

Ключевые слова:

Прямое численное моделирование, метод крупных вихрей, турбулентность, когерентные структуры, оценка погрешности.

Введение

Турбулентный режим течения жидкости и газа часто встречается в природных явлениях и практических приложениях. Сложность данного явления состоит в наличии в турбулентном потоке широкого спектра характерных масштабов, которые нелинейно взаимодействуют между собой [1]. Проблема становится еще более сложной, когда поток стеснен наличием поверхности. Твердая стенка существенно меняет свойства турбулентности, в которой добавляются новые характерные масштабы длины и скорости. Особенно сильно меняются свойства потока в узком слое у стенки, который, тем не менее, определяет свойства потока и при удалении от неё. К примеру, в сфере добычи и переработки ресурсов широко используются трубопроводы. Вопрос эффективного массопереноса является актуальной научной и экономической задачей [2–8]. Согласно работе [3] в структуре энерго-

потребления нефтедобычи по технологическим процессам подготовка и транспортировка нефти и газа составляет около 12 %. Очевидно, что оптимальное управление характеристиками турбулентного потока, а именно величиной трения о стенку, при прохождении жидкости и газа через транспортировочный канал позволит существенно снизить общее энергопотребление нефтедобычи. Для развития различных моделей турбулентности и получения новой фундаментальной информации о рассматриваемом явлении нередко используется численное моделирование канонических пристенных турбулентных потоков [9–12]. В практических ситуациях исследуемая в потоке среда является многофазной, что значительно усложняет процесс ее моделирования [13, 14].

Движение жидкости и газа описывается системой уравнений Навье–Стокса. На сегодняшний день становится возможным использование пря-

мого численного моделирования (direct numerical simulations, DNS) уравнений движения даже для прикладных задач при умеренных скоростях движения среды. Очевидным недостатком данного подхода является его высокая вычислительная стоимость, поскольку характерный шаг расчетной сетки по пространству должен быть сравним с масштабом Колмогорова, а шаг по времени – с характерным временем оборота наименьшего вихря. Таким образом, количество степеней свободы в турбулентном потоке растет примерно как Re^3 [1], где число Рейнольдса $Re=UH/\nu$ есть безразмерный критерий, построенный по характерной скорости задачи U , размеру H и кинематической вязкости среды ν . С другой стороны, традиционным является подход осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-averaged Navier–Stokes, RANS), когда к уравнениям Навье–Стокса применяется операция осреднения по ансамблю, которую часто принимают как осреднение по времени. В результате решения такой задачи получаются осредненные характеристики течения. Вычислительная стоимость обычно оказывается на несколько порядков ниже, чем у DNS, поэтому RANS-подходы часто используются для инженерных оценок. Промежуточным по вычислительным затратам является метод крупных вихрей (Large-eddy simulation, LES), при котором к уравнениям Навье–Стокса применяется операция пространственной низкочастотной фильтрации. Получающиеся после этой процедуры уравнения описывают динамику вихрей, масштабы которых больше ширины фильтра, а влияние движения на меньших масштабах выражается в появлении дополнительного слагаемого – подсеточных напряжений. Для замыкания подсеточных напряжений используются дополнительные модели.

Существуют различные подходы для дискретизации уравнений в частных производных, такие как метод конечных разностей, конечных объемов и конечных элементов. В последнее время для уравнений Навье–Стокса часто используется метод спектральных элементов (МСЭ) [15], который является разновидностью метода конечных элементов. Уравнения Навье–Стокса интегрируются по некоторым контрольным объемам, на которые предварительно разделена рассматриваемая область. Внутри каждого объема искомые функции задачи раскладываются в ряд по полиномам (Чебышева, Лежандра и т. д.). Спектральная точность метода обуславливается использованием достаточно большого числа полиномов (около 10 и более). Таким образом, МСЭ совмещает в себе высокую точность и возможность использования неструктурированных расчетных сеток для сложных геометрий задачи.

Как уже упоминалось выше, при использовании метода крупных вихрей в отфильтрованных уравнениях Навье–Стокса появляются неизвестные подсеточные напряжения, которые необходи-

мо моделировать. Кроме того, при выводе уравнений предполагается, что операция фильтрации коммутирует с производной по пространству, что справедливо только для однородной функции фильтра. При этом в подходе неявного метода крупных вихрей, который используется большинством исследователей, точный вид пространственного фильтра не определяется. Таким образом, мы обозначим ли два возможных источника ошибки, которые вносят вклад в конечное решение. Помимо этого возникают ошибки, связанные с дискретизацией рассматриваемых дифференциальных уравнений и сходимостью выбранного итеративного процесса. Конечное решение уравнений выбранной математической модели включает в себя нелинейное взаимодействие ошибок всех трёх типов. В данной работе мы численно исследуем турбулентное течение в канале для различных чисел Рейнольдса при помощи метода крупных вихрей, замыкая подсеточные напряжения широко используемой динамической моделью Смагоринского [16]. Для того чтобы минимизировать ошибки дискретизации, применяется высокоточный метод спектральных элементов. Результаты расчетов методом крупных вихрей сравниваются с результатами прямого численного моделирования и данными из литературы. Таким образом, удаётся определить зависимость совокупной ошибки вычисления таких параметров, как трение и тепловой поток на стенке канала, от величины расчетных узлов вычислительной сетки. Эта информация необходима для оценок погрешностей расчетов турбулентных потоков при помощи метода спектральных элементов.

Уравнения движения и их дискретизация

Дифференциальные уравнения, описывающие тепломассоперенос в рассматриваемой задаче, представляют собой законы сохранения импульса, массы и уравнение на перенос температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)U &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 U + f, \\ \nabla U &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (U\nabla)T &= \frac{1}{Pe} \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (1)$$

где U , p и T есть безразмерные поля скорости, давления и температуры соответственно. Вектор f обозначает стороннюю силу. Безразмерные параметры задачи включают в себя число Рейнольдса, определенное во введении, и число Пекле, $Pe=UH/a$, где a есть температуропроводность среды, при этом число Прандтля $Pr=Pe/Re=\nu/a=1.0$.

Система дифференциальных уравнений (1), дополненная соответствующими начальными и граничными условиями, используется в случае прямого численного моделирования. В методе моделирования крупных вихрей к уравнениям (1) применяется процедура пространственной низкочастот-

ной фильтрации, обозначенная волной над символом:

$$U(x,t) = \int G(x-r)U(r,t)dr, \quad (2)$$

где G есть функция фильтра, которая обычно явно не определяется. Если принять, что операция фильтрации коммутирует с производной по пространству, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)U &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 U - \nabla \tau + f, \\ \nabla U &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (U\nabla)T &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 T - \nabla q, \end{aligned} \quad (3)$$

где τ обозначает тензор подсеточных напряжений, а \tilde{q} соответствует подсеточному потоку тепла:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= U_i U_j - U_i U_j, \\ q &= UT - UT. \end{aligned} \quad (4)$$

В данной работе тензор подсеточных напряжений выражается при помощи гипотезы Буссинеска:

$$\tau_{ij} - \tau_{kk} \delta_{ij} / 3 = -2(C_s \Delta)^2 \sqrt{2S_{nm} S_{nm}} S_{ij}, \quad (5)$$

где δ_{ij} – дельта-функция Кронекера; C_s – константа Смагоринского, определяемая в соответствии с динамической процедурой [16], является функцией времени и пространства; Δ – ширина фильтра, определяемая как наибольшее расстояние между точками Гаусса–Лобатто–Лежандра в физическом пространстве в данном спектральном элементе. Тензор скоростей деформации выражается следующим образом:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

В данной работе мы не использовали никакой подсеточной модели для \tilde{q} , таким образом $\tilde{q}=0$. Далее мы опустим волну над символами для обозначения операции фильтрации, так что переменные из DNS- и LES-расчетов будут выглядеть единообразно.

Для численного решения уравнений (1) и (3) использовался открытый вычислительный код Nek5000, описанный в [17]. Данный код основан на методе спектральных элементов и взвешенных невязок, как и в методе конечных элементов, при котором вычислительная область разбивается на элементы конечных объемов. Поле скорости, давления и температуры в каждом элементе представляется как полином высокого порядка. В качестве базисных функций используются интерполанты многочленов Лагранжа в узлах Гаусса–Лобатто–Лежандра. Из условия ортогональности невязки к базисным функциям получается однородная система уравнений для коэффициентов в разложении, что позволяет получить решение. В данной работе использовались полиномы порядка $N=7$. Дискретизация по времени производилась

при помощи конечно-разностной аппроксимации с третьим порядком точности.

Постановка задачи

Исследуется турбулентное течение жидкости между двумя бесконечными параллельными стенками при числе Рейнольдса $Re=2800$ и 6800 , построенное по среднерасходной скорости U_b и полуширине канала H . Используется прямоугольная вычислительная область размером $L_x \times L_y \times L_z = 2\pi H \times 2H \times \pi H$ (рис. 1), где x – это продольная координата (вдоль течения), ось y направлена поперек твердых стенок, z – вдоль стенок, но поперек потока. Отметим, что начало координат с $y=0$ расположено в центре канала, так что позиция $y=\pm H$ соответствует стенкам канала. Бесконечная область моделируется наложением периодических граничных условий по направлению x и z . На твердых стенках реализуется условие прилипания для скорости ($U=0$) и постоянные значения температуры для горячей верхней ($T=T_h$) и холодной нижней поверхности ($T=T_c$), причем $\Delta T=T_h-T_c$. Линейные размеры вычислительной области должны быть больше всех характерных когерентных вихревых структур в потоке. Двухточечные корреляции скорости, вычисленные в предыдущих расчетах [18, 19], показывают, что данные размеры области вполне достаточны. Сторонняя сила в уравнениях (1) и (3) определяется так, чтобы поддерживать постоянным расход жидкости через плоскость $y-z$, соответствующий выбранному числу Рейнольдса. Далее в тексте и на графиках все величины обезразмерены при помощи U_b , ΔT , H , если не оговорено иначе.

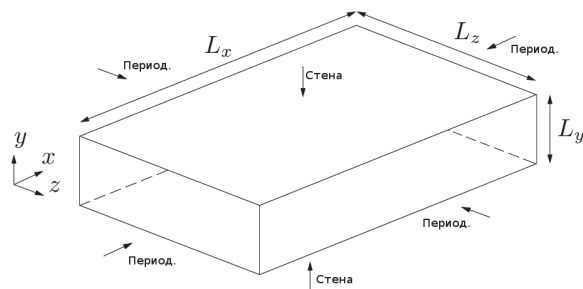


Рис. 1. Геометрия канала и граничные условия

Fig. 1. Geometry of the channel and boundary conditions

При инициализации численного интегрирования, т. е. в момент времени $t=0$, продольное поле скорости задавалось аналитическим профилем $U_x=5(1-y^4)/4$, а температура $T=(1+y)/2$. Кроме того, ко всем компонентам поля скорости в каждой точке пространства добавлялась случайная величина амплитудой не более 5 % от среднерасходной скорости, для того чтобы ламинарный поток турбулизовался. Статистический анализ характеристик течения для каждого расчета начинался после достаточного промежутка времени вычислений, чтобы на осредненные по времени характеристики не влияли начальные переходные процессы.

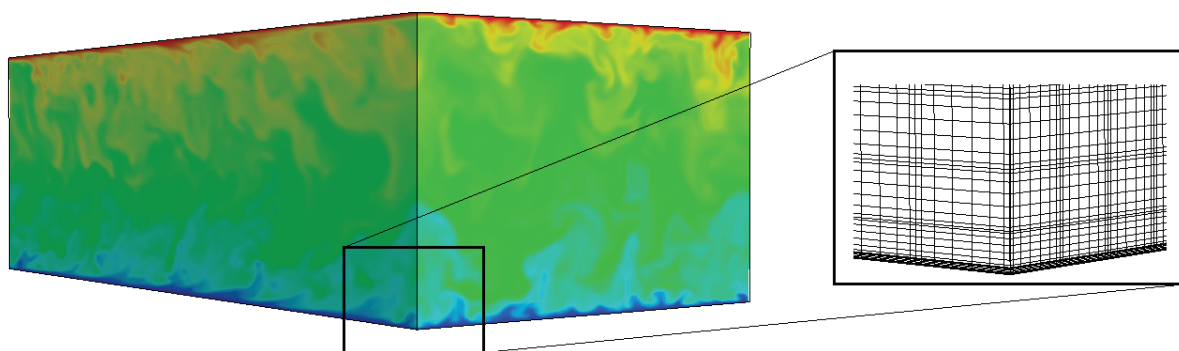


Рис. 2. Мгновенное поле температуры, полученное при помощи прямого численного моделирования при $Re=6800$. Поток жидкости течет слева направо. Сверху – горячая стенка, снизу – холодная. Справа показана небольшая часть вычислительной сетки

Fig. 2. Instantaneous temperature field from DNS at $Re=6800$. The flow goes from left to right. The hot wall is on top, the cold is in the bottom. The inset on the right shows a small fragment of computational mesh

На рис. 2 показано мгновенное поле температуры потока жидкости, текущего слева направо, которое получено при помощи прямого численного моделирования при $Re=6800$. Видно, как пристенные турбулентные вихревые структуры организуют перемешивание холодной и горячей жидкости.

В табл. 1 и 2 для двух чисел Рейнольдса показаны характеристики использованных расчетных сеток для прямого численного моделирования и моделирования методом крупных вихрей, где N_{se} – количество спектральных элементов вдоль каждого направления (x, y, z) , N_{points} – количество узлов вдоль каждого направления (x, y, z) и N_{tot} – общее количество узлов. В представленных расчетах использовались структурированные прямоугольные (гексагональные) вычислительные сетки.

Таблица 1. Характеристики расчетных сеток для $Re=2800$

Table 1. Mesh characteristics for $Re=2800$

	DNS	LES1	LES2	LES3
N_{se}	30×20×25	20×14×17	15×10×12	10×6×8
N_{points}	211×141×176	141×99×120	106×71×85	71×43×57
N_{total} (млн)	5,2	1,7	0,6	0,17

Таблица 2. Характеристики расчетных сеток для $Re=6800$

Table 2. Mesh characteristics for $Re=6800$

	DNS	LES1	LES2	LES3
N_{se}	40×30×30	26×20×20	20×16×16	14×10×10
N_{points}	281×211×211	183×141×141	141×113×113	99×71×71
N_{total} (млн)	12,5	3,6	1,8	0,5

Основные результаты

Поскольку цель работы заключается в определении точности расчетов рассматриваемого пристенного турбулентного течения при дискретизации уравнений Навье–Стокса методом спектральных элементов в совокупности с динамической мо-

делью Смагоринского для метода крупных вихрей, сравниваются осредненные по времени поля скорости, температуры и их пульсации с данными из литературы. Анализируемые осредненные поля вычисляются в каждой точке расчетной области следующим образом:

$$\bar{U}_i = \frac{1}{N} \sum U_i(t_n), \quad \overline{u_i u_j} = \frac{1}{N} \sum (\overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j),$$

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum T(t_n), \quad \overline{\theta \theta} = \frac{1}{N} \sum (\overline{TT} - \bar{T} \bar{T}),$$

$$\overline{u_i \theta} = \frac{1}{N} \sum (\overline{U_i T} - \bar{U}_i \bar{T}),$$

где t_n – это последовательные моменты времени в расчете. Поскольку в рассматриваемой задаче направления вдоль x и z однородны, то можно производить соответствующее осреднение по пространству. Таким образом, осредненные по времени и пространству профили рассматриваемых величин являются функциями только координаты y . На рис. 3 показано сравнение результатов текущих расчетов при $Re=6800$ для профиля средней продольной скорости и температуры поперек канала с данными из литературы [20, 21]. Профиль скорости, полученный при помощи DNS и LES на различных расчетных сетках, отлично согласуется с данными авторов [20], которые использовали полностью спектральный код, основанный на полиномах Чебышева по y и Фурье по x и z .

При огрублении сетки визуально сложно заметить существенные различия даже для расчета LES3, сетка которого использует в 25 раз меньше расчетных узлов, чем для DNS (табл. 2). Профиль температуры также показывает хорошее согласование между результатами DNS и LES, однако согласие с данными из литературы [21] несколько хуже, чем для скорости. Причинами этого несоответствия могут быть различные факторы, такие как небольшое отличие в числе Прандтля ($Pr=1,0$ в текущих расчетах и $Pr=0,71$ у авторов

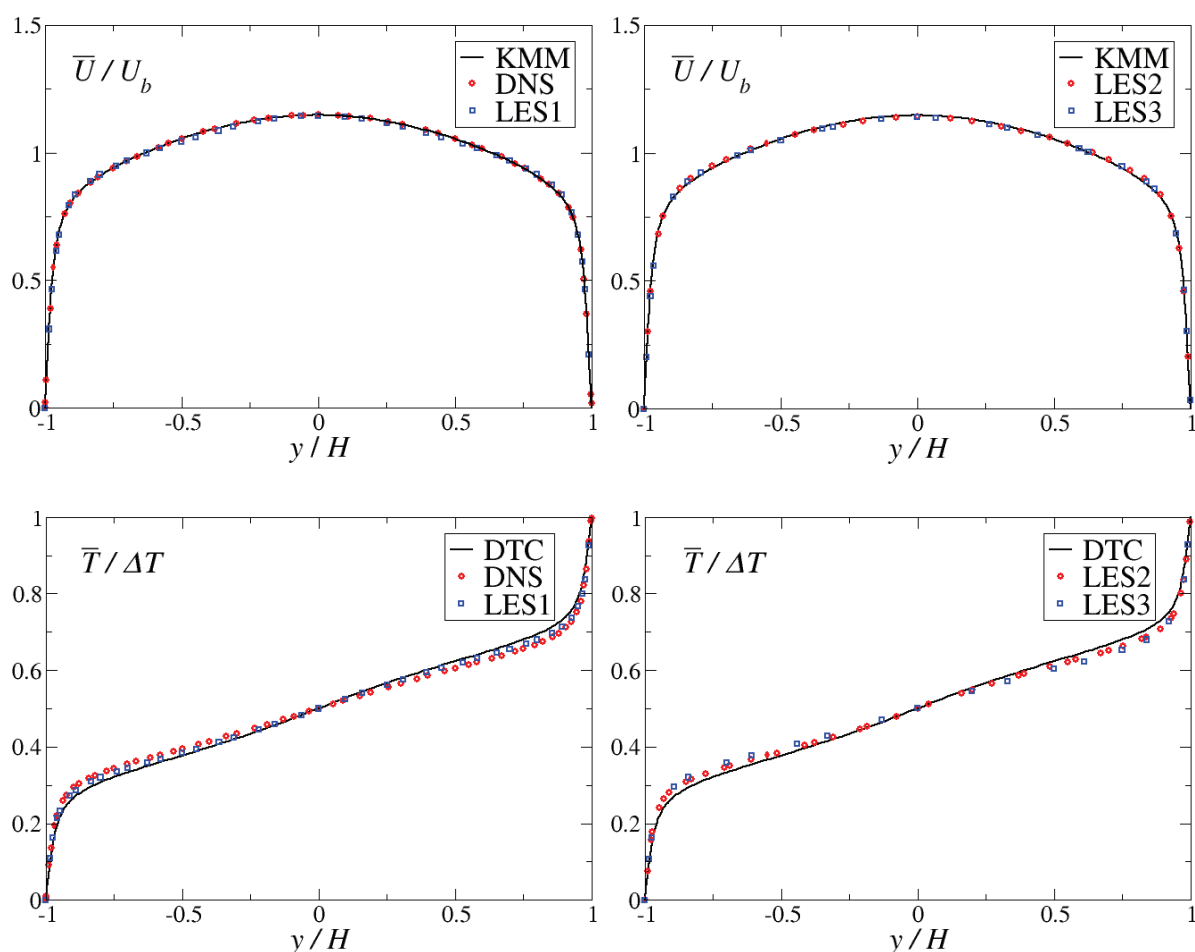


Рис. 3. Сравнение профилей средней скорости и температуры с литературными данными [20, 21] для $Re=6800$

Fig. 3. Comparison of the time-averaged velocity and temperature profiles with the data from [20, 21] at $Re=6800$

[21]), порядок аппроксимации (спектральный в наших расчетах и второй порядок точности в [21]). Кроме того, важным фактором может быть продолжительность времени расчета, в течение которого производится осреднение полей.

На рис. 4 приведено сравнение пульсаций скорости и температуры с данными из литературы. Видно, что DNS показывает отличное согласие, в то время как данные LES могут немного отклоняться от результатов авторов [20].

Важным фактом является хорошее предсказание пика пульсаций около стенки даже для самой грубой сетки (LES3). Этот пик является результатом существования характерных когерентных полосчатых структур в пристенных турбулентных потоках, правильное описание которых является залогом успешного моделирования характеристик течения далеко от стенки. На рис. 5 показаны мгновенные поля продольной скорости около стенки ($y/H=0,95$) в плоскости $x-z$, где пульсации достигают максимума. Видно, что на всех вычислительных сетках полосчатые структуры выглядят очень похоже, несмотря на существенные различия в пространственном разрешении. Правильное

описание структуры турбулентности около стенки позволяет точно рассчитывать такие характеристики, как трение и тепловой поток на твердой стенке. В табл. 3 для всех расчетов представлена скорость трения, которая вычисляется на стенке канала как

$$U_\tau = \sqrt{v \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y}}.$$

Видно, что эта величина монотонно

отклоняется от точного значения (DNS) при уменьшении численного разрешения. Тем не менее можно утверждать, что даже для самой грубой LES-сетки скорость трения предсказана с погрешностью $< 3,0 \%$, что является отличным показателем для инженерных приложений.

Таблица 3. Сравнение величины скорости трения U_τ

Table 3. Comparison of the friction velocity U_τ

Re	[18, 20]	DNS	LES1	LES2	LES3
2800	0,06398	0,06397	0,06392 (-0,1%)	0,06338 (-0,9%)	0,06322 (-1,2%)
6800	0,05699	0,05695	0,05682 (-0,3%)	0,05613 (-1,5%)	0,05546 (-2,7%)

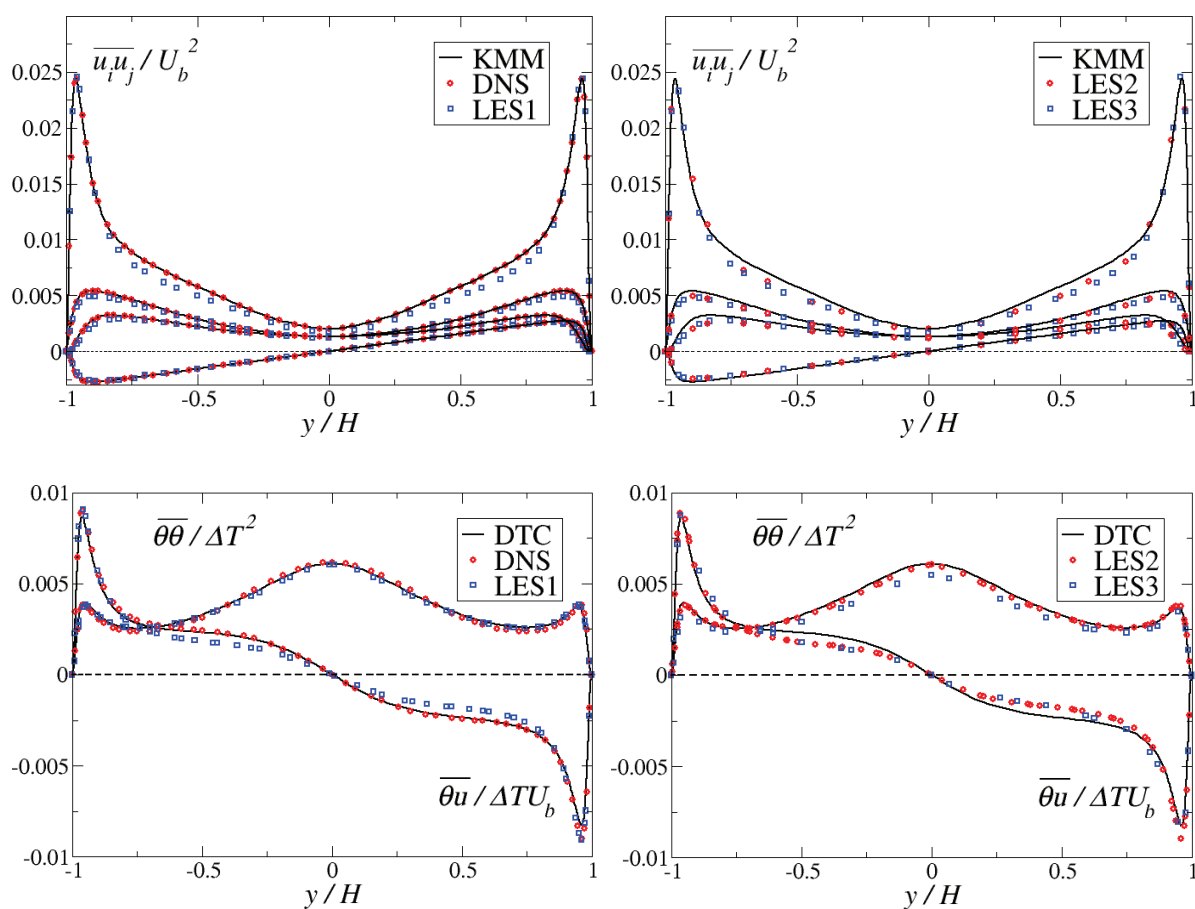


Рис. 4. Сравнение пульсаций скорости и температуры с литературными данными [20, 21] для $Re=6800$

Fig. 4. Comparison of the time-averaged velocity and temperature fluctuations with the data from [20, 21] at $Re=6800$

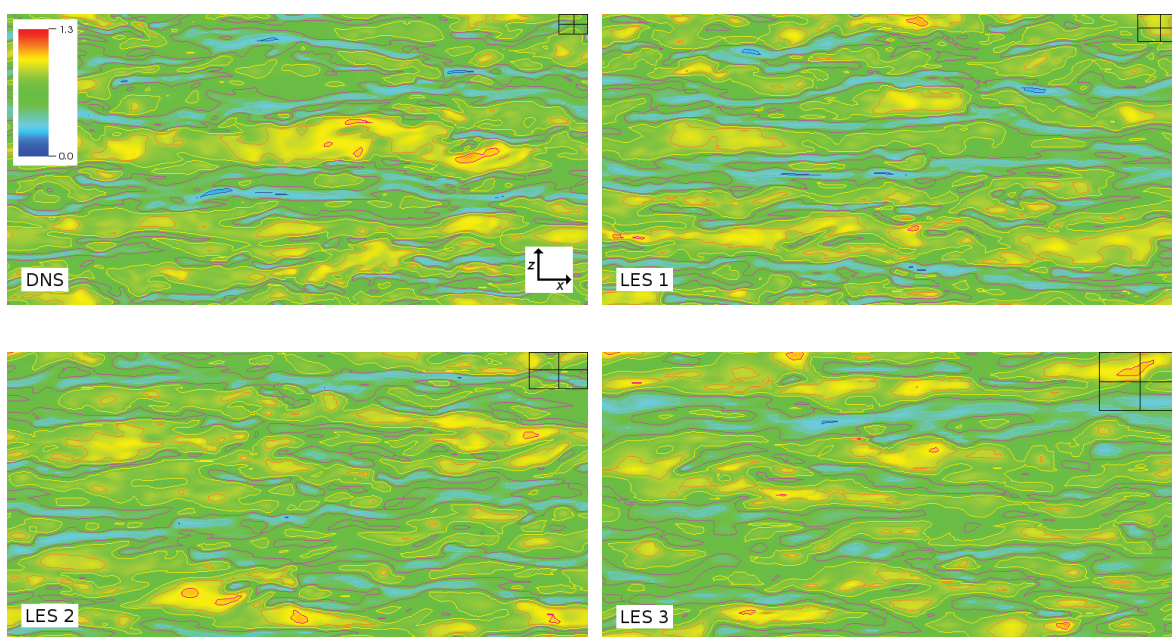


Рис. 5. Мгновенное поле скорости в сечении x - z около стенки при $y/H=0,95$ для DNS и LES. В правом верхнем углу схематически показаны границы четырех спектральных элементов

Fig. 5. Instantaneous velocity field in x - z plane near the wall at $y/H=0,95$ for DNS and LES. In the right top corner four spectral elements are shown schematically

Заключение

В данной работе исследовалась точность метода спектральных элементов при расчете отфильтрованных уравнений Навье–Стокса с замыканием подсеточных напряжений при помощи распространенной динамической модели Смагоринского. Для канонического турбулентного течения, ограниченного двумя параллельными твердыми стенками, при числе Рейнольдса 2800 и 6800 расчеты показали отличное согласие данных прямого численного моделирования и моделирования методом крупных вихрей. Получено хорошее согласие для профилей средней скорости, температуры и их пульсаций. Показано, что на всех уровнях моделирования очень

точно воспроизводится пик пульсаций скорости около стенки, который соответствует полосчатым когерентным вихревым структурам. Выявлено, что на LES-сетке, которая имеет в 25–30 раз меньше вычислительных узлов, чем соответствующая DNS-сетка, скорость трения предсказывается с погрешностью < 3,0 %. Это указывает на перспективность использования метода спектральных элементов для дискретизации уравнений Навье–Стокса для фундаментальных и прикладных задач.

Работы выполнены при финансовой поддержке РФФ гранта № 14–29–00203. Авторы благодарны Сибирскому суперкомпьютерному центру за предоставленные вычислительные ресурсы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. – М.: Наука, 1965. – 640 с.
2. Kharlamov S.N., Alginov R.A. Modelling of complex shear flow structure in pipelines // Int. J. Eng. Sci. Innov. Tech. – 2014. – V. 3. – № 6. – P. 500–509.
3. Ивановский В.Н. Энергетика добычи нефти: основные направления оптимизации энергопотребления // Инженерная Практика. – 2011. – Т. 6. – С. 18–26.
4. Трубопроводные системы энергетики: математическое моделирование и оптимизация / под ред. Н.Н. Новицкого, А.Д. Тевяшева. – Новосибирск: Наука, 2010. – 419 с.
5. Погосов А.Ю., Положаенко С.А., Григоренко Ю.В. Моделирование физических процессов и технологическая информатизация в нефтяной промышленности и энергетике: монография. – Одесса: Наука и техника, 2014. – 656 с.
6. Малая распределенная энергетика России: совместная разработка тепло- и электроэнергетики / А.В. Казаков, А.С. Загорин, П.Ю. Новосельцев, Р.Б. Табакаев // Вестник науки Сибири. – 2013. – № 4 (10). – С. 13–18. URL: <http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/806/564> (дата обращения: 20.04.2016).
7. Экспериментальное исследование и физико-математическое моделирование процесса остывания нефти в подземном трубопроводе / В.Н. Кутрунов, П.Ю. Михайлов, Л.А. Пульда, А.А. Вакулин, М.Н. Вилков // Вестник Тюменского государственного университета. – 2012. – Т. 4 – С. 61–67.
8. Бубенчиков А.М., Харламов С.Н. Математические модели неоднородной анизотропной турбулентности во внутренних течениях. – Томск: Изд-во ТГУ, 2001. – 440 с.
9. Никитин Н.В. Статистические характеристики пристенной турбулентности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – Т. 3. – С. 32–43.
10. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1994. – Т. 6. – С. 14–26.
11. Никитин Н.В. Прямой расчет турбулентных течений в эксцентрических трубах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – № 3. – С. 509–526.
12. Тевяшев А.Д., Смирнова В.С. Математическое моделирование нестационарного неизотермического течения газа по участку трубопровода // Радиоэлектроника и Информатика. – 2008. – Т. 2. – С. 21–27.
13. Varaksin A.Yu. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: Problems and achievements // High Temp. – 2014. – V. 51. – № 3. – P. 377–407.
14. Терехов В.И., Пахомов М.А. Численное исследование гидродинамики, тепло- и массообмена двухфазного газопарокапельного потока в трубе // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44. – № 1. – С. 108–122.
15. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics – Laminar flow in a channel expansion // J. Comp. Phys. – 1984. – V. 54. – № 3. – P. 468–488.
16. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model / M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W.H. Cabot // Phys. Fluids. – 1991. – V. 3. – № 7. – P. 1760–1766.
17. Fischer P., Lottes J., Kerkemeier S. Nek5000 web page. 2016. URL: <http://nek5000.mcs.anl.gov> (дата обращения: 23.04.2016).
18. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 177. – P. 133–166.
19. Kim J., R. Antonia A. Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number // J. Fluid Mech. – 1993. – V. 251. – P. 219–238.
20. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Re=590 // Phys. Fluids. – 1999. – V. 11. – № 4. – P. 943–945.
21. Structures of scalar transport in a turbulent channel / S. Dharmathne, M. Tutkun, G. Araya, L. Castillo // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2016. – V. 55. – P. 259–271.

Поступила 26.04.2016 г.

Информация об авторах

Рыженьков В.О., магистрант Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

Иващенко В.А., студент Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

Мулладжанов Р.И., кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института теплофизики СО РАН; научный сотрудник Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

UDC 532.517.4

NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW AND HEAT TRANSFER IN A CHANNEL BY THE SPECTRAL ELEMENT METHOD: SPATIAL RESOLUTION EFFECT

Vladimir O. Ryzhenkov¹,
v.o.ryzhenkov@gmail.com

Vladislav A. Ivashchenko¹,
vladivashchenko@mail.ru

Rustam I. Mullyadzhonov^{1,2},
rustammul@gmail.com

¹ Novosibirsk State University,
2, Pirogov street, Novosibirsk, 630090, Russia.

² Institute of Thermophysics SB RAS,
1, Lavrentyev street, Novosibirsk, 630090, Russia.

Relevance. Turbulent flows are readily met in a variety of engineering applications. In particular, oil and gas transport through pipelines, reaching 12 % of the oil-related power consumption, is performed at very high Reynolds numbers, i. e. in the turbulent regime. Control of turbulent flow characteristics is the problem of high importance both from scientific and economical point of view. Rapidly developing computing capabilities make the numerical modeling a promising tool to solve various engineering optimization tasks.

The aim of the research. For accurate numerical solution of the Navier–Stokes equations especially at high Reynolds numbers it is necessary to use numerical schemes with low dissipation, i.e. with a high order of approximation. A good method for spatial discretization is the spectral element method (SEM). In the work a canonical turbulent flow in a plane channel is simulated with SEM. The main aim of the research is to investigate the accuracy of SEM when applied to the filtered Navier–Stokes equations closed with the use of the dynamic Smagorinsky model.

Methods. For numerical simulations of partial differential equations with SEM the authors have used the open-source code Nek5000 which employs unstructured hexahedral meshes and MPI for parallel computing.

Results. The authors carried out the numerical computations of the turbulent channel flow at the Reynolds numbers 2800 and 6800. The results of the direct numerical simulation (DNS) of the Navier–Stokes equations and Large eddy simulations (LES) are in good agreement with the data from the literature, i. e. the profiles of the time-averaged velocity, temperature and their fluctuations. Even for very coarse LES mesh with 25–30 times less grid points than for DNS the accuracy of the fluctuations profile near the wall representing streaky structures is very high. As a result the friction velocity is predicted within the <3,0 % error indicating promising prospects for SEM.

Key words:

Direct numerical simulations, Large eddy simulations, turbulence, coherent structures, error assessment.

The research was financially supported by the RSF grant no. 14–29–00203. The authors acknowledge Siberian Supercomputer Center for the provided computing resources.

REFERENCES

1. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statisticheskaya gidrodinamika* [Statistical hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 640 p.
2. Kharlamov S.N., Alginov R.A. Modelling of complex shear flow structure in pipelines. *Int. J. Eng. Sci. Innov. Tech.*, 2014, vol. 3, no. 6, pp. 500–509.
3. Ivanovskiy V.N. Oil production energy: the main directions of optimization of energy consumption. *Oilfield Engineering*, 2011, vol. 6, pp. 18–26. In Rus.
4. *Truboprovodnye sistemy energetiki: matematicheskoe modelirovaniye i optimizatsiya* [Pipeline energy systems: mathematical modeling and optimization]. Eds. N.N. Novitskiy, A.D. Tevyashev. Novosibirsk, Nauka Publ., 2010. 419 p.
5. Pogosov A.Yu., Polozhaenko S.A., Grigorenko Yu.V. *Modelirovaniye fizicheskikh protsessov i tekhnologicheskaya informatizatsiya v neftyznoy promyshlennosti i energetike: monografiya* [Modeling of physical processes and informatization technology in the oil industry and energy: a monograph]. Odessa, Nauka i tekhnika Publ., 2014. 656 p.
6. Kazakov A.V., Zavorin A.S., Novoseltsev P.Yu., Tabakaev R.B. Distributed power generation in Russia: combined heat and power generation. *Siberian Journal of Science*, 2013, no. 4 (10), pp. 13–18. In Rus. Available at: <http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/806/564> (accessed 20 April 2016).
7. Kutrunov V.N., Mikhaylov P.Yu., Poldas L.A., Vakulin A.A., Vilkov M.N. Experimental study and physical and mathematical modeling of oil cooling in underground pipeline. *The UT Research Journal*, 2012, vol. 4, pp. 61–67. In Rus.
8. Bubenchikov A.M., Kharlamov S.N. *Matematicheskie modeli neodnorodnoy anizotropnoy turbulentsi vo vnutrennikh techeniyakh* [Mathematical model of inhomogeneous anisotropic turbulence in internal flows]. Tomsk, TGU Publ., 2001. 440 p.
9. Nikitin N.V. Statisticheskie kharakteristiki pristennoy turbulentsi [Statistical characteristics of the near-wall turbulence]. *Izvestiya RAS. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1996, vol. 3, pp. 32–43.
10. Nikitin N.V. Pryamoe chislennoe modelirovaniye trekhmernykh turbulentsnykh techeniy v trubakh krugovogo secheniya [Direct numerical simulation of three-dimensional turbulent flow in circular pipes]. *Izvestiya RAS. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1994, vol. 6, pp. 14–26.
11. Nikitin N.V. Pryamoy raschet turbulentsnykh techeniy v ekstentsionnykh trubakh [Direct numerical simulation of turbulent

- flows in concentric tubes]. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki. Matematika. Fizika*, 2006, vol. 46, no. 3, pp. 509–526.
12. Tevyashev A.D., Smirnova V.S. Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnogo neizotermicheskogo techeniya gaza po uchastku truboprovoda [Mathematical modeling of non-stationary non-isothermal flow of gas through the pipeline section]. *Radioelektronika i Informatika*, 2008, vol. 2, pp. 21–27.
 13. Varaksin A.Yu. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: Problems and achievements. *High Temp.*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 377–407.
 14. Terekhov V.I., Pakhomov M.A. Chislennoe issledovanie gidrodinamiki, teplo- i massoobmena dvukhfaznogo gazokapel'nogo potoka v trube [Numerical investigation of fluid flow, heat and mass transfer of two-phase gas flow in a pipe]. *Prikladnaya Mekhanika. Tekhnika. Fizika*, 2003, vol. 44, no. 1, pp. 108–122.
 15. Patera A. T. A spectral element method for fluid dynamics – Laminar flow in a channel expansion. *J. Comp. Phys.*, 1984, vol. 54, no. 3, pp. 468–488.
 16. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H. A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, 1991, vol. 3, no. 7, pp. 1760–1766.
 17. Fischer P., Lottes J., Kerkemeier S. *Nek5000 web page*. Available at: <http://nek5000.mcs.anl.gov> (accessed 23 April 2016).
 18. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 177, pp. 133–166.
 19. Kim J., Antonia R.A. Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 251, pp. 219–238.
 20. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re=590$. *Phys. Fluids.*, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 943–945.
 21. Dharmarathne S., Tutkun M., Araya G., Castillo L. Structures of scalar transport in a turbulent channel. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2016, vol. 55, pp. 259–271.

Received: 26 April 2016.

Informations about the authors

Vladimir O. Ryzhenkov, master student, Novosibirsk State University.

Vladislav A. Ivashchenko, student, Novosibirsk State University.

Rustam I. Mullyadzhanov, Cand. Sc., researcher, Institute of Thermophysics SB RAS; researcher, Novosibirsk State University.