

УДК 621.318.38

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ВИБРАЦИОННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

А.С. Глазырин, В.В. Тимошкин, С.В. Цурпал, Т.А. Глазырина

Томский политехнический университет

E-mail: ag@mail.elti.tpu.ru

Изложены методы идентификации параметров механической системы на основе амплитудно-частотных характеристик смещения, скорости, ускорения. Представлен алгоритм оценки параметров механической системы с применением математической модели и экспериментальных амплитудно-частотных характеристик ускорения рабочего органа на примере вибрационного электромеханического преобразователя энергии.

### Ключевые слова:

Идентификация параметров, амплитудно-частотные характеристики, механическая система.

### Key words:

Parameters identification, frequency response, mechanical system.

Идентификация параметров механических систем охватывает широкий спектр задач в электро-механике. Известны исследования, в которых описано экспериментальное определение вязкоупругих характеристик механической колебательной системы на основе построения амплитудно-фазовой частотной характеристики, исследуемой в окрестности резонансной частоты [1]. Используя линейную модель и экспериментальные данные, полученные с помощью частотных характеристик, можно произвести достоверную идентификацию параметров механической системы.

В работе представлен метод определения параметров механической системы, который основывается на граничных частотах полосы пропускания. Данный метод может быть применен ко всем резонансным системам.

Вибрационный режим работы в механических колебательных системах является полезным режимом для многих производственных механизмов, например, для вибросмесителей, вискозиметров, вибрационных перемешивателей и т. п. В процессе работы параметры механической колебательной системы могут меняться, что может быть связано как с выполнением технологических функций производственных механизмов, так и с режимами эксплуатации [2–4]. Качество работы систем управления вибромеханизмами напрямую зависит от оперативного и достоверного определения параметров механической системы.

Достаточно часто в механической системе упомянутых выше механизмов встречаются такие параметры, определение которых весьма сложно, или для их идентификации требуется дорогостоящее оборудование. Для решения этой проблемы предлагается прибегнуть к определению параметров на основе экспериментальных частотных характеристик смещения, скорости, ускорения.

Целью данной работы является: идентификация механического сопротивления и суммарной колеблющейся массы по граничным значениям

полосы пропускания на примере вибрационного электромеханического преобразователя энергии

Основные задачи работы:

1. Разработка математической модели объекта исследования реализованной по:
  - перемещению  $x(t)$ ;
  - виброскорости  $\dot{x}(t)$ ;
  - виброускорению  $\ddot{x}(t)$ .
2. Нахождение взаимосвязи между граничными значениями частот полосы пропускания и параметрами механической системы, составление системы нелинейных уравнений по перемещению, виброскорости и виброускорению.
3. Проверка адекватности математической модели путем сравнения модельной и экспериментальной амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), снятой по виброускорению.

### Разработка математической модели объекта исследования

При разработке математического описания механической системы вибрационного электромеханического преобразователя энергии приняты допущения:

- решается задача цепная, а не полевая;
- система линеаризована;
- суммарная колеблющаяся масса, жёсткость пружины и механическое сопротивление не зависят от перемещения  $x(t)$  и его производных, а также от времени.

Запишем уравнение равновесия для механического контура:

$$F_{\text{ЭМ}}(t) = m_{\Sigma} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + R_{\text{Мех}} \frac{d}{dt} x(t) + x(t)k_{\text{пр}},$$

где  $F_{\text{ЭМ}}(t)$ , Н, сила, стягивающая магнитный зазор, являющаяся вынуждающей;  $x(t)$ , м, отклонение активатора от положения равновесия;  $R_{\text{Мех}}$ , кг/с, механическое сопротивление;  $k_{\text{пр}}$ , Н/м, жёсткость пружины;

$m_{\Sigma}$ , кг, суммарная колеблющаяся масса  $m_{\Sigma} = m_a + m_{\text{ПРИСОЕД}}$ , состоящая из  $m_a$ , массы якоря-активатора и  $m_{\text{ПРИСОЕД}}$ , присоединённой колеблющейся массы.

**Математическая модель, реализованная по перемещению**

Применив преобразование Лапласа, получим:

$$F_{\text{ЭМ}}(p) = m_{\Sigma} x(p) \left( p^2 + \frac{R_{\text{МЕХ}}}{m_{\Sigma}} p + \frac{k_{\text{ПР}}}{m_{\Sigma}} \right).$$

Передаточная функция механического контура – отношение величины отклонения активатора от положения равновесия к вызвавшей это отклонение электромагнитной силе:

$$W_{\text{МЕХ}}(p) = \frac{x(p)}{F_{\text{ЭМ}}(p)} = \frac{1}{(m_{\Sigma} p^2 + R_{\text{МЕХ}} p + k_{\text{ПР}})}.$$

Сделаем подстановку  $p=j\omega$ , получим  $W_{\text{МЕХ}}(j\omega)$  и представим её составляющими  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ :

$$W_{\text{МЕХ}}(j\omega) = \frac{1}{(m_{\Sigma} j^2 \omega^2 + R_{\text{МЕХ}} j\omega + k_{\text{ПР}})}.$$

В итоге получим механическую комплексную частотную характеристику:

$$W_{\text{МЕХ}}(j\omega) = \frac{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2) - R_{\text{МЕХ}} j\omega}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

Механическая вещественная и мнимая частотная характеристика:

$$P(\omega) = \frac{k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2},$$

$$Q(\omega) = \frac{-R_{\text{МЕХ}} \omega}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

Механическая АЧХ:

$$A(\omega) = |W_{\text{МЕХ}}(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \frac{\sqrt{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + (-R_{\text{МЕХ}} \omega)^2}}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

**Математическая модель, реализованная по виброскорости**

Передаточная функция механического контура по скорости – отношение величины виброскорости к приложенной к механическому контуру электромагнитной силе:

$$W_v(p) = \frac{V(p)}{F_{\text{ЭМ}}(p)} = \frac{p}{m_{\Sigma} p^2 + R_{\text{МЕХ}} p + k_{\text{ПР}}}.$$

Скоростная комплексно-частотная характеристика:

$$W_v(j\omega) = \frac{R_{\text{МЕХ}} \omega^2}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2} + \frac{j\omega(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

Скоростная АЧХ:

$$A_v(\omega) = |W_v(j\omega)| = \sqrt{P_v(\omega)^2 + Q_v(\omega)^2} = \frac{\sqrt{(R_{\text{МЕХ}} \omega^2)^2 + (\omega(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2))^2}}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

**Математическая модель, реализованная по виброускорению**

Передаточная функция механического контура по ускорению – отношение величины виброускорения к приложенной к механическому контуру электромагнитной силе:

$$W_a(p) = \frac{a(p)}{F_{\text{ЭМ}}(p)} = \frac{p^2}{(m_{\Sigma} p^2 + R_{\text{МЕХ}} p + k_{\text{ПР}})}.$$

Комплексно-частотная характеристика по ускорению:

$$W_a(j\omega) = \frac{-\omega^2 \cdot (k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2} + \frac{R_{\text{МЕХ}} j\omega^3}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

АЧХ по ускорению:

$$A_a(\omega) = |W_a(j\omega)| = \sqrt{P_a(\omega)^2 + Q_a(\omega)^2} = \frac{\sqrt{(-\omega^2(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2))^2 + (R_{\text{МЕХ}} \omega^3)^2}}{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}.$$

**Нахождение взаимосвязи между граничными значениями частот полосы пропускания и параметрами механической системы, составление системы нелинейных уравнений по перемещению**

Найдём частоты, ограничивающие полосу пропускания механической АЧХ. Зная, что при этих частотах амплитуда вибро смещения  $A(\omega)$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз, составим равенство:

$$\frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = A(\omega) = A(\omega),$$

$\omega \rightarrow \omega_{\text{пп}_1} \quad \omega \rightarrow \omega_{\text{пп}_2}$

где  $\omega_{\text{пп}_1}$  и  $\omega_{\text{пп}_2}$  – нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания, определённые по механической АЧХ.

Для нахождения этих частот получим равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left( k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \left( \frac{k_{\text{ПР}}}{m_{\Sigma}} - \left( \frac{R_{\text{МЕХ}}}{2m_{\Sigma}} \right)^2 \right) \right)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \left( \frac{k_{\text{ПР}}}{m_{\Sigma}} - \left( \frac{R_{\text{МЕХ}}}{2m_{\Sigma}} \right)^2 \right)^2}}$$

Обозначив правую часть равенства как:

$$a = 2 \left[ \left( k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \left( \frac{k_{\text{ПР}}}{m_{\Sigma}} - \left( \frac{R_{\text{МЕХ}}}{2m_{\Sigma}} \right)^2 \right) \right)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \left( \frac{k_{\text{ПР}}}{m_{\Sigma}} - \left( \frac{R_{\text{МЕХ}}}{2m_{\Sigma}} \right)^2 \right) \right]$$

получим уравнение четвёртого порядка:

$$(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} \omega^2)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 \omega^2 - a = 0, \quad (1)$$

решив которое, найдём четыре корня. Решение уравнения (1) удобно искать, произведя подстановку  $y = \omega^2$  и получив уравнение второго порядка

$$(k_{\text{ПР}} - m_{\Sigma} y)^2 + R_{\text{МЕХ}}^2 y - a = 0.$$

При решении (1) уравнения было получено множество корней. В результате анализа выделено только два: меньший и больший из положительных корней. Положительный корень, имеющий меньшее значение является нижней частотой, а имеющий большее значение – верхней граничной частотой полосы пропускания АЧХ.

$$\omega_{\text{ПР}} = \frac{-2m_{\Sigma}}{-16k_{\text{ПР}}m_{\Sigma}^3 + 4m_{\Sigma}^2R_{\text{МЕХ}}^2} \times \left[ \left( (-8R_{\text{МЕХ}}^6k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} + 256R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}^3m_{\Sigma}^3) \times \left[ R_{\text{МЕХ}}^2 - 16k_{\text{ПР}}^2m_{\Sigma}^2 - 4R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} \pm b^{\frac{1}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

где

$$b = R_{\text{МЕХ}}^8 - 32R_{\text{МЕХ}}^4k_{\text{ПР}}^2m_{\Sigma}^2 - 8R_{\text{МЕХ}}^6k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} + 256R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}^3m_{\Sigma}^3,$$

$\omega_{\text{ПР}1}$  находится при знаке «+» перед скобкой, а  $\omega_{\text{ПР}2}$  – при знаке «-».

В итоге получим систему уравнений, которая связывает параметры механической системы и граничные значения частот полосы пропускания.

#### Взаимосвязь между граничными значениями частот полосы пропускания по виброскорости и параметрами механической системы

Нижняя и верхняя частоты полосы пропускания по виброскорости определяются по выражению:

$$\omega_{a\_пп} = \sqrt{\frac{k_{\text{ПР}}^2 \left( 4k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} - 2R_{\text{МЕХ}}^2 \mp \mp 2(-R_{\text{МЕХ}}^4 + 4R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}m_{\Sigma}) \right)}{2(R_{\text{МЕХ}}^4 - 4R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} + 2k_{\text{ПР}}^2m_{\Sigma}^2)}}$$

где  $\omega_{v\_пп1}$  находится при знаке «+» перед  $b$ , а  $\omega_{v\_пп2}$  – при знаке «-» перед  $b$ .

#### Взаимосвязь между граничными значениями частот полосы пропускания по виброускорению и параметрами механической системы

Нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания для АЧХ по ускорению:

$$\omega_{a\_пп} = \sqrt{\frac{k_{\text{ПР}}^2 \left( 4k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} - 2R_{\text{МЕХ}}^2 \mp \mp 2(-R_{\text{МЕХ}}^4 + 4R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}m_{\Sigma}) \right)}{2(R_{\text{МЕХ}}^4 - 4R_{\text{МЕХ}}^2k_{\text{ПР}}m_{\Sigma} + 2k_{\text{ПР}}^2m_{\Sigma}^2)}}. \quad (2)$$

где  $\omega_{a\_пп1}$  находится при знаке «-» перед  $b$ , а  $\omega_{a\_пп2}$  находится при знаке «+» перед  $b$ .

#### Проверка адекватности математической модели путем сравнения модельной и экспериментальной АЧХ, снятой по виброускорению

Составляем систему уравнений из полученных зависимостей (2) граничных частот по виброускорению.

$$\begin{cases} \omega_{\text{ПР}a1} = f(m_{\Sigma}, R_{\text{МЕХ}}) \\ \omega_{\text{ПР}a2} = f(m_{\Sigma}, R_{\text{МЕХ}}) \end{cases}$$

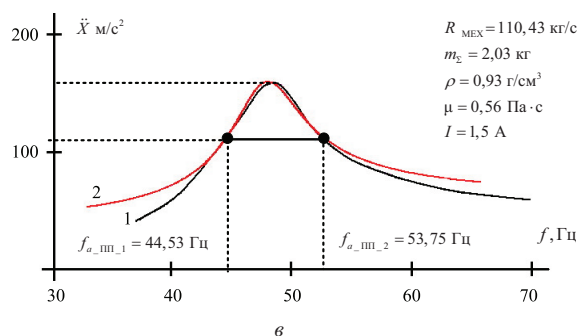
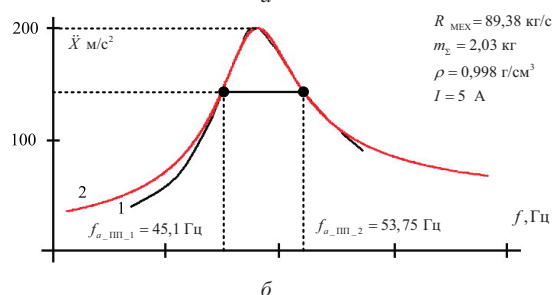
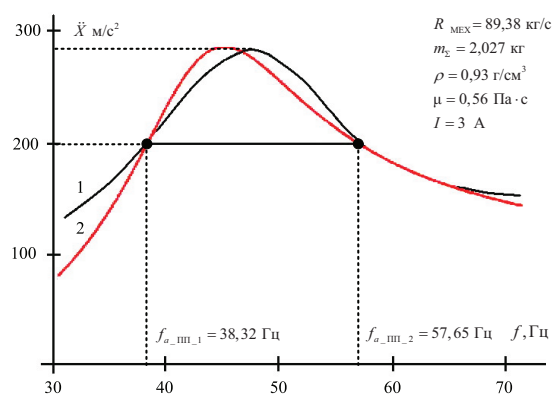
Численные значения частот были получены экспериментальным путем на вибродвижителе при различных действующих значениях токов  $I$  и в средах с различными величинами механических сопротивлений  $R_{\text{МЕХ}}$  и суммарных масс  $m_{\Sigma}$  колебательных механических контуров. Как известно, сила стягивающая зазор электромагнитной системы, пропорциональна квадрату тока, а, следовательно, силу вынуждающую колебания, можно стабилизировать фиксацией действующего значения тока.

Для получения экспериментальных АЧХ необходим точный и негромоздкий датчик, например, датчик ускорения или положения. Таким требованиям могут отвечать современные пьезоэлектрические или интегральные акселерометры и ёмкостные датчики с изменяемой площадью перекрытия пластин. В данном случае при измерении АЧХ использовался акселерометр.

Решение системы, полученной на основании выражения (2), производилось численным методом в математическом пакете Mathcad, полученные результаты  $R_{\text{МЕХ}}$  и  $m_{\Sigma}$  были занесены в таблицу.

Из рисунка видно, что экспериментальные АЧХ имеют разный характер т. к. были сняты при различных параметрах.

Наиболее хорошие результаты удалось получить для воды, где максимальная погрешность не превышает 1 % в полосе пропускания, рисунок, в.



**Рисунок.** АЧХ: 1 – экспериментальная; 2 – аналитическая; а) нефть; б) вода; в) нефть

**Таблица.** Результаты экспериментальной проверки адекватности предложенного метода идентификации

Параметры	Условия проведения и результаты эксперимента		
	Нефть	Вода	Нефть
$I, А$	3,0	5,0	1,5
$f_{a\_пп\_1}, Гц$	38,32	45,1	44,53
$f_{a\_пп\_2}, Гц$	57,65	52,4	53,75
$R_{МЭХ}, кг/с$	232,71	89,38	110,43
$m_{\Sigma}, кг$	2,447	2,027	2,026

Для нефти при малых токах экспериментальная и аналитическая кривая практически совпадают в полосе пропускания, следовательно математическая модель достаточно точно отражает физический процесс объекта для этих параметров, рисунок, б). При токе 3 А для нефти наблюдается наибольшая погрешность, которая составляет 8 % в полосе пропускания; это показывает, что именно для этого случая допущения, которые были приняты, оказывают наибольшее влияние на математическую модель.

**Выводы**

1. Создана линеаризованная математическая модель в форме системы нелинейных алгебраических уравнений, позволяющая с использованием граничных частот амплитудно-частотных характеристик идентифицировать параметры механического колебательного контура.
2. На примере вибрационного электромеханического преобразователя энергии показана возможность определения параметров резонансного контура на основе экспериментальных данных по виброускорению, виброскорости, перемещению с погрешностью до 8 %.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Романов В.А., Сапожников С.Б. Идентификация параметров демпфирования системы с одной степенью свободы по затухающим колебаниям // Динамика, прочность и износостойкость машин. – 2002. – № 10. – С. 38–42.
2. Глазырин А.С., Данекер В.А., Кособуцкий А.А. Свободно-вынужденные колебания в механической системе виброустойчивого электропривода на резонансной частоте // Электромеханика, электротехнологии и электроматериаловедение: Труды V Междунар. конф. МКЭЭЭ. – Крым, 2003. – Т. 1. – С. 786–789.

3. Глазырин А.С. Разработка систем питания и автоматического управления вибрационными электромагнитными активаторами: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2004. – 178 с.
4. Цурпал С.В., Глазырин А.С. Бездатчиковый электромагнитный вибропривод // Современные техника и технологии: Труды XIV Междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 2008. – Т. 1. – С. 425–427.

Поступила 22.03.2010 г.