УДК 539.12

В.Г.БАГРОВ, В.В.БЕЛОВ**, А.Ю.ТРИФОНОВ*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В работе проведен краткий обзор основных результатов, полученных в рамках подхода Эренфеста в квазиклассическом приближении.

Традиционное квазиклассическое приближение в квантовой механике показывает, в каком смысле уравнение Гамильтона – Якоби является пределом при $\hbar \to 0$ соответствующего квантово-механического уравнения Шредингера

$$(-i\hbar\partial/\partial t + \hat{H}(t))\Psi = 0, \quad \Psi \in L_2(\boldsymbol{R}_x^n), \tag{1}$$

где самосопряженный в $L_2(\boldsymbol{R}_x^n)$ оператор Гамильтона $\hat{H}(t)$ есть функция некоммутирующих канонических переменных $\hat{x}_k$, $\hat{p}_s$, $k, s = 1, 2, \ldots, n$, с заданным порядком действия операторов $\hat{x}_k, \hat{p}_s = -i\hbar\partial/\partial x_s$:

$$\hat{H}(t) = H(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{x}, t), \quad \hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_s, \ldots, \hat{p}_n), \quad \hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Здесь и далее используется стандартное обозначение $L_2(\boldsymbol{R}_x^n) \equiv L_2(\boldsymbol{R}_n^n, d^n x)$, где $L_2(\boldsymbol{R}_x^n, d\mu)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi_1^* \varphi_2^* d\mu,$$

а L_2-норма есть $\|\varphi\| = \langle\varphi|\varphi\rangle$.

В свою очередь, интегрирование уравнения Гамильтона – Якоби эквивалентно интегрированию характеристической системы Гамильтона в фазовом пространстве $\boldsymbol{R}^{2n} = \{z = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}_p^n, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_x^n\}$ классической механической системы

$$\dot{z} = J\partial_z H, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}, \quad \boldsymbol{I} = \|\delta_{i,j}\|_{n\times n}, \tag{3}$$

где $H = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t)$ – вещественная гладкая функция на $\boldsymbol{R}^{2n} \times \boldsymbol{R}_t^1$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, а $\partial_z = (\nabla_p, \nabla_x)$.

При построении квазиклассических асимптотик центральную роль играют специальные n-параметрические семейства решений системы (3): $z = z(t,\alpha)$, $\alpha \in U_\alpha \subset \boldsymbol{R}_\alpha^n$, порождающие в фазовом пространстве n-мерные *лагранжевы* поверхности (многообразия) [1, 2]:

$$\Lambda_t^n = \{z, z = z(t,\alpha), \quad \alpha \in U_\alpha \subset \boldsymbol{R}^{2n}\},$$

на которых форма $\boldsymbol{pdx}$ замкнута.

Квазиклассические методы [1, 3–12], основанные на процедуре квантования ЭБК–ВКБ–Маслова, сопоставляют такому семейству траекторий $z(t,\alpha) = (\boldsymbol{p}(t,\alpha), \boldsymbol{x}(t,\alpha))$ квазиклассические волновые функции как в случае задачи Коши, так и в случае спектральной задачи (при дополнительном условии инвариантности поверхности $\Lambda_t^n \subset \boldsymbol{R}^{2n}$ относительно сдвигов по траекториям гамильтоновой системы (3): $\Lambda_t^n = \Lambda_t^0$, $t \in \boldsymbol{R}$). Напомним, что лагранжево многообразие Λ_0 называется инвариантным, когда $\Lambda_0 = g_t \Lambda_0$, где g_t – оператор сдвига по траекториям гамильтоновой системы.

Для задачи Коши

$$i\hbar\partial/\partial t = \hat{H}(t)\Psi, \quad \hat{H}(t) = H(\hat{\boldsymbol{p}}, x, t), \quad \hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla, \tag{4}$$

---

* Институт сильноточной электроники СО РАН
** Московский институт электроники и математики

$$\Psi\big|_{t=0} = \varphi_0(x)e^{iS_0(x)/\hbar}, \qquad S_0, \varphi_0 \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{5}$$

где φ_0 имеет компактный носитель, фронт осцилляций ВКБ-решения, имеющего почти всюду (вне окрестности фокальных точек) анзац вида [1, 3]

$$\Psi(x,t,\hbar) = \sum_j \varphi_0(x)e^{iS_j(x)/\hbar}e^{i\pi\mu_j}, \qquad \mu_j = \text{const} \in \boldsymbol{Z}, \tag{6}$$

полностью определяется областью «света» – проекцией $\pi_x\Lambda_t^n = D_t^n(t)$ поверхности Λ_t^n на конфигурационное пространство

$$\lim_{\hbar\to 0} \operatorname{supp} \Psi(x,t,\hbar) = D_t^n(t).$$

Именно в этом смысле ВКБ-решения (6) при $\hbar \to 0$ сосредоточены (локализованы) в момент времени t в окрестности ограниченного множества $D_x^n(t) \subset \boldsymbol{R}_x^n$, заполненного семейством «лучей»: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,\alpha)$, $\alpha \in U_\alpha$.

Мы начинали наше исследование со следующей проблемы: существуют ли динамические состояния квантовых систем, сосредоточенные в пределе при $\hbar \to 0$ в момент времени t в окрестности точки $D_x^0(t) = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,z_0)\}$ произвольного, но *фиксированного* луча $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,z_0)$, $0 \le t \le T$, где $(\boldsymbol{p}(t,z_0), \boldsymbol{x}(t,z_0)) = z(t,z_0)$ – гамильтонова траектория системы (3), *фиксированная* начальным условием $z_0 = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{R}^{2n}$.

Очевидно, что полное решение этой проблемы должно включать ответы на следующие вопросы:

1. В каком смысле квантовые динамические состояния сосредоточены при $\hbar \to 0$ в окрестности точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,z_0)$?

2. Каков «правильный» анзац таких состояний и каков класс начальных данных $K = K(z_0)$, $z \in \boldsymbol{R}^{2n}$ для задачи Коши (4), (5), приводящий к сосредоточенным при $\hbar \to 0$ состояниям?

3. Каков фактический безразмерный (возможно, изменяющийся со временем) параметр (пропорциональный некоторой степени $\hbar$, где $\hbar$ – постоянная Планка) меры сосредоточенности и на каком интервале времени $[0, T]$ ($T = T(z_0, \hbar)$ – время разрушения точности) понятие сосредоточенности квантовых состояний при $\hbar \to 0$ имеет смысл? (Здесь уместно напомнить весьма важную точку зрения, которую впервые четко высказал Ж. Лере [12]: «…квантование Маслова – это процесс некоторых приближенных вычислений, когда $\hbar$ считается бесконечно малой величиной и в процессе вычислений не сравнивается ее истинное физическое значение с порядком других рассматриваемых величин. Оно – истинное значение $\hbar$ – приписывается после завершения вычислений, предполагающих $\hbar$ бесконечно малой…» и «этот процесс будет оправдан, когда будут получены численные результаты, которые для наблюдаемых величин согласуются с экспериментом».)

Ответы на первые два вопроса для многомерной нестационарной нерелятивистской квантовой системы, описываемой уравнением Шрёдингера (1), даны в [13, 14].

Пусть $z_{\text{cl}}(t,z_0) = z(t,z_0) = \{\boldsymbol{p}(t,z_0), \boldsymbol{x}(t,z_0), 0 \le t \le T\}$ – фазовая траектория классической системы Гамильтона (3) с функцией Гамильтона $H = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t)$, где H – вейлевский символ гамильтониана $\hat{H}(t)$ (2).

Обозначим через $\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ волновую функцию в x-представлении, а через $\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ – волновую функцию в p-представлении. Они связаны соотношением

$$\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{p},t,\hbar) = F_{\hbar,x\to p}\Psi(\boldsymbol{p},t,\hbar) = \frac{1}{(2\pi i\hbar)^{n/2}}\int_{R^n} dx e^{-i\langle p,x\rangle/\hbar}\Psi(\boldsymbol{p},t,\hbar), \tag{7}$$

где $F_{\hbar,x\to p}$ – $\hbar^{-1}$ – преобразование Фурье [3]. Обозначим через $\Delta_{\alpha,\beta}^{\text{cl}(k)}$ центрированный относительно классической траектории $z_{\text{cl}}(t,z_0)$ момент k-го порядка ($k = 1, 2, \ldots$) оператора $\hat{z} = (\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{x})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ в состоянии $\Psi = \Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$:

$$\Delta_{\alpha,\beta}^{\text{cl}(k)}(t,z_0,\hbar) = \left\langle \Psi \middle| \hat{\Delta}_{\alpha,\beta}^{\text{cl}(k)} \middle| \Psi \right\rangle_{L_2}, \tag{8}$$

где $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}^{\text{cl}(k)}$ – оператор с вейлевским символом $\Delta_{\alpha,\beta}^{\text{cl}(k)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t) = \Delta\boldsymbol{p}^\alpha\Delta\boldsymbol{x}^\beta$; $|\alpha| + |\beta| = k$; α, β – мультииндексы $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in Z_+^n$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in Z_+^n$; $\Delta\boldsymbol{x}^\beta=\Delta x_1^{\beta_1}\cdots\Delta x_n^{\beta_n}$; $\Delta\boldsymbol{p}^\alpha=\Delta p_1^{\alpha_1}\cdots\Delta p_n^{\alpha_n}$; $\Delta x_i=x_i-x_i(t,z_0)$, $\Delta p_j=p_j-p_j(t,z_0)$, $i,j=\overline{1,n}$.

Аналогично определим квантово-механические моменты k-го порядка в состоянии Ψ:

$$\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar)=\left\langle\Psi\middle|\hat\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}\middle|\Psi\right\rangle_{L_2},\tag{9}$$

где $\hat\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}=\hat\Delta_{\alpha,\beta}$ – оператор с вейлевским символом

$$\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{p}-\langle\boldsymbol{p}\rangle)^\alpha(\boldsymbol{x}-\langle\boldsymbol{x}\rangle)^\beta,$$
$$\langle\boldsymbol{p}\rangle=\langle\Psi\,|\,\boldsymbol{p}\,|\,\Psi\rangle_{L_2},\qquad\langle\boldsymbol{x}\rangle=\langle\Psi\,|\,\boldsymbol{x}\,|\,\Psi\rangle_{L_2}.$$

Понятие сосредоточенности при $\hbar\to0$ состояний квантовой системы (1) подробно обсуждалось для одномерного [15] и многомерного [16] уравнений Шредингера, и нами [16] было дано следующее определение:

Определение 1. *Пусть* $z(t)=\{(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{x}(t)),\ 0\le t\le T\}$ – произвольная фазовая кривая в $\boldsymbol{R}^{2n}$ (*вообще говоря, не являющаяся решением классической системы Гамильтона* (3)).

Состояние $\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ *квантовой системы* (1) *назовем квазиклассически сосредоточенным класса* $\boldsymbol{CS}_S(z(t),N)=\boldsymbol{CS}_S(z(t),N,\hbar)$ ($\Psi\in\boldsymbol{CS}_S(z(t),N)$), *если*:

(i) *существуют обобщенные пределы*

$$\begin{aligned}&\lim_{\hbar\to0}|\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)|^2=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t)),\\&\lim_{\hbar\to0}|\widetilde\Psi(\boldsymbol{p},t,\hbar)|^2=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}(t));\end{aligned}\tag{10}$$

(ii) *существуют квантовые моменты*

$$\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar),\qquad 0\le k\le N.$$

Было доказано на физическом уровне строгости [16], что если существует решение уравнения Шредингера (1) класса $\boldsymbol{CS}_S(z(t),N)$, то

1) фазовая траектория $z(t)$ есть фазовая траектория соответствующей классической системы (3), т.е. $z(t)=z_{\rm cl}(t,z_0)$, $z_0=z(0)$;

2) при условии максимальной классичности ($\|\Delta x_k\Psi\|\cdot\|\Delta\hat p_k\,\Psi\|\sim\hbar,\ k=\overline{1,n}$) в этих состояниях справедливы следующие асимптотические при ($\hbar\to0$) оценки:

$$\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar)=O(\hbar^{k/2}),\qquad\Delta^{{\rm cl}(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar)=O(\hbar^{k/2}),\qquad k=\overline{1,N},\tag{11}$$

причем $\Delta^{{\rm cl}(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar)$, $\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}(t,\hbar)$ определены в (8), (9) соответственно.

Очевидно, что условие (ii) есть требование на существование гладких порядка N и быстро убывающих на бесконечности решений уравнения (1), а (10) – условия на анзац таких решений.

Замечание 1. *Для квазиклассически сосредоточенных состояний вида* $\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)=N_\hbar\exp\{[\alpha(t)+\beta(t)x+\gamma(t)x^2]/\hbar\}$ *это утверждение было фактически доказано для одномерного* [17–20] *и многомерного* [18] *уравнений Шредингера методом минимизации функционала* $\langle\Psi|(-i\hbar\partial_t+\hat H(t))|\Psi\rangle$ (*см. также* [21]).

Из (11), в частности, следует, что квазиклассически сосредоточенные состояния (если они существуют) реализуют соответствие квантовой (1) и классической (3) систем в «слабом» смысле: квантовые средние по таким состояниям от операторов координат и импульсов в пределе при $\hbar\to0$ являются решениями классических (гамильтоновых) уравнений движения

$$\lim_{\hbar\to0}\langle z\rangle=z_{\rm cl}(t,z_0),\qquad 0\le t\le T.\tag{12}$$

Условие (12) было названо [22, 23] условием траекторной когерентности.

Существенно отметить, что условие (12) имеет предельный ($\hbar\to0$) характер. Уже в случае гамильтониана Шредингера

$$\hat H=\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}+V(\boldsymbol{x}),\qquad\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\qquad\hat{\boldsymbol{p}}=-i\hbar\nabla,\tag{13}$$

выполнение точного равенства

$$\langle z\rangle = z_{\text{cl}}(t,z_0), \qquad \forall\, \hbar \in\,]0,1[, \tag{14}$$

при всех значениях параметра $\hbar$ возможно (как следует из теоремы Эренфеста [24]) лишь для квадратичного потенциала (в многомерном случае – для гамильтонианов, «квадратичных по координатам и импульсам»).

Замечание 2. *Именно в этой ситуации Шредингер привел пример такого состояния стационарного осциллятора* [25], *для которого справедливо равенство* (14), *причем при любом выборе начальной точки* z_0 *фазового пространства классической системы. Впоследствии критерий Шредингера* (14) *«максимальной классичности» состояний квантовой системы привел к открытию подобных состояний для электромагнитного поля, которые стали называться когерентными* [26, 27] (*обобщенными когерентными, или сжатыми, состояниями*) *и для других квадратичных квантовых систем* [28–36] (*более полная библиография по этому вопросу приведена, например, в* [28, 29, 35]).

Замечание 3. *Многомерное обобщение результата Шредингера* (*для произвольного нестационарного квадратичного по операторам* $\hat{x}, \hat{p} = -i\hbar\nabla$ *гамильтониана*) *впервые было получено, по-видимому, Н.А. Черниковым* [34].

Замечание 4. *Для неквадратичных систем специального вида в серии работ Нието с соавторами* [37–41] *были построены когерентные состояния как точные решения уравнения Шредингера.*

Предельный характер условий (10) и асимптотический – условий (11) дает естественную возможность использовать при построении квазиклассически сосредоточенных состояний *не точные*, а *приближенные* при $\hbar \to 0$ решения исходного уравнения (1) при условии, что известна оценка их точности по параметру $\hbar$, $\hbar \to 0$.

Пусть Ψ_{as} – асимптотическое (mod $\hbar^M$, $M \geq 1+\delta$, $\delta > 0$) при $\hbar \to 0$ решение уравнения (1) на интервале $[0, T]$, т.е.

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}(t)\right]\Psi_{\text{as}}^{(l)}(\boldsymbol{x},t,\hbar) = g^{(M)}(\boldsymbol{x},t,\hbar), \tag{15}$$

$$M \geq 1+\delta, \quad \delta > 0, \quad l = 2M-3,$$

где

$$\max_{0\leq t\leq T} \| g^{(M)}(\boldsymbol{x},t,\hbar)\|_{L_2} = O(\hbar^M), \quad \hbar \to 0.$$

Тогда стандартными рассуждениями доказывается существование такого точного решения Ψ уравнения (1) при $t \in [0, T]$, что

$$\Psi = \Psi_{\text{as}}^{(l)}(\boldsymbol{x},t,\hbar) + g_1^{(M)}(\boldsymbol{x},t,\hbar), \tag{16}$$

где

$$\max_{0\leq t\leq T} \| g_1^{(M)}(\boldsymbol{x},t,\hbar)\|_{L_2} = O(\hbar^{M-1}), \qquad \hbar \to 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 2. *Будем называть квазиклассически сосредоточенными с точностью до* $O(\hbar^{M-1})$, $\hbar \to 0$, (mod $\hbar^{M-1}$) *на фазовой траектории* $z(t,z_0)$ *состояниями квантовой системы с гамильтонианом* $\hat{H}(t)$ (4) *асимптотические* (mod $\hbar^M$, $\hbar \to 0$) *решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям Определения* 1 *для моментов порядка* $k \in \boldsymbol{N}$, $k \leq N$. *Множество таких состояний обозначим* $\boldsymbol{CS}_S^{(2M)}(z(t),N)$.

Замечание 5. *Как следует из* (18), *если для произвольного* $1 < M < \infty$ *уравнение* (4) *имеет решения из класса* $\boldsymbol{CS}_S^{(2M)}(z(t),N)$, *то оно имеет* (*точные*) *решения и из класса* $\boldsymbol{CS}_S(z(t),N)$.

В работе [14] мы построили квазиклассически сосредоточенные с любой степенью точности по $\hbar \to 0$ состояния $\Psi_{\text{as}}^{(M)}$ класса $\boldsymbol{CS}_S^{(M+3)}(z(t),\infty)$, $M = \overline{0,\infty}$, для многомерной нестационарной квантовой системы с гамильтонианом $\hat{H}(t)$, вейлевский символ которого удовлетворяет предположению 1. Затем в качестве нетривиального приложения мы дали строгое обоснование следующему утверждению: в классе квазиклассически сосредоточенных состояний уравнение типа Шредингера (1) эквивалентно (с любой степенью точности по $\hbar$, $\hbar \to 0$) (в смысле вычисления квантовых средних для произвольных наблюдаемых с символом, удовлетворяющим предположению 1) системе обыкновенных дифференциальных уравнений, названной системой Гамильтона–Эренфеста (M-системой).

Эта система определяет (в каждом порядке по $\hbar$, $\hbar \to 0$) «фазовую траекторию» квантовой частицы

$$z(t,\hbar) = \langle \Psi \,|\, \hat{z} \,|\, \Psi \rangle, \qquad \Psi \in \boldsymbol{CS}_S(z(t, z_0), N+3),$$

в пространстве средних с учетом влияния всех квантовых флуктуаций $\Delta^{(k)}_{\alpha,\beta}$, $1 \le k \le N+3$.

В частном случае квадратичного символа оператора $\hat{H}(t)$ квантовые флуктуации не влияют на фазовую траекторию частицы, и система уравнений для первых моментов $z(t,\hbar)$ становится замкнутой и совпадающей с соответствующей классической системой. Этот факт хорошо известен со времен первых работ по квантовой механике [24, 25].

Замечание 6. *Для одномерного* [18–20] *и многомерного* [18] *случаев система уравнений, эквивалентная с точностью до* $O(\hbar^{3/2})$ *системе уравнений Гамильтона – Эренфеста, была получена (без оценки точности) путем минимизации функционала*

$$\left\langle \Psi \,|\, (-i\hbar\partial_t + \hat{H}(t)) \,|\, \Psi \right\rangle$$

по состоянию

$$\Psi(x,t,\hbar) = N_\hbar \exp\left\{ \frac{i}{h}\left[S(t) + p(t) + (x - x(t)) + \frac{1}{2} Q(t)(x - x(t))^2 \right]\right\},$$

а новыми динамическими переменными фактически являются реальная и мнимая части $Q(t)$. *В серии работ* [42–46] *были рассмотрены простейшие свойства и приложения этой системы уравнений.*

В качестве приложения квазиклассически сосредоточенных состояний были построены в явном виде квазиэнергетические спектральные серии $[\Psi_{\varepsilon_\nu}, \varepsilon_\nu]$ [47] для периодически зависящих от времени гамильтонианов. Такие серии в пределе $\hbar \to 0$ отвечают движению классической системы по замкнутой устойчивой фазовой траектории. Для этих квазиэнергетических состояний вычислена в квазиклассическом приближении (с точностью до $O(\hbar^{1/2})$) геометрическая фаза Ааронова–Ананда γ_{ε_ν} [48] (см. также обзор [49]). Здесь важно подчеркнуть, что указанная точность приближения для фазы γ_{ε_ν} диктует необходимость использовать состояния Ψ_{ε_ν}, удовлетворяющие исходному уравнению (1) с точностью не ниже $O(\hbar^{5/2})$. (Напомним, что подобная ситуация имеет место в теории спонтанного излучения [51, 52].) Далее был рассмотрен случай, когда гамильтониан квантовой системы зависит от времени t через набор медленно меняющихся T-периодических функций $R(t) = \{R_j(t)\}$, $j = \overline{1,N}$. Получено асимптотическое разложение величины γ_{ε_ν} по параметру адиабатичности T^{-1}. Показано, что в нулевом приближении фаза Ааронова–Ананда γ_{ε_ν} совпадает с фазой Берри [50].

Для построения базиса $\{ \Psi^{(M)}_\nu(\boldsymbol{x},t,\hbar)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\,\nu\,| = \overline{1,\infty} \}$ в пространстве квазиклассически сосредоточенных состояний $\boldsymbol{CS}^{(M+3)}_S(z(t),\infty)$ мы использовали технику квазиклассических асимптотик с комплексными фазами, основанную на так называемой теории комплексного роста Маслова [53, 54].

Состояния $\Psi^{(N)}_\nu(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0)$, которые мы построили в рамках этого подхода, названы *квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями* (ТКС) [22, 23]. Они являются решениями исходного уравнения типа Шредингера (1) с точностью до $O(\hbar^M)$, где $M = (N+3)/2$, $N = \overline{0,\infty}$, и удовлетворяют условию траекторной когерентности (12).

Они имеют вид ВКБ-решений с комплексной фазой

$$\Psi^{(N)}_\nu(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0) = e^{iS(\boldsymbol{x},t)/\hbar}\varphi^{(N)}_\nu(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0), \qquad \operatorname{Im} S(\boldsymbol{x},t) \ge 0, \tag{17}$$

$$S(\boldsymbol{x},t) = A(t) + \langle \boldsymbol{b}(t), (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t))\rangle + \frac{1}{2}\langle(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t)), Q(t)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t))\rangle,$$

$$\operatorname{Im} Q(t) = D(t) > 0, \qquad A(t) \in \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{b}(t) \in \boldsymbol{R}^n,$$

где множество нулей мнимой части фазы S есть в точности «луч» $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t,z_0)$, а амплитуда $\varphi_\nu^{(N)}$ представляется асимптотическим рядом по полуцелым степеням $\hbar$, $\hbar \to 0$,

$$\varphi_\nu^{(N)}(\boldsymbol{x},t,\hbar) = \sum_{k=0}^{N} \hbar^{k/2} \varphi_\nu^{(k)}\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t)}{\sqrt{\hbar}}, t\right).$$

При этом оказывается, что главный член асимптотики $\Psi_\nu^{(0)} = e^{iS(x,t)/\hbar}\varphi_\nu^{(0)}(x,t,\hbar)$ удовлетворяет условию траекторной когерентности (12) точно, т.е. критерию (14) – при любых значениях мультииндекса $\nu \in \boldsymbol{Z}_+^n$, $\hbar \in]0,1[$.

Вакуумное траекторно-когерентное состояние, отвечающее $\nu = 0$, имеет форму гауссова волнового пакета, минимизирующего обобщенное соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона [55] (см. также [56, 57]) в следующем смысле: ранг $2n \times 2n$ матрицы F равен n, где

$$F = \Delta_2(t) + i\hbar J/2, \tag{18}$$

$\Delta_2(t)$ – матрицы дисперсий в состоянии $\Psi_\nu^{(0)}(x,t,\hbar,z_0)\big|_{\nu=0}$,

$$\Delta_2(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{pp} & \sigma_{px} \\ \sigma_{xp} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \sigma_{zz} = \frac{1}{2}\left\|\left\langle \left(\hat{z}_j \hat{z}_k + \hat{z}_k \hat{z}_j - \langle \hat{z}_j \rangle \langle \hat{z}_k \rangle\right)\right\rangle\right\|_{2n\times 2n}, \tag{19}$$

J – единичная симплектическая матрица (3).

Для квадратичных квантовых систем $\Psi_\nu^{(0)}$ является точным (квазиклассически сосредоточенным) решением уравнения Шредингера (1). В этом случае квазиклассические ТКС дают нестандартную параметризацию множества всех сжатых когерентных состояний (подробнее об этом см. [58]) посредством ансамбля классических фазовых траекторий $z(t,z_0)$, где $z_0 = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{R}^{2n}$, и начальных дисперсий $\Delta_2(0)$ волнового пакета $\Psi_\nu^{(0)}\big|_{t=0}$.

Кратко остановимся на истории развития понятия квазиклассической сосредоточенности.

В физической литературе представление о квантово-механических состояниях в форме волновых пакетов, локализованных в окрестности классического движения, возникло сразу же, как только Эренфест сформулировал свой подход [24] к проблеме соответствия результатов нерелятивистской квантовой и классической механик. Прагматическая сторона этого подхода по существу связана с построением волновых пакетов как решений (точных или приближенных по $\hbar \to 0$) уравнения Шредингера (13), удовлетворяющих условию траекторной когерентности (12).

Основная идея конструкции таких решений базируется на квадратичной аппроксимации точного гамильтониана в окрестности фазовой классической траектории и имеет долгую историю. Как отмечал Литлджон в своем обзоре [59], «it has certainly been used in many isolated instances for many years, …, for example, in the use of «Gaussian beams» (Келлер [60], Дешамп [61])».

Одной из первых строгих работ, реализующих эту идею для одномерного уравнения Шредингера, была работа Хеппа [62]. В рамках операторного формализма в ней была выделена унитарная группа, описывающая в первом приближении по $\hbar \to 0$ эволюцию квантовых флуктуаций около фазовой классической траектории $z_{\text{cl}}(t,z_0)$. На всюду плотном в $L_2(\boldsymbol{R})$ множестве начальных когерентных состояний $\Psi(0)$, центрированных относительно произвольной точки $z_0 = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0)$ фазового пространства, эта группа сильно сходится при $\hbar \to 0$ к оператору эволюции квадратичной системы, гамильтониан которой есть чисто квадратичная часть линеаризации точного гамильтониана около $z_{\text{cl}}(t,z_0)$.

Как следствие, Хепп вычислил классический предел для квантово-механических функций корреляции и получил, в частности, соотношение (12). Впоследствии Зуччини [63] обобщил эти результаты с любой степенью точности по степеням $\sqrt{\hbar}$, $\hbar \to 0$, на многомерное уравнение Шредингера во внешнем электромагнитном поле

$$\left[-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A(x)\right)^2 + e\Phi(x)\right]\Psi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,$$

а Мошелла [64] – на случай внешних полей Янга–Миллса. Существенным техническим моментом этих работ является предложенное в [62] симметричное представление канонических коммутационных соотношений для операторов координат и импульсов в виде

$$\hat{x}_\hbar = \sqrt{\hbar}\xi, \qquad \hat{p}_\hbar = -i\sqrt{\hbar}\frac{d}{d\xi}. \tag{20}$$

Но, по-видимому, В.М. Бабич и Ю.П. Данилов первыми последовательно использовали идею аппроксимации точного гамильтониана

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \tag{21}$$

для построения асимптотических по $\hbar \to 0$ (в смысле (15)) решений многомерного уравнения Шредингера, локализованных в окрестности классической траектории. В малоизвестной и все еще малодоступной (ссылки на нее отсутствуют в монографии [65]) работе [66] они предложили анзац таких локализованных решений в виде произведения многомерного гауссова пакета и осциллирующей амплитуды φ_ν, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$, где φ_ν – многомерный аналог полиномов Эрмита. Технические детали этой работы основываются на локальной замене координат $\xi' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\rm cl}(t)$ в окрестности «луча» $\boldsymbol{x}_{\rm cl}(t)$ в предположении, что $\|\xi'\| << \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\rm cl}(t)\|$. Очевидно, что переход к координатам $\xi = \sqrt{\hbar}\xi'$ эквивалентен переходу к симметричному представлению (20) канонических коммутационных соотношений относительно операторов «малых» отклонений от классической фазовой траектории $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\hbar = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\rm cl}(t) = \sqrt{\hbar}\xi$, $\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_\hbar = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{\rm cl}(t) = -i\sqrt{\hbar}\partial/\partial\xi$. Ими же были построены высшие приближения для амплитуды φ_0 [66].

В физической литературе аппроксимацию такого же типа использовал Хеллер (но без исследования, как и в [59], вопроса: с какой точностью приближенные волновые пакеты гауссовой формы аппроксимируют точное решение). В замечательной серии работ Хеллера с соавторами [67–77] были рассмотрены различные аспекты динамики гауссовых пакетов и даны приложения к широкому кругу прикладных проблем, включая и классические хаотические системы.

Для многомерного нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (21) строгое рассмотрение эволюции гауссова пакета как асимптотики по $\hbar \to 0$ с оценкой точности $O(\hbar^{1/2})$ в норме $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ было проведено Хагедорном [78]. Он же получил [79] для одномерного уравнения Шредингера со скалярным потенциалом (13) асимптотические решения задачи Коши с точностью $O(\hbar^{1/2})$ для достаточно больших l в классе начальных условий, представляющих собой произведение сжатого состояния $e^{ip_0(x-x_0)/\hbar}e^{iQ_0(x-x_0)^2/2\hbar}$, $\operatorname{Im} Q_0 > 0$, сосредоточенного в окрестности точки $z_0 = (p_0, x_0)$ фазового пространства, и амплитуды $\varphi_J([x-x_0]\sqrt{\operatorname{Im} Q_0}/\sqrt{\hbar})$, где $\varphi_J(y)$ – конечная линейная комбинация стандартных полиномов Эрмита $H_n(y)$, $0 \le n \le J$. В контексте данной работы такие решения суть конечная суперпозиция квазиклассических траекторно-когерентных состояний класса $\boldsymbol{CS}_S^{(N)}(z(t),\infty)$, $N = l$.

Впервые квазиклассические траекторно-когерентные состояния (ТКС) для скалярных уравнений квантовой механики – Шредингера, Клейна–Гордона, релятивистского аналога уравнения Шредингера в произвольном электромагнитном поле $A^\mu(\boldsymbol{x},t) = (\Phi(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t))$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ – были построены в работах [22, 23]. Они представляют собой асимптотические решения этих волновых уравнений с точностью до $O(\hbar^{1/2})$ в норме $L_2(\boldsymbol{R}^3)$, удовлетворяющие условию траекторной когерентности (12). (В релятивистском случае классическая траектория $z_{\rm cl}(t,z_0)$, $z_0 \in \boldsymbol{R}^6$, есть решение соответствующих уравнений Лоренца в гамильтоновой форме.) В частности, для оператора Шредингера квазиклассические ТКС $\Psi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0)$, $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $\nu_j = \overline{0,\infty}$, удовлетворяют этому условию точно (см. (14)), образуют ортонормированный базис в $L_2(\boldsymbol{R}^3)$ при фиксированных $\hbar$ и z_0 и имеют вид

$$\Psi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0) = \frac{[\hat{\boldsymbol{a}}^+(t,z_0)]^\nu}{\sqrt{\nu!}}\Psi_0^{(0)}. \tag{22}$$

Здесь $\Psi_0^{(0)} = \Psi_0^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0)$ – вакуумное траекторно-когерентное состояние суть сжатое состояние квадратичной квантовой системы, гамильтониан которой есть линеаризация оператора Шредингера (1) в окрестности заданной фазовой траектории $z_{\rm cl}(t,z_0)$.

Квазиклассический волновой пакет имеет вид [22, 23]

$$\Psi_0^{(0)} = N_\hbar \exp\{i\hbar^{-1}[S_{\text{cl}}(t,z_0) + \langle \boldsymbol{p}_{\text{cl}}(t,z_0),(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t,z_0))\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t,z_0)),Q(t,z_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t,z_0))\rangle\Big]\Big\}\sqrt{\det[\operatorname{Im} Q(t,z_0)]}\,, \tag{23}$$

где $S_{\text{cl}}(t, z_0)$ – классическое действие на траектории $z_{\text{cl}}(t, z_0)$, $N_\hbar$ – нормировочная постоянная, и 3×3-матрица $\boldsymbol{Q}(t, z_0)$ – комплексное решение матричного уравнения Рикатти:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} + H_{xx}(t) + \boldsymbol{Q}H_{px}(t) + H_{xp}(t)\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}H_{pp}(t)\boldsymbol{Q} = 0,$$

$$\boldsymbol{Q}(0) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3), \qquad \operatorname{Im} b_j > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь $H_{xx}(t)$, $H_{px}(t)$, $H_{xp}(t)$, $H_{pp}(t)$ обозначают матрицы, составленные из соответствующих производных, вычисленных в точке $z(t, z_0)$ классической траектории, а именно: $H_{xx}(t) = H_{xx}(\boldsymbol{p}(t, z_0), \boldsymbol{x}(t,z_0), t)$.

В формуле (21) операторы $\hat{\boldsymbol{a}}^+(t,z_0) = (\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+, \hat{a}_3^+)$ и эрмитово сопряженные к ним операторы $\hat{\boldsymbol{a}}(t,z_0) = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ – обобщенные операторы рождения и уничтожения (со стандартными коммутационными соотношениями) суть приближенные с точностью до $\hat{O}(\hbar^{3/2})$ динамические симметрии уравнения Шредингера [22].

Вакуумное ТК-состояние минимизирует в момент $t = 0$ соотношения неопределенностей Шредингера [56]:

$$\sigma_{x_j x_j}\sigma_{p_j p_j} - \sigma_{p_j x_j}^2 \geq \hbar^2/4, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{24}$$

и при $t > 0$ удовлетворяет условию (i) определения квазиклассически сосредоточенных состояний.

Коммутируя в (22) операторы $\hat{a}^+(t,z_0)$ с $\Psi_0^{(0)}$, квазиклассические траекторно-когерентные состояния (класса $\boldsymbol{CS}_S^{(N)}(z(t),\infty)$, $N = 3$) можно представить в виде

$$\Psi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{x},t,z_0,\hbar) = \Psi_0^{(0)}\frac{[\hat{\Lambda}^+(t,z_0)]^\nu \cdot 1}{\sqrt{\nu!}}. \tag{25}$$

Здесь $[\hat{\Lambda}^+(t,z_0)]^\nu \cdot 1$ – обобщенные трехмерные полиномы Эрмита [83, 84], образующие ортонормированный набор (при каждом фиксированном значении $\hbar$, z_0, t) в гильбертовом пространстве $L_2(\boldsymbol{R}^3, d\mu)$, где нормированная мера $d\mu = \left|\Psi_0^{(0)}\right|^2 d\boldsymbol{x}$.

В случае многомерного уравнения Шредингера (со стационарным скалярным потенциалом (21)) Хагедорн использовал [80] несколько иной (не фоковский) базис в $L_2(\boldsymbol{R}^3, d\mu)$ многомерных полиномов Эрмита для построения асимптотических решений (с невязкой, норма которой $L_2(\boldsymbol{R}_x^n)$ имеет порядок $\hbar^{N/2}$, $N \geq 3$), сосредоточенных при $\hbar \to 0$ (см. Определение 1) в окрестности произвольного решения $z_{\text{cl}}(t, z_0)$ соответствующего уравнения Ньютона. Обоснование асимптотики здесь, как и ранее [63, 81, 82], проводится на основе формулы Троттера для произведения [85], поэтому стационарность потенциала существенна.

Для строго гиперболических систем Ральстон [86] построил локализованные асимптотические решения без использования ортогонального в $L_2(\boldsymbol{R}_x^n)$ базиса. Аналогичные решения, локализованные около фазовой траектории, исследовались В.С. Булдыревым и В.Е. Номофиловым [87] для эллиптических систем.

Траекторно-когерентные состояния высших порядков (модуль невязки которых по норме $L_2(\boldsymbol{R}_x^n)$ имеет порядок $\hbar^{N/2}$, $N \geq 3$) для операторов Шредингера, Клейна–Гордона и для уравнений волнового типа соответственно в случае переменных по t коэффициентов, зависящих от одной пространственной координаты, были построены В.В.Беловым и А.Г.Караваевым [88–90].

Отметим, что из явного вида траекторно-когерентных состояний $\Psi_\nu^{(0)}$ [22, 23] следует его представление в виде

$$e^{i\langle x_0, p_0\rangle/2\hbar}\Psi_0^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0) = e^{i\gamma(t)/\hbar}\hat{T}(z(t,z_0))\hat{M}(S(t))|\nu\rangle_b, \tag{26}$$

где $\hat{T}(z)$ – гейзенберговский оператор сдвига на вектор $z = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ в фазовом пространстве классической системы,

$$\gamma(t) = S_{\text{cl}}(z(t, z_0)) + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0\rangle - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{x}(t, z_0), \boldsymbol{p}(t, z_0)\rangle,$$

$\hat{M}(S(t))$ – метаплектический оператор

$$\hat{T}(z(t))\hat{M}(S(t))\hat{b}_k\hat{M}^+(S(t))\hat{T}^+(z(t)) = \hat{a}_k(t, z_0), \tag{27}$$

$$\hat{b}_k = \frac{|b_k|}{\sqrt{2\hbar \operatorname{Im} b_k}}\left(\frac{1}{b_k}\hat{p}_k - \hat{x}_k\right), \qquad |\nu\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{\nu!}}(\hat{\boldsymbol{b}}^+)^\nu|0\rangle_b,$$

$$\hat{b}_k|0\rangle_b = 0, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Состояние $|0\rangle_b$ есть гауссов волновой пакет формы

$$|0\rangle_b = N_\hbar \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\sum b_j x_j^2\right], \qquad b_j \in \boldsymbol{C}, \qquad \operatorname{Im} b_j > 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

В известном обзоре [59] Литлджон предложил представление аналогичного вида в качестве квазиклассического пропагатора волновых пакетов (a near orbit approximation) для волновых пакетов $|0\rangle$, не являющихся гауссовыми (фактически для $\boldsymbol{CS}_S^{(3)}(z(t),\infty)$), и установил связь квазиклассической динамики волновых пакетов с теорией метаплектических групп и преобразований.

Метод построения квазиклассически сосредоточенных состояний класса $\boldsymbol{CS}_S^{(N+3)}(z(t),\infty)$ с аналитической точки зрения основывается, как уже было отмечено, на аппроксимации точного гамильтониана (1) рядом Тейлора по степеням операторов $\Delta\hat{x}_j = \hat{x}_j - x_{j\text{cl}}(t, z_0)$, $\Delta\hat{p}_j = \hat{p}_j - p_{j\text{cl}}(t, z_0)$, $\hat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial x_j$, $j = \overline{1,n}$, для которых справедливы асимптотические оценки (15). С той же точки зрения эти операторы описывают «малые» при $\hbar \to 0$ отклонения операторов координат и импульсов от классической фазовой траектории на функциях ВКБ-типа с комплексной квадратичной фазой, в частности на квазиклассических траекторно-когерентных состояниях $\Psi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\hbar,z_0)$ (21).

Эти же оценки справедливы и для линейных комбинаций таких состояний

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \Psi_\nu^{(N)} = \Psi^{(N)}$$

при условии, что коэффициенты c_ν убывают при $|\nu| \to \infty$ быстрее любой степени ν, в частности, для любого состояния $\Psi = \Psi((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(t, z_0))/\sqrt{\hbar}, t)$, где $\Psi(\eta, t)$ – функция из класса Шварца $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)$ по переменной η. Недавно Ариа [91] исследовал свойства квазиклассических асимптотик такого типа для одномерного уравнения Шредингера.

Поэтому главная техническая проблема обоснования локализованных асимптотик (mod $O(\hbar^M)$, см. формулу (16)) заключается в оценке остаточного члена $\hat{R}_m$ операторного ряда Тейлора на функциях такого класса. Мы наложили на вейлевский символ оператора $\hat{H}(t)$ такие условия (см. [85]), при которых остаточный член заведомо имеет требуемую точность по $\hbar \to 0$ в норме $L_2(\boldsymbol{R}^n)$. Но детали полного доказательства этого факта мы опускаем (ограничившись физическим уровнем точности) из следующих соображений.

Для символа $H = \boldsymbol{p}^2/2 + V(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, техника получения таких оценок хорошо известна и приведена, например, в [62] для $n = 1$ и в работах Робинсона [81, 82] (см. также [63]) для многомерного случая. Для рассматриваемых нами символов общего вида аналогичные оценки могут быть получены из общей теории псевдодифференциальных операторов, например на основе операторных методов [53].

Отметим, что построение полного ортонормированного набора состояний $\Psi_\nu^{(N)} \in \boldsymbol{CS}_S^{(N+3)}(z(t),\infty)$ эквивалентно построению с точностью до $O(\hbar^{(N+1)/2})$ асимптотики функции Грина уравнения (1) в классе начальных данных, являющихся также квазиклассически сосредоточенными в окрестности начальной точки $z_0 = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{R}^{2n}$. Соответствующее асимптотическое разложение приведено нами в [13].

Близкий подход к построению функции Грина в классе состояний, квазиклассически сосредоточенных в окрестности классической траектории $x = X(\tau, x_0, x_1)$, $s \le \tau \le t$, являющейся решением краевой задачи $X|_{\tau=t} = x_0$, $X|_{\tau=t} = x_1$ и не имеющей фокальных точек, развит Осборном с соавторами [92–95]. В частности, ими рассмотрен вопрос о сходимости асимптотического разложения функции Грина для некоторых классов возмущений [94].

Заметим, что можно использовать другие базисы асимптотических решений в пространстве квазиклассически сосредоточенных состояний $\mathcal{CS}_S^{(N+3)}(z(t),\infty)$. Например, функции

$$\Psi_\alpha^{(N)}(x,t,z_0,\hbar) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} \Psi_\nu^{(N)}(x,t,z_0,\hbar) \tag{28}$$

образуют переполненную по параметру α систему. Такие состояния для $N = 0$ были исследованы В.В. Додоновым, В.И. Манько и Д.Л. Осиповым [58].

Комбескье [96], используя технику сжатых состояний, построила квазиклассически сосредоточенные состояния, локализованные в окрестности фазовой классической траектории, для одномерного уравнения Шредингера с зависящим от времени потенциалом и в окрестности точки покоя – для многомерного уравнения Шредингера.

В заключение отметим, что метод построения квазиклассических состояний для уравнения типа Шредингера (1) может быть перенесен на случай релятивистских волновых уравнений, в том числе и в кривом пространстве-времени. Соответствующие квантово-механические состояния для операторов Клейна–Гордона, Дирака, Дирака–Паули были построены в цикле работ [23, 102–115], а также для некоторых классов нелинейных уравнений [116, 117].

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 00-02-17696 и Минобразования РФ №.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П. Теория возмущения и асимптотические методы. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
3. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
4. Keller J.B. // Ann. Phys (N.Y.). – 1958. – V. 4. – № 2. – P. 180–188.
5. Маслов В.П. Метод ВКБ в многомерном случае // Дж. Хёдинг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965. – С. 177–237.
6. Мищенко А.А., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
7. Буслаев В.С. Квантование и метод ВКБ // Тр. МИАН. – 1970. – Т. 110. – С. 5–28.
8. Berry M.V., Mount K.E. // Rep. Prog. Phys. – 1972. – V. 35. – P. 315–397.
9. Voros A. // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1976. – V. 24A. – P. 31–90.
10. Кравцов Ю.А. // Акустический журнал. – 1968. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 1–24.
11. Thomson C.J., Chapman C.H. // Geophys. J. R. astr.Soc. – 1985. – V. 83. – P. 143–168.
12. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика. – М.: Мир, 1981. – 264 с.
13. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. // Annals of Phys. – 1996. – V. 246. – № 2. – P. 231–290.
14. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. // Лекционные заметки по теоретической и математической физике. – Т. 1, ч. 1. – Казань, 1996. – С. 15–136.
15. Багров В.Г., Белов В.В., Рогова А.М. // Теор. матем. физика. – 1992. – Т. 90. – № 1. – С. 84–94.
16. Bagrov V.G., Belov V.V., Rogova A.M., Trifonov A.Yu. // Modern Phys. Lett. B. – 1993. – V. 7. – № 26. – P. 1667–1675.
17. Рогова А.М. // Изв. вузов. Физика. – 1991. – Т. 34. – № 7. – С. 77–80.
18. Намиот В.А., Финкельштейн В.Ю. // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77. – № 3. – С. 884–898.
19. Tsue Y., Fujiwara Y., Kuriyama A., Yamamura M. // Progress of Theor. Phys. – 1991. – V. 85. – № 4. – P. 593–616.
20. Tsue Y., Fujiwara Y. // Progress of Theor. Phys. – 1991. – V. 86. – № 2. – P. 443–466.
21. Kay K.G. // Phys. Rev. A. – 1990. – V. 42. – № 7. – P. 3718–3725.
22. Багров В.Г., Белов В.В., Тернов И.М. // Теор. мат. физика. – 1982. – Т. 50. – № 3. – С. 390–396.
23. Bagrov V.G., Belov V.V., Ternov I.M. // J. Math. Phys. – 1983. – V. 24. – № 12. – P. 2855–2859.
24. Ehrenfest P. // Zeits. f. Phys. – 1927. – Bd. 45. – S. 455–457. (Рус. пер. Эренфест П. // Относительность. Кванты. Статистика. – М.: Наука, 1972. – С. 82–84.)
25. Schrödinger E. // Naturwissenschaften. – 1926. – Bd. 14. – H. 28. – S. 664–668. (Рус. пер. Шредингер Э. // Избр. тр. по квантовой механике. – М.: Наука, 1976. – С. 51–55).
26. Glauber R.J. // Phys. Rev. – 1963. – V. 130. – № 6. – P. 2529–2539.
27. Glauber R.J. // Ibid. – V. 131. – № 6. – P. 2766–2788.

28. Додонов В.В., Курмышев Е.В., Манько В.И. // Тр. ФИАН. – 1986. – Т. 176. – С. 128–150.
29. Малкин М.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
30. Рашевский П.К. // Усп. мат. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 3–110.
31. Klauder J.R. // J. Math. Phys. – 1963. – V. 4. – №. 8. – P. 1055 -1058.
32. Klauder J.R. // Ibid. – P. 1058–1073.
33. Klauder J.R. // Ibid. – 1964. – V. 5. – № 2. – P. 177–187.
34. Черников Н.А. // ЖЭТФ. – 1967. – Т. 53. – Вып. 3. – С. 1006–1017.
35. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применение. – М.: Наука, 1987. – 271 с.
36. Вольф К.Б., Klauder J.R. // Тр. ФИАН. – 1986. – Т. 176. – С. 96–127.
37. Nieto M., Simmons L. // Phys. Rev. D. – 1979. – V. 20. – № 6. – P. 1321–1331.
38. Nieto M., Simmons L. // Ibid. – P. 1332–1341.
39. Nieto M., Simmons L. // Ibid. – P. 1342–1350.
40. Nieto M. // Ibid. – 1980. – V. 20. – № 2. – P. 391–402.
41. Nieto M., Simmons L., Gutschick V.P. // Phys. Rev. D. – 1981. – V. 23. – № 4. – P. 927–933.
42. Tsue Y., Fujiwara Y. // Progress of Theor. Phys. – 1991. – V. 86. – № 2. – P. 469–489.
43. Fukui T., Tsue Y. // Ibid. – 1992. – V. 87. – № 3. – P. 627–649.
44. Yamamura M., Kuriyama A., Tsue Y. // Ibid. – 1992. – V. 88. – № 4. – P. 719–729.
45. Tsue Y. // Ibid. – 1992. – V. 88. – № 5. – P. 911–932.
46. Tsue Y., Kuriyama A., Yamamura M. // Ibid. – 1994. – V. 91. – № 1. – P. 49–67.
47. Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – V. 28. – P. 5653–5672.
48. Berry M.V. // Proc. Roy. Soc. London. – 1984. – V. A 392. – № 1802. – P. 45–58.
49. Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М. и др. // УФН. – 1990. – Т. 160. – № 6. – С. 1–49.
50. Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – V. 27. – № 18. – P. 6267–6286.
51. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. // J. Phys. A: Math. Gen.– 1993. – V. 26. – № 22. – P. 6431–6449.
52. Belov V.V., Boltovskiy D.V., Trifonov A.Yu. // Int. J. Mod. Phys. B. – 1994. – V. 8. – № 18. – P. 2503–2524.
53. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 544 с.; Maslov V.P. Operational Methods. – Moscow: Mir, 1976. – 503 p.
54. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.; Maslov V.P. The Complex WKB Method for Nonlinear Equations. I. Linear Theory. – Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1994. – 304 p.
55. Robertson H.P. // Phys. Rev. – 1934. – V. 46. – № 9. – P. 794–801.
56. Додонов В.В., Манько В.И. // Тр. ФИАН. – 1987. – Т. 183. – С. 5–70.
57. Dodonov V.V., Man'ko V.I. // Group Theoretical Methods in Physics. V. 1. – London, Paris, New York: Harwood Acad. Publ., 1985. – P. 591–612.
58. Dodonov V.V., Man'ko V.I., Osipov D.L. // Physica A. – 1990. – V. 168. – P. 1055–1072.
59. Littlejohn R.G. // Phys. Rep. – 1986. – V. 138. – № 1–2. – P. 193–291.
60. Keller J.B. // J. Opt. Soc. Am. – 1971. – V. 61. – № 1. – P. 40–43.
61. Deshamps G.A. // Proc. IEEE. – 1972. – V. 60. – № 9. – P. 1022–1035 (Рус. пер. Дешамп Ж.А. // Тр. ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1972. – Т. 60. – Вып. 9. – С. 5–20.)
62. Hepp K. // Commun. Math. Phys. – 1973. – V. 35. – P. 265–277.
63. Zucchini R. // Ann. of Phys. (NY). – 1985. – V. 159. – № 2. – P. 199–219.
64. Moschella U. // Ann. Inst. H. Poincar\'e. – 1989. – V. 51. – № 4. – P. 351–370.
65. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. – 465 с.
66. Бабич В.М., Данилов Ю.П. // Математические вопросы теории распространения волн. 2.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 15. – Л., 1969. – С. 47–65.
67. Heller E.J. // J. Chem. Phys. – 1975. – V. 62. – № 4. – P. 1544–1555.
68. Heller E.J. // Ibid. – 1976. – V. 65. – № 4. – P. 1289–1298.
69. Heller E.J. // Ibid. – 1977. – V. 66. – № 12. – P. 5777–5785.
70. Heller E.J. // Ibid. – 1977. – V. 67. – № 7. – P. 3339–3351.
71. Heller E.J. // Ibid. – 1981. – V. 75. – № 6. – P. 2923–2931.
72. Heller E.J. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 53. – P. 1515–1518.
73. Heller E.J. // Phys. Rev. A. – 1987. – V. 35. – № 3. – P. 1360–1370.
74. Davis M. J., Heller E.J. // J. Chem. Phys. – 1979. – V. 71. – № 8. – P. 3383–3395.
75. Davis M. J., Heller E.J. // Ibid. – 1981. – V. 75. – № 8. – P. 3916–3924.
76. Davis M. J., Heller E.J. // Ibid. – 1984. – V. 80. – № 10. – P. 5036–5048.
77. Davis M.J., Stechel E.B., Heller E.J. // Chem. Phys. Lett. – 1980. – V. 76. – P. 21–26.
78. Hagedorn G.A. // Commun. Math. Phys. – 1980. – V. 71. – P. 77–93.
79. Hagedorn G.A. // Ann. Phys. – 1981. – V. 135. – P. 58–70.
80. Hagedorn G.A. // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1985. – V. 45. – № 4. – P. 363–374.
81. Robinson S.L. // J. Math. Phys. – 1988. – V. 29. – № 2. – P. 412–419.
82. Robinson S.L. // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1988. – V. 48. – № 4. – P. 281–296.
83. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцедентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1967. – 301 с.
84. Додонов В.В., Климов А.В., Манько В.И. // Тр. ФИАН. – 1991. – Т. 200. – С. 56–105.

85. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 360 с.
86. Ralston J.V. // MAA Studies in mathematics, ed by W. Lillman. V. 23. – Mathematical Association of America, 1982.
87. Buldurev V.S., Nomofilov V.E. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1981. – V. 14. – № 7. – P. 1577–1585.
88. Белов В.В., Караваев А.Г. // Изв. вузов. Физика. – 1987. – Т. 30. – № 10. – С. 14–18.
89. Белов В.В., Караваев А.Г. // Там же. – 1989. – Т. 32. – № 5. – С. 43–48.
90. Белов В.В., Караваев А.Г. // Там же. – 1988. – Т. 31. – № 7. – С. 54–58.
91. Arai T. // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1993. – V. 59. – № 3. – P. 301–313.
92. Molzahn F.H., Osborn T.A., Fulling S.A. // Ann. of Phys. (N.Y.) – 1990. – V. 204. – № 1. – P. 64–112.
93. Molzahn F.H., Osborn T.A., Fulling S.A. // Ibid. – 1992. – V. 214. – № 1. – P. 102–141.
94. Molzahn F.H., Osborn T.A. // Ann. of Phys. (NY). – 1994. – V. 230. – № 2. – P. 343–394.
95. Corns R.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – V. 27. – № 2. – P. 593–607.
96. Combescure M. // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – № 11. – P. 3870–3880.
97. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. – Томск, 1989. – 42 с. / Препринт ТНЦ СО АН СССР № 5.
98. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // Class. Quantum Grav. – 1991. – V. 8. – P. 515–527.
99. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // Ibid. – P. 1349–1359.
100. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. / e-print quant-ph 9806017, 23 p.
101. Bagrov V.G., Belov V.V., Kondratyeva M.F., Rogova A.M., Trifonov A.Yu. // J. Moscow Phys. Soc. – 1993. – V. 3. – P. 1–12.
102. Белов В.В., Маслов В.П. // ДАН СССР. – 1989. – Т. 305. – № 3. – С. 574–577.
103. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // Class. Quantum Grav. – P. 1833–1846.
104. Bagrov V.G., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. // Ibid. – 1992. – V. 9. – P. 533–543.
105. Белов В.В., Маслов В.П. // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – Вып. 4. – С. 849–854.
106. Белов В.В., Кондратьева М.Ф. // Теор. матем. физика. – 1992. – Т. 92. – № 1. – С. 41–60.
107. Белов В.В. – Томск, 1989. – 33 с. / Препринт ТНЦ СО АН СССР № 56.
108. Багров В.Г., Белов В.В., Кондратьева М.Ф. // Теор. матем. физика. – 1994. – Т. 98. – № 1. – С. 48–55.
109. Белов В.В. – Томск, 1989. – 46 с. / Препринт ТНЦ СО АН СССР № 58.
110. Bagrov V.G., Belov V.V., Kondratyeva M.F., Rogova A.M., Trifonov A.Yu. // Particle Physics, Gauge Fields and Astrophysics: Proc. 5th and 6th Lomonosov Conf. on Elementary Particle Physics. – Yaroslavl, April 1992; Moscow, August 1993. – Rome: Accademia Nazilonale dei Lincei, 1994. – P. 132–142.
111. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. // Междунар. конф. «Геометризация физики – истоки, развитие и современные направления»: Тр. конф. – Казань, 1–5 ноября 1993 г. – Казань: Ремарк, 1994. – С. 66–77.
112. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. // Quantum Systems: New Trends and Methods: Proc. Inter. Workshop. – Minsk, 23–29 May 1994. – Singapore: World Scientific, 1994.
113. Белов В.В., Кондратьева М.Ф. // Мат. заметки. – 1994. – Т. 56. – Вып. 6. – С. 27–39.
114. Белов В.В., Кондратьева М.Ф. // Мат. заметки. – 1995. – Т. 58. – Вып. 8. – С. 233–245.
115. Белов В.В., Болтовский Д.В., Караваев А.Г. // Изв. вузов. Физика. – 1990. – Т. 33. – № 6. – С. 114–117.
116. Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu. // J. of Nonlinear Mathematical Physics. – 1999. – № 2. – P.127–138.
117. Жданеев О.В., Сережников Г.Н., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 1999. – Т. 41. – № 7. – С. 15–23.