

УДК 621.373.1

УСЛОВИЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ В ГЕНЕРАТОРАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

Ю.К. Рыбин

Томский политехнический университет

E-mail: rybin@camsam.tpu.ru

Теоретически обосновано, что для формирования в колебательной системе генератора, состоящей из линейной частотнозависимой цепи и активного нелинейного элемента, периодических колебаний заданной формы необходимо, чтобы баланс амплитуд и баланс фаз выполнялись на частотах всех гармоник выходного колебания.

Ключевые слова:

Генератор, колебательная система, критерий Баркгаузена, условия баланса, амплитуда, фаза, амплитудная характеристика, обратная функция.

Key words:

Oscillator, oscillation system, Barkhausen stability criterion, condition of balance, amplitude, phase, amplitude characteristic, inverse function.

Введение

В теории генераторов электрических сигналов вопрос об условиях воспроизведения колебаний синусоидальной формы давно решён. Критерием установления таких колебаний является критерий Баркгаузена, известный в отечественной литературе как условия баланса амплитуд и баланса фаз. Однако до сих пор остаётся нерешённым вопрос об условиях возбуждения и установления периодических колебаний несинусоидальной формы, например, импульсной, в частности, прямоугольной, треугольной или любой другой формы. Для воспроизведения электрических сигналов с такими формами применяются генераторы: мультивибраторы, генераторы линейно изменяющихся сигналов и другие. Широко известны и описаны схемы таких генераторов на транзисторах и операционных усилителях. Их анализ показывает, что практически все они получены эмпирическим путём, т. к. вопросы их теории разработаны недостаточно.

Несмотря на обилие работ по теории нелинейных колебаний, до настоящего времени нет внятной теории возникновения и установления периодических колебаний несинусоидальной формы, поэтому неизвестно, какими свойствами должны обладать колебательная система генератора и её элементы. Поэтому разработка теории генераторов сигналов несинусоидальной формы остаётся актуальной как для практического применения, так и в целом для теории нелинейных колебаний.

Постановка задачи исследований

Рассмотрим блок-схему простейшей колебательной системы (КС) генератора, рис. 1. В ней ЛЧЗЦ — линейная частотно зависящая цепь, АНЭ — активный нелинейный элемент. В соответствии с блок-схемой реализованы КС многих генераторов, порождающих колебания разных форм. Применительно к этой системе уместно выяснить, при каких условиях:

- возбуждаются нарастающие колебания?
- колебания становятся периодическими?
- колебания становятся устойчивыми к возмущениям, т. е. превращаются в автоколебания?

Все эти вопросы, касающиеся установления автоколебаний синусоидальной формы, в той или иной степени рассмотрены и решены. Условием возбуждения нарастающих колебаний является, в частности, наличие комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений. Известны также критерии и условия установления периодических колебаний, в частности, критерий Баркгаузена или условия баланса амплитуд и баланса фаз [1, 2]. Определены и условия устойчивости этих колебаний [1]. К сожалению, хуже обстоит дело при изучении вопросов установления автоколебаний других форм. Как отмечается в [1], это связано с трудностью аналитического решения задачи в силу сильной нелинейности уравнений КС.

В настоящей статье поставлена задача о нахождении условий воспроизведения колебаний периодических **несинусоидальных форм** в КС, рис. 1, т. е. подробно рассматривается второй из названных выше вопросов.

Итак, поставим задачу определить условия, при которых в КС, рис. 1, могут существовать периодические колебания, описываемые некоторой функцией $x(t)$. Для этого определим требования к воспроизводимым колебаниям, передаточной функции ЛЧЗЦ и амплитудной характеристике АНЭ.

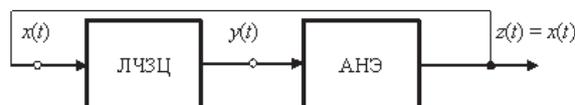


Рис. 1. Обобщённая блок-схема колебательной системы генератора

Естественными требованиями к воспроизводимым колебаниям (сигналам) являются следующие:

- сигнал и его производные могут принимать только ограниченные по уровню значения, т. е. не должны стремиться к бесконечности;
- при практической реализации КС на допустимые значения сигнала и его производных могут налагаться дополнительные ограничения, обусловленные ограничениями, вызванными аппаратной реализацией КС.

Теоретический анализ

Для решения поставленной задачи надо определить передаточную функцию ЛЧЗЦ и амплитудную характеристику АНЭ. Введём обозначения: $\dot{\gamma}(\omega) = \dot{y}(\omega)/\dot{x}(\omega)$ – комплексная передаточная функция ЛЧЗЦ; $K(\omega, x) = \dot{x}(\omega)/\dot{y}(\omega)$ – комплексная характеристика АНЭ. Перемножая эти функции, получим известный критерий существования в этой КС периодических колебаний синусоидальной формы с частотой ω_0 : критерий Баркгаузена $K(\omega_0, y) \cdot \dot{y}(\omega_0) = 1$. Выясним, можно ли распространить этот критерий на периодические колебания несинусоидальной формы.

Прежде всего, необходимо выбрать и принять математические модели сигналов в КС. Аналитическое описание сигналов в замкнутой форме не всегда возможно. Наиболее приемлемым описанием сигналов, как уже доказано в [3], является их описание в виде ряда по системе базисных функций. Поэтому представим выходное колебание $x(t)$ в виде тригонометрического ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \sin(n\omega_0 t + \varphi_{xn}). \quad (1)$$

Пусть колебание, описываемое этой функцией, поступает на вход ЛЧЗЦ. Тогда, пройдя через ЛЧЗЦ, все гармонические составляющие $x(t)$ изменятся по амплитуде и сдвинутся по фазе в соответствии с её комплексной передаточной функцией $\dot{\gamma}(\omega)$. В результате выходной сигнал ЛЧЗЦ примет вид $y(t)$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn} \sin(n\omega_0 t + \varphi_{yn}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} |\dot{\gamma}(n\omega_0)| \sin(n\omega_0 t + \varphi_{xn} + \arg(\dot{\gamma}(n\omega_0))). \quad (2)$$

Это колебание не отличается от $x(t)$ спектральным составом, но отличается значениями амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих в соответствии с АЧХ и ФЧХ ЛЧЗЦ. Сигнал $y(t)$ далее поступает на вход АНЭ и, пройдя его, становится колебанием $z(t)$. Теперь каждой гармонике входного сигнала $y(t)$ АНЭ на своём выходе ставит в соответствие гармонику сигнала $z(t)$

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} |\dot{\gamma}(n\omega_0)| |k(n\omega_0, x_m)| \times \sin(n\omega_0 t + \varphi_{xn} + \arg(\dot{\gamma}(n\omega_0)) + \arg(k(n\omega_0, x_m))). \quad (3)$$

Здесь необходимо дать пояснения некоторым входящим в (3) величинам. В частности, $|k(n\omega_0, x_m)|$ – это модуль отношения амплитуды n -й гармоники выходного сигнала АНЭ к амплитуде той же гармоники входного сигнала, а $\arg(k(n\omega_0, x_m))$ – разность фаз n -й гармоники на выходе и входе АНЭ. Как видно, эти величины зависят не только от частоты колебаний, номера гармоники, но и от амплитуды выходного сигнала, как для любого нелинейного элемента. Естественно они зависят и от формы входного сигнала.

В случае замкнутой КС, $z(t)$ становится равным $x(t)$. Приравняв правые части уравнений (2) и (3), получим условия воспроизведения периодических колебаний

$$|\dot{\gamma}(n\omega_0)| |k(n\omega_0, x_m)| = 1, \\ \arg(\dot{\gamma}(n\omega_0)) + \arg(k(n\omega_0, x_m)) = 0. \quad (4)$$

Первое равенство определяет значение коэффициента передачи по каждой гармонике по контуру ЛЧЗЦ-АНЭ, а второе – сдвиг их фаз. При выполнении этих условий колебание $y(t)$ в АНЭ преобразуется обратно в $x(t)$. Фактически АНЭ служит «обратным» преобразователем колебания $y(t)$ в $x(t)$. Он изменяет амплитуды и сдвигает фазы каждой гармоники так, чтобы на своём выходе получить колебание $x(t)$. Такое преобразование наступает только при воспроизведении периодических колебаний.

Результаты теоретического анализа

Проведённый несложный анализ может служить доказательством следующей теоремы.

Теорема. Для получения периодических колебаний в колебательной системе, содержащей последовательно соединённые ЛЧЗЦ и АНЭ, необходимо чтобы комплексный коэффициент передачи по контуру обратной связи был равен единице на частоте каждой гармоники разложения выходного сигнала в тригонометрический ряд Фурье.

Следствие 1. Модуль коэффициента передачи по контуру обратной связи на частоте каждой гармоники должен быть равен единице.

Следствие 2. Сдвиг фазы по контуру обратной связи на частоте каждой гармоники должен быть равен нулю или быть кратен 2π радиан.

Следствие 3. Для существования в КС колебаний с заданной формой необходимо чтобы амплитудная характеристика АНЭ была бы обратной амплитудной характеристикой ЛЧЗЦ.

Следствия 1 и 2 вытекают непосредственно из равенств (4). Следствие 3 доказано проведённым выше анализом.

В качестве практического доказательства справедливости теоремы и следствий ниже приведён пример.

Практический пример

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется построить КС, рис. 1, для воспроизведения колебаний прямоугольной периодической формы, показанной на рис. 2 сплошной линией. Следует сразу оговориться, что реализовать этот сигнал практически невозможно, т. к. его первая производная равна бесконечности в моменты смены полярности, но этот сигнал выбран потому, что он достаточно хорошо изучен, известно и его математическое описание.

Математической моделью этого сигнала может быть выражение вида

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\omega_0 t]}{2n-1}. \quad (5)$$

Определим требования, которые необходимо предъявить к блокам КС.

В качестве ЛЧЗЦ используем, например, простую дифференцирующую RC-цепь¹ и примем её постоянную времени $\tau=RC$. В этом случае дифференциальное уравнение для определения выходного сигнала ЛЧЗЦ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -\frac{u(t)}{\tau} + \frac{x(t)}{\tau}; \\ \tau \frac{du(t)}{dt} &= y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $x(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ – соответственно, входное, выходное напряжение и напряжение на ёмкости RC-цепи.

Напомним, что комплексная передаточная функция этой цепи на частотах гармоник имеет вид

$$\dot{y}(n\omega_0) = \frac{jn\omega_0\tau}{1 + jn\omega_0\tau} = \frac{n\omega_0\tau}{\sqrt{1 + (n\omega_0\tau)^2}} e^{j(\pi/2 - \arctg(n\omega_0\tau))}. \quad (7)$$

С учетом передаточной функции (7) можно записать выражение выходного сигнала ЛЧЗЦ

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)\omega_0\tau}{\sqrt{1 + ((2n-1)\omega_0\tau)^2}} \times \sin[(2n-1)\omega_0 t + (\pi/2 - \arctg((2n-1)\omega_0\tau))]. \quad (8)$$

Форма выходного сигнала RC-цепи показана на рис. 2 пунктирной линией.

На рис. 3, а, показаны траектории сигналов RC-цепи² на фазовой плоскости в координатах $y(t)$ и $x(t)$. Эти траектории и представляют собой амплитудные характеристики RC-цепи при разных амплитудах как соотношения выходного и входного сигналов цепи³. Одна из них соответствует сигналам на рис. 2. Сопоставляя рис. 2 и 3, а, несложно увидеть, что изображающая точка при увеличении времени

непрерывно движется по замкнутой траектории по направлению часовой стрелки и сам фазовый портрет при разных амплитудах сигнала $x(t)$ представляет собой множество подобных траекторий, вложенных друг в друга (на рисунке показаны две из них).

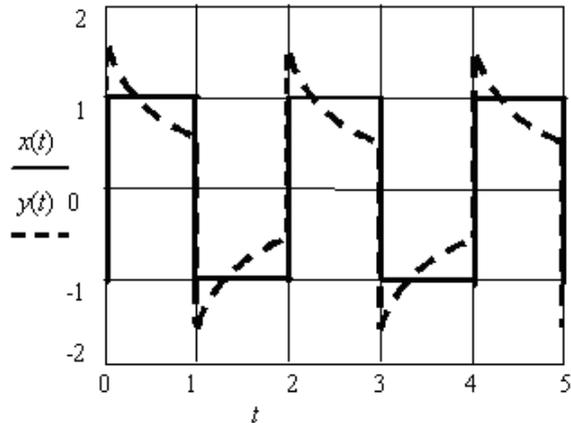


Рис. 2. Входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы ЛЧЗЦ

Коль скоро АНЭ производит обратное преобразование сигнала $y(t)$ в $x(t)$, то траектория его предельного цикла будет аналогична, только в нём оси координат меняются местами, естественно, со сменой направления перемещения изображающей точки (см. рис. 3, б). Теперь она должна перемещаться в направлении обратном движению стрелки часов с сохранением скорости перемещения на каждом отрезке.

Собственно на этом математическую часть решения задачи о нахождении условия воспроизведения в КС колебаний вида (5) можно считать завершённой. Результат этого решения можно сформулировать в виде следующего утверждения. Для существования в КС с выбранной ЛЧЗЦ колебаний вида (5) необходимо, чтобы фазовая траектория АНЭ была бы обратной одному из циклов ЛЧЗЦ. Осуществление этого условия достигается с помощью соответствующей амплитудной характеристики АНЭ.

Рассмотрим и этот вопрос.

Амплитудная характеристика RC-цепи может быть описана следующей системой уравнений.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x) = \\ &= \begin{cases} k - 0,5 + kx & \text{при } -Xm > x \geq -Xm - \Delta; \\ 0,5 + x & \text{при } -Xm < x \leq Xm + \Delta \end{cases}; \\ y_2 &= g_2(x) = \\ &= \begin{cases} -k + 0,5 + kx & \text{при } Xm < x \leq Xm + \Delta \\ -0,5 + x & \text{при } -Xm - \Delta < x \leq Xm \end{cases}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $Xm=1$ амплитуда $x(t)$.

¹ В качестве RC-цепи можно выбрать и любую другую цепь.

² Подробнее о методе фазовой плоскости и его применении к исследованию нелинейных систем см. [1].

³ Понятно, что амплитудная характеристика индивидуальна как для самой цепи, так и для её входного сигнала, а её форма инвариантна только к амплитуде входного сигнала.

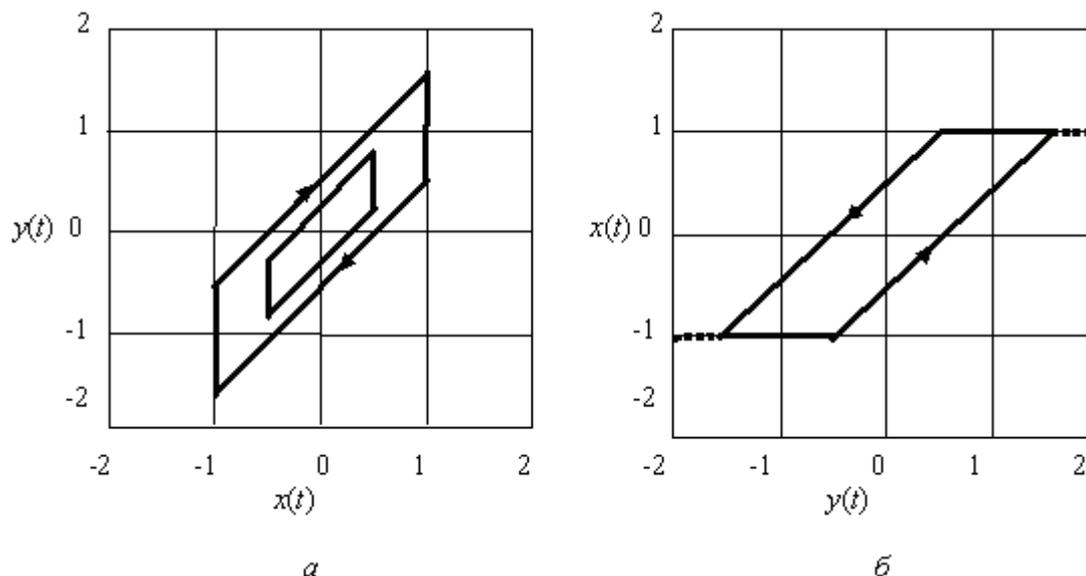


Рис. 3. Фазовые траектории предельного цикла а) ЛЧЗЦ и б) АНЭ

Здесь для однозначного описания вертикальных участков принято допущение о незначительном их отклонении от вертикали, которое задаётся коэффициентами $k \gg 1$ и $\Delta \ll 1$, причём $k=1/\Delta$.

Амплитудная характеристика АНЭ, осуществляющего обратное преобразование, должна описываться функцией, обратной амплитудной характеристике RC-цепи. Эту функцию несложно получить, находя функции обратные (9) на каждом отрезке (сегменте функции $g(x)$), а именно:

$$x = f_1(y) = \begin{cases} \frac{y}{k} - 1 + \frac{0,5}{k} & \text{при } -Ym - \Delta < y \leq -0,5; \\ y - 0,5 & \text{при } -0,5 < y \leq Ym + \Delta \end{cases};$$

$$x = f_2(y) = \begin{cases} \frac{y}{k} + 1 - \frac{0,5}{k} & \text{при } 0,5 < y \leq Ym \\ y + 0,5 & \text{при } -Ym - \Delta < y \leq 0,5 \end{cases}, \quad (10)$$

где $Ym=1$ амплитуда $y(t)$.

Однако, сама по себе амплитудная характеристика АНЭ ещё не гарантирует существования периодических автоколебаний. Наличие требуемой фазовой траектории является лишь **необходимым** условием. Для установления периодических автоколебаний нужно выполнить ещё **достаточные** условия для их устойчивости при возможных отклонениях изображающей точки от этой траектории, в том числе и при возможных её начальных положениях как внутри, так и вне предельного цикла. Для этого все траектории из любой точки внутри должны попадать на предельный цикл. Аналогично, извне все траектории должны быть направлены также к предельному циклу. А эти условия можно выявить, только исследуя систему уравнений КС.

Для составления системы уравнений КС необходимо доопределить амплитудную характе-

ристику АНЭ вне предельного цикла. Один из вариантов доопределения показан точечными линиями на рис. 3, б.

$$f_1(y) = \begin{cases} -1, & \text{if } -2 < y \leq -0,5 \\ y - 0,5, & \text{if } -0,5 < y \leq Ym; \\ 1, & \text{if } Ym < y < 2 \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0,5 < y \leq 2 \\ y + 0,5, & \text{if } -Ym \leq y < 0,5. \\ -1, & \text{if } -2 < y \leq -Ym \end{cases}. \quad (11)$$

В формулах (11) коэффициенты Δ и k из ур. (10) приняты равными, соответственно, нулю и бесконечности. Поэтому, объединяя уравнения ЛЧЗЦ (6) и уравнения амплитудной характеристики (11) с учётом её инерционности, систему уравнений КС можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{du(t)}{dt} = -u(t) + x(t) \\ \tau \frac{dy(t)}{dt} = y(t) \\ \tau_k \frac{dx(t)}{dt} = \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -1, \text{ if } -2 < y(t) \leq -0,5 \\ y(t) - 0,5, \text{ if } -0,5 < y(t) \leq \\ \leq Ym \text{ if } y(t) < u(t) \\ 1, \text{ if } Ym < y(t) \leq 2 \\ 1, \text{ if } 0,5 < y(t) \leq 2 \\ y(t) + 0,5 \text{ if } -Ym \leq y(t) < 0,5 \\ \text{if } y(t) \geq u(t) \\ -1, \text{ if } -2 \leq y(t) < -Ym \end{array} \right. \quad (12)$$

Система уравнений (12) включает в себя первые два уравнения ЛЧЗЦ и третье уравнение инерционного⁴ АНЭ с малой постоянной времени τ_k . Введение незначительной «инерционности» АНЭ объясняется тем, что, как показано в [1], в системе, описываемой уравнением первого порядка, периодические колебания возникнуть не могут. Для возникновения периодических колебаний необходимо было бы вводить понятие «скачка», что теоретически допустимо, но физически невозможно. Поэтому введение инерционности АНЭ увеличивает порядок КС и превращает её в систему второго порядка, периодические колебания в которой становятся возможными.

Решением системы (12) при $\tau = \frac{T}{2 \ln(1,5/0,5)} \approx 0,91$ и $\tau_k = 0,001$ в стационарном режиме являются колебания, близкие к представленным на рис. 2 с конечной длительностью фронта и среза.

Интересно отметить следующий факт, вытекающий из формы сигнала $x(t)$. Движение изображающей точки по траектории предельного цикла при заданной форме сигнала (5) осуществляется с разной скоростью: на наклонных участках фазовой траектории оно выполняется быстро, т. к. эти участки соответствуют фронту и срезу импульса. На горизонтальных и вертикальных участках движение осуществляется сравнительно медленно. Это даёт основание полагать, что наклонные участки траектории на рис. 4 определяют только фронт и срез сигнала и при $\tau \gg \tau_k$ практически мало влияют на длительность импульсов и период сигнала.

Теоретически система уравнений (12) удовлетворяет поставленной задаче и формирует сигналы, рис. 2, но для практической реализации она сложна, т. к. амплитудная характеристика АНЭ содержит шесть линейных участков, требующих сопряжения в определённых точках. Поэтому для упрощения реализации амплитудной характеристики здесь большое поле приложения изобретательской смекалки.

Например, неожиданный вид характеристики, близкой к требуемой гистерезисной характеристике, имеет амплитудная характеристика неинверти-

рующего усилителя на ОУ [4]. Эта близость объясняется тем, что амплитудная характеристика неинвертирующего усилителя, однозначная при медленном изменении входного сигнала, становится неоднозначной (гистерезисной) характеристикой при быстрых изменениях входного сигнала из-за присущей любому усилителю инерционности. В [4] приведена такая характеристика и схема усилителя, реализующая её. Там же приведена и схема генератора. С учётом характеристики усилителя система уравнений принимает более простой вид

$$\begin{cases} \tau \frac{du(t)}{dt} = -u(t) + x(t) \\ \tau \frac{du(t)}{dt} = y(t) \\ \tau_k \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + Xm \tanh(K[y(t) - \beta x(t)]) \end{cases} \quad (13)$$

где $\tanh(\)$ – гиперболический тангенс; β – коэффициент передачи цепи отрицательной обратной связи; K – коэффициент усиления ОУ.

В [4] подробно исследовано поведение решений системы уравнений (13) на фазовой плоскости и показано, что при любых отклонениях изображающей точки от стационарной фазовой траектории с течением времени изображающая точка возвращается на траекторию предельного цикла и продолжает движение по ней. Решения систем уравнений (12) и (13) при $\beta = 0,5$ близки друг к другу. Небольшая разница заметна только на фронте и срезу прямоугольного импульса именно в силу различия теоретической и практической гистерезисных характеристик АНЭ. Поэтому анализ решений системы уравнений (13) можно распространить и на систему уравнений (12).

Выводы

Получены условия формирования периодических колебаний заданной формы в колебательной системе генератора электрических сигналов, состоящей из линейной частотнозависимой цепи и активного нелинейного элемента. Доказано, что для воспроизведения колебаний необходимо, чтобы балансы амплитуд и фаз выполнялись на частотах всех гармоник выходного колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. Бондаренко В.Г. RC-генераторы синусоидальных колебаний. – М.: Связь, 1976. – 208 с.

3. Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.
4. Рыбин Ю.К. Электронные устройства. – Томск: Изд-во «Печатная мануфактура», 2003. – 264 с.

Поступила 12.03.2010 г.

⁴ Инерционность АНЭ введена ещё и для обеспечения конечных значений производной выходного сигнала.