Математика и механика. Физика

УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОГООБРАЗИЕ ГИПЕРКОНУСОВ ДРУГОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: lutchinin@mail.ru

Рассматриваются отображения аффинного пространства $\tilde{A}_p$ в многообразие гиперконусов аффинного пространства A_n. Аналитически и геометрически изучается структура фундаментальных геометрических объектов этих отображений в смысле Г.Ф. Лаптева.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, многомерные аффинные пространства.

Key words:
Differentiable mapping, multidimensional affine spaces.

Введение

В современной научной литературе, посвященной многомерной дифференциальной геометрии [1–7], сравнительно немного статей, относящихся к дифференцируемым отображениям. Особое место занимает статья Г.Ф. Лаптева [1], в которой с помощью фундаментального геометрического объекта строится инвариантная теория дифференцируемых отображений.

В работе изучаются фундаментальные геометрические объекты первого и второго порядков дифференцируемого отображения $\tilde{V}_p^N:\tilde{A}_p\to M_N$ аффинного пространства $\tilde{A}_p$ в многообразие M_N невырожденных гиперконусов аффинного пространства A_n. Аналитически и геометрически строятся инвариантные геометрические образы, ассоциированные с геометрическими объектами отображения $\tilde{V}_p^N$. Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, все функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается p-мерное аффинное пространство $\tilde{A}_p$, отнесённое к подвижному реперу $\tilde{R}=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}$, $(a,b,c=\overline{1,p})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{B}=\Theta^a\bar{\varepsilon}_a,\, d\bar{\varepsilon}_a=\Theta_a^b\bar{\varepsilon}_b;$$
$$D\Theta^a=\Theta^b\wedge\Theta_b^a,\, D\Theta_a^b=\Theta_a^c\wedge\Theta_c^b. \qquad (1)$$

Репер $\tilde{R}$ выбираем так, чтобы точка B была текущей точкой пространства $\tilde{A}_p$, тогда 1-формы Θ^a являются главными и за криволинейные координаты точки B можно принять первые интегралы линейно независимых 1-форм Θ^a.

1.2. Рассматривается n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному аффинному реперу $R=\{\bar{A},\bar{e}_i\}$, $(i,j,k,l=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениям

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\, de_i=\omega_i^k\bar{e}_k;$$
$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\, D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k. \qquad (2)$$

Обозначим через M_N – множество всех невырожденных гиперконусов q_{n-1}^2 второго порядка пространства A_n с соответствующими точечными вершинами Q.

Репер R выбираем так, чтобы

$$Q=A, \qquad (3)$$

тогда в его локальных точечных координатах гиперконус $q_{n-1}^2\in M_N$ определяется уравнением

$$g_{ij}x^ix^j=0. \qquad (4)$$

Следовательно, 1-формы ω^i и $\nabla g_{ij}=g_{kj}\omega_i^k-g_{ik}\omega_j^k$ являются базисными на многообразии M_N, $(N=(n(n+3)/2))$ и удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i;\; D\nabla g_{ij}=-\nabla g_{kj}\wedge\omega_i^k-\nabla g_{ik}\wedge\omega_j^k. \qquad (5)$$

1.3. Зададим отображение

$$\tilde{V}_p^N : \tilde{A}_p \to M_N, \quad (6)$$

которое каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ ставит в соответствие вполне определённый гиперконус $q^2_{n-1} \in M_N$ с точечной вершиной $A \in A_n$. Тогда дифференциальные уравнения этого отображения запишутся в виде:

$$\omega^i = A^i_a \Theta^a, \nabla g_{ij} = g_{ija} \Theta^a. \quad (7)$$

Двукратное продолжение этих дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям

$$\nabla A^i_a = A^i_{ab} \Theta^b; \nabla A^i_{ab} = A^i_{abc} \Theta^c;$$

$$\nabla g_{ija} = g_{ijab} \Theta^b; \nabla g_{ijab} = g_{ijabc} \Theta^c,$$

$$A^i_{[ab]} = 0; A^i_{[abc]} = 0; g_{ij[ab]} = 0; g_{ij[abc]} = 0. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем оператор ∇ является оператором дифференцирования, действующим по закону

$$\nabla T^{aj}_{ib} = dT^{aj}_{ib} - T^{aj}_{kb}\omega^k_i - T^{aj}_{ic}\Theta^c_b + T^{cj}_{ib}\Theta^a_c + T^{ak}_{ib}\omega^j_k.$$

Дифференциальным уравнениям (7)–(8) удовлетворяют компоненты фундаментальных геометрических объектов $\Gamma_1 = \{A^i_a, g_{ij}, g_{ijk}\}$ и $\Gamma_1 = \{A^i_a, g_{ij}, g_{ijk}, A^i_{ab}, g_{ijab}\}$ соответственно первого и второго порядков отображения (6) в смысле Г.Ф. Лаптева [1]:

2. Двумерные площадки аффинного пространства

2.1. В пространстве $\tilde{A}_p$ рассматривается кривая $k(t)$, описываемая точкой $B \in A_p$ и определяемая дифференциальным уравнением

$$\Theta^a = t^a \Theta, D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1. \quad (9)$$

Здесь величины t^a при фиксированных первичных параметрах, т. е. при $\Theta^a = 0$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta t^a + t^b \overset{0}{\Theta}{}^a_b = t^a \overset{0}{\Theta}_1,$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам:

$$\overset{0}{\Theta}{}^b_a = \Theta^b_a(\delta) = \Theta^b_a\Big|_{\Theta^a=0}, \overset{0}{\Theta}_1 = \Theta_1(\delta).$$

Из (1) и (9) следует, что прямая

$$t = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) t^a \quad (10)$$

является касательной к кривой $k(t)$ в точке $B \in \tilde{A}_p$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что смещение в направлении (9) (или в направлении t) будет означать смещение по кривой $k(t)$.

2.2. Как известно [1], поле точек (x^i) и гиперконусов q^2_{n-1} в пространстве A_n будет инваринтным, если

$$dx^i + x^j \omega^i_j + \omega^i = \tilde{\Theta} x^i; d(g_{ij} x^i x^j) = \tilde{\Theta}_1 g_{ij} x^i x^j,$$

где $\tilde{\Theta}$ и $\tilde{\Theta}_1$ – некоторые произвольные 1-формы.

Пользуясь этими условиями инвариантности и учитывая (2)–(5), (9) и (10), получаем уравнения многообразия $q(t)$ в A_n, как пересечение гиперконуса q^2_{n-1} с бесконечно близким $(q^2_{n-1})'$ вдоль кривой (10):

$$g_{ij} x^i x^j = 0, (g_{ija} x^i x^j - 2 g_{ij} x^i A^j_a) t^a = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$(\lambda g_{ij} + g_{ija} t^a) x^i x^j - 2 g_{ij} x^i A^j_a t^a = 0 \quad (11)$$

определяет множество гиперквадрик $Q^2_{n-1}(\lambda, t) \subset A_n$ с параметром λ, отвечающих направлению (10) и проходящих через $q(t)$. Из (11) следует, что уравнение

$$(\lambda g_{ij} + g_{ija} t^a) x^i x^j = 0 \quad (12)$$

определяет в A_n асимптотический гиперконус $\tilde{Q}^2_{n-1}(\lambda, t)$ с вершиной в точке A и с параметром λ, соответствующим направлению (10). Поляра $\Gamma_{n-1}(t)$ точки $A \in A_n$ относительно $\tilde{Q}^2_{n-1}(\lambda, t)$, в силу (11), определяемая в A_n уравнением

$$g_{ij} A^j_a t^a x^i = 0,$$

соответствует направлению (10) и не зависит от параметра λ.

2.3. Поскольку гиперконус $q^2_{n-1} \subset A_n$ с вершиной в точке A является невырожденным, т. е. $\det[g_{ij}] \neq 0$, то можно ввести в рассмотрение в каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ симметрические величины g^{kj}:

$$g^{kj} g_{ik} = \delta^j_i. \quad (13)$$

Эти величины g^{kj} в силу (7) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla g^{kj} = g^{kj}_a \Theta^a; g^{kj}_a = -g_{ila} g^{ik} g^{lj}.$$

Из (4) в силу (12) и (13) следует, что множество всех точек $T \in \tilde{A}_p$ с радиус-векторами $\bar{T} = \bar{B} + t^a \bar{\varepsilon}_a$ таких, что $\tilde{Q}^2_{n-1}(\lambda, t)$, $(t = TB)$ и q^2_{n-1} аполярны, образует в $\tilde{A}_p$ совокупность параллельных гиперплоскостей $G_{p-1}(\lambda)$:

$$\lambda n + \mu g_{ija} g^{ij} t^a = 0, \mu \neq 0. \quad (14)$$

Из этой совокупности гиперплоскостей выделим гиперплоскость $G_{p-1} = G_{p-1}(0) \subset \tilde{A}_p$, проходящую через точку $B \in \tilde{A}_p$ и определяемую в силу (14) уравнением

$$l_a t^a = 0, \quad (15)$$

где величины l_a определяются следующим образом:

$$l_a = g_{ija} g^{ij}; \nabla l_a = l_{ab} \Theta^b, l_{ab} = g_{ijab} g^{ij} + g_{ija} g^{ij}_b. \quad (16)$$

2.4. Рассмотрим систему величин

$$B_{ab} = g_{ij} A^i_a A^j_b, \det[B_{ab}] \neq 0, \quad (17)$$

которая в силу (7) и (8) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\nabla B_{ab} = B_{abc} \Theta^c, B_{abc} = g_{ijc} A^i_a A^j_b + g_{ij} A^i_{ac} A^j_b + g_{ij} A^i_a A^j_{bc}.$$

Из (2)–(4), (9) и (17) следует, что уравнение

$$B_{ab} t^a t^b = 0 \quad (18)$$

определяет в $\tilde{A}_p$ гиперконус $\tilde{R}_{p-1}$ с вершиной $B \in \tilde{A}_p$, который представляет собой совокупность всех прямых (10), образы которых при отображении (6) принадлежат гиперконусу $q^2_{n-1} \subset A_n$.

2.5. Рассмотрим прямую

$$L = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) l^a \subset \tilde{A}_p.$$

Здесь величины $l^a = B^{ac} l_c$ удовлетворяют в силу (16), (17) дифференциальным уравнениям

$$\nabla l^a = l^a_c \Theta^c; l^a_c = B^{ab}_c l_b + B^{ab} l_{bc};$$

$$B^{ab}_c = -B_{slc} B^{sa} B^{lb}, (a, b, c, l, s = \overline{1, p}). \quad (19)$$

Геометрически прямая L является полюсом гиперплоскости $G_{p-1}\subset\widetilde{A}_p$ относительно гиперконуса $\overset{*}{\widetilde{R}}_{p-1}\subset\widetilde{A}_p$.

Из множества гиперплоскостей $G_{p-1}(\lambda)\subset\widetilde{A}_p$ выделим ту гиперплоскость, которая соответствует прямой $L\subset\widetilde{A}_p$. Из (14). (16) и (19) получаем

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{1}{n}l_a l^a\equiv r. \tag{20}$$

Из совокупности гиперконусов $\widetilde{Q}^2_{n-1}(\lambda,t)\subset A_n$, отвечающих прямой $L\subset\widetilde{A}_p$ и параметру $\lambda\equiv r$, выделяется в A_n гиперконус K^2_{n-1} второго порядка с вершиной в точке A, заданный уравнением

$$C_{ij}x^i x^j=0. \tag{21}$$

Здесь с учетом (5), (6), (12), (16), (19) и (20) величины C_{ij} определяются по формулам и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$C_{ij}=rg_{ij}+g_{ija}l^a;\nabla C_{ij}=C_{ija}\Theta^a;$$
$$C_{ija}=r_a g_{ij}+rg_{ija}+g_{ijb}l^b_a+g_{ijab}l^b;$$
$$r_b=-\frac{1}{n}(l_{ab}l^a+l_a l^a_b). \tag{22}$$

2.6. Заметим с учетом (8), (19) и (22), что симметрическая система величин

$$\widetilde{B}_{ab}=C_{ij}A^i_a A^j_b \tag{23}$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\nabla\widetilde{B}_{ab}=\widetilde{B}_{abc}\Theta^c;\widetilde{B}_{abc}=$$
$$=C_{ijc}A^i_a A^j_b+C_{ij}A^i_{ac}A^j_b+C_{ij}A^i_a A^j_{bc}. \tag{24}$$

Геометрически с системой величин (23) ассоциируется гиперконус $\overset{*}{\widetilde{R}}_{p-1}\subset\widetilde{A}_p$ второго порядка с вершиной в точке $B\in\widetilde{A}_p$, определяемый уравнением

$$\widetilde{B}_{ab}t^a t^b=0, \tag{25}$$

который представляет собой совокупность всех прямых (10), образы которых при отображении (6) принадлежат гиперконусу $K^2_{n-1}\subset A_n$ (см. (21) и (22)).

Как и в пункте 2.3 в случае гиперконуса $q^2_{n-1}\subset A_n$, получаем с учетом (24) уравнения алгебраической поверхности $\widetilde{q}(u)$ – пересечение гиперконуса (25) со своим бесконечно близким вдоль направления $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)u^a\in\widetilde{A}_p$:

$$\widetilde{B}_{ab}t^a t^b=0;\widetilde{B}_{abc}t^a t^b u^c-2B_{ac}t^a u^c=0.$$

Отсюда получаем уравнения гиперквадрик $\widetilde{q}_{p-1}(u,\lambda)$, отвечающих направлению $u\in\widetilde{A}_p$ и проходящих через $\widetilde{q}(u)$:

$$\widetilde{B}_{abc}t^a t^b u^c-2\widetilde{B}_{ac}t^a u^c+\lambda\widetilde{B}_{ab}t^a t^b=0.$$

Пучок асимптотических гиперконусов $\widetilde{q}_{p-1}(u,\lambda)$ этого пучка гиперквадрик, отвечающих направлению $u\in\widetilde{A}_p$, будет определяться уравнением

$$\widetilde{B}_{abc}t^a t^b u^c+\lambda\widetilde{B}_{ab}t^a t^b=0. \tag{26}$$

Можно с учетом (22) и (23) показать, что гиперконус $\overset{*}{\widetilde{R}}_{p-1}$ в общем случае не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $B\in\widetilde{A}_p$, т. е. $\det[\widetilde{B}_{ab}]\neq 0$. Поэтому можно ввести в рассмотрение величины $\widetilde{B}^{ac}$: $\widetilde{B}^{ac}\widetilde{B}_{cb}=\delta_b^a$, которые удовлетворяют в силу (24) дифференциальным уравнениям

$$\nabla\widetilde{B}^{ac}=\widetilde{B}^{ac}_b\Theta^b;\widetilde{B}^{ac}_b=-\widetilde{B}_{sqb}B^{sa}B^{qc},(a,b,c,s,q=\overline{1,p}).$$

Из (26) замечаем, что каждому направлению $u\in\widetilde{A}_p$ отвечает гиперконус $\widetilde{q}^2_{p-1}(u)$, который выделяется из пучка (26) тем, что он аполярен с гиперконусом (25). Этот гиперконус определяется уравнением

$$\widetilde{B}_{abc}t^a t^b u^c=0.$$

Отсюда следует, что каждой точке $B\in\widetilde{A}_p$ отвечает гиперконус $K^3_{p-1}\subset\widetilde{A}_p$ третьего порядка с вершиной в точке B как совокупность всех направлений $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)u^a$, принадлежащих $\widetilde{q}^2_{p-1}(u)$. Гиперконус K^3_{p-1} определяется уравнением

$$E_{abc}t^a t^b t^c=0, \tag{27}$$

где

$$E_{abc}=\widetilde{B}_{(abc)};\nabla E_{abc}=E_{abcs}\Theta^s;$$
$$E_{abcs}=\widetilde{B}_{(abc)s},(a,b,c,s=\overline{1,p}).$$

Таким образом, с помощью компонент геометрических объектов Γ_1 и Γ_2 отображение (6) в первой и второй дифференциальных окрестностях определяет в аффинном пространстве $\widetilde{A}_p$ распределение геометрических образов (15), (18), (21) и (27).

3. Поля гиперконусов $\Phi^p_{n-1}\subset A_n$

3.1. Из (6) замечаем, что с отображением $\widetilde{V}^N_p$ ассоциируется дифференцируемое отображение

$$V^n_p:\widetilde{A}_p\to A_n. \tag{28}$$

Это отображение каждой точке $B\in\widetilde{A}_p$ ставит в соответствие вполне определенную точку $A\in A_n$, которая является вершиной гиперконуса $q^2_{n-1}\in A_n$.

Отображение (28) определяется дифференциальными уравнениями, входящими в (7) и (8):

$$\omega^i=A^i_a\Theta^a;\nabla A^i_a=A^i_{ab}\Theta^b;\nabla A^i{}_{ab}=A^i_{abc}\Theta^c;$$
$$A^i_{[ab]}=0;A^i_{[abc]}=0;(a,b,c=\overline{1,p}). \tag{29}$$

3.2. Поле гиперконусов $\Psi^p_{n-1}\subset A_n$.

Из (1), (2), (10) и (29) следует, что каждой гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(x)$ в A_n, проходящей через точку $A=V^n_p B$ и определяемой уравнением

$$x_i x^i=0 \tag{30}$$

в пространстве $\widetilde{A}_p$, отвечает алгебраическое многообразие $R(x)$, задаваемое уравнениями

$$x_i A^i_a t^a=0;x_i A^i_{ab}t^a t^b=0. \tag{31}$$

Это алгебраическое многообразие представляет собой множество всех направлений (10), вдоль каждого из которых образы самого направления и его дифференциальной окрестности первого порядка при отображении (28) принадлежат гиперплоскости (30).

Рассмотрим пучок гиперквадрик $R^2_{p-1}(x,v)\subset\widetilde{A}_p$, отвечающих гиперплоскости (30), которые проходят через точку $B\in\widetilde{A}_p$ и через $R(x)$. Из (31) следует, что эти гиперквадрики определяются уравнением:

$$x_i A^i_{ab} t^a t^b + \nu x_i A^i_a t^a = 0.$$

Отсюда заключаем, что каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ и гиперплоскости (30) отвечает в $\widetilde{A}_p$ асимптотический гиперконус $R^2_{p-1}(x)$ гиперквадрик $R^2_{p-1}(\nu)$, не зависящий от параметра ν. Этот гиперконус определяется уравнением

$$x_i A^i_{ab} t^a t^b = 0. \qquad (32)$$

Отсюда следует, что в каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ в пространстве A_n существует гиперконус Ψ^p_{n-1} класса p с вершиной в точке $A \in A_n$, представляющий собой совокупность всех гиперплоскостей (30) в A_n, которым отвечают в $\widetilde{A}_p$ вырожденные гиперконусы (32) по крайней мере, с прямолинейными вершинами, проходящими через точку $A \in A_n$. Этот гиперконус $\Psi^p_{n-1} \subset A_n$ определяется в тангенциальных координатах x_i уравнением

$$\det[x_i A^i_{ab}] = 0 \Leftrightarrow \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} = 0;$$

$$\Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} A^{(i_1}_{[1|1|} A^{i_2}_{2|2|} \ldots A^{i_p)}_{p|p|]};$$

$$\nabla \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} + 2\Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} (\Theta^1_1 + \Theta^2_2 + \ldots + \Theta^p_p) =$$

$$= \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p}_a \Theta^a, \ (i_1, i_2, \ldots, i_p = \overline{1,n}; a = \overline{1,p}). \qquad (33)$$

Здесь явный вид величин $\Phi^{i_1 \ldots i_2 i_p}_a$ для нас не существенен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
2. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. – Т. 6. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий // Итоги науки. Вып. Геометрия. 1963. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 65–107.
4. Павлюченко Ю.П., Рыжков В.В. Об изгибании точечных соответствий между проективными пространствами // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 235–241.
5. Павлюченко Ю.В. О характеристической системе точечных соответствий // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 221–233.
6. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 235–241.
7. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Вып. Алгебра. Топология. Геометрия, 1970. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 153–174.

Поступила 19.03.2010 г.

УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: lutchinin@mail.ru

Рассматриваются отображения аффинного пространства $\widetilde{A}_p$ в аффинное пространство A_n (при $p \geq n$ и $p < n$) и в евклидово пространство E_n. Аналитически и геометрически изучается структура фундаментальных геометрических объектов этих отображений в смысле Г.Ф. Лаптева.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, многомерные аффинные и евклидовы пространства.
Key words:
Differentiable mappings, multidimensional affine and Euclidian spaces.

Введение

Рассматривается отображение $V^n_p: \widetilde{A}_p \to A_n$ и доказывается существование (при $p \geq n$ и $p < n$) в аффинном пространстве A_n, отвечающем пространству $\widetilde{A}_p$, инвариантного гиперконуса q^2_{n-1}, который в [1] считался заданным. Изучаются фундаментальные геометрические объекты первого и второго порядков дифференцируемого отображения V^n_p аффинного пространства $\widetilde{A}_p$ в аффинное пространство A_n. Аналитически и геометрически строятся инвариантные геометрические образы, ассоциированные с геометрическими объектами отображения.

1. Инъективное дифференцируемое отображение

1.1. В этом случае точка $A \in A_n$ как образ точки $B \in \widetilde{A}_p$ при инъективном отображении V^n_p является текущей точкой p-мерной поверхности (p-поверхности) $S_p \subset A_n$ с касательной p-плоскостью L_p. Аффинный репер $R = \{\overline{A}, \overline{e}_i\}$ в A_n (см. [1. Ур. (2)]) выбирается так, чтобы