

ВЫДЕЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВРЕМЕННОГО РЯДА

И.Г. Устинова¹, О.Н. Имас¹, С.В. Кривяков²

¹ Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

² Национальный исследовательский Томский государственный университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: igu@tpu.ru

Пусть $y(t)$ – случайный процесс, который представим в виде: $y(t) = x(t) + s(t) + \xi(t)$, где $x(t)$ – систематическая составляющая временного ряда или тренд, $s(t)$ – циклическая составляющая и $\xi(t)$ – помеха, который наблюдается на отрезке $[0; T]$. Данную модель временного ряда будем называть аддитивной. Задача заключается в выделении циклической составляющей, при условии, что тренд временного ряда линейный, то есть $x(t_i) = at_i + b$, где t_i – момент i -го наблюдения, $i = \overline{1, N}$. Оценки коэффициентов тренда легко находятся

методом наименьших квадратов [1] и имеют вид:
$$\hat{a} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i t_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N t_i^2 - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N x_i t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}.$$

Циклическую составляющую будем искать в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T [y(t) - \hat{a}t - \hat{b}] dt = \frac{2}{T} \left[y(0)T + y'(0) \frac{T^2}{2} + y''(0) \frac{T^3}{3!} + o(T^3) \right] - \hat{a}T - 2\hat{b},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T [y(t) - \hat{a}t - \hat{b}] \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{T}{2\pi^2 n^2} [y''(0)T + o(T)] \text{ и}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T [y(t) - \hat{a}t - \hat{b}] \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{2}{T} \left\{ -\frac{T}{2\pi n} \left[y'(0)T + y''(0) \frac{T^2}{2} + o(T^2) \right] + \hat{a} \frac{T^2}{2\pi n} \right\}.$$

Для нахождения коэффициентов a_0, a_n, b_n использовалось разложение $y(t)$ по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно. С учетом найденных коэффициентов, получим циклическую

составляющую тренда временного ряда в виде: $\frac{\hat{a}T}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[y'(0)T + y''(0) \frac{T^2}{2} \right] o(T^2)$. Аналогичные расчеты

произведены для мультипликативной модели временного ряда $y(t) = x(t) \cdot s(t) \cdot \xi(t)$.

Знание циклической составляющей временного ряда позволяет строить более точные аналитические и прогнозные модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 550 с.