Так как B – сервантная подгруппа группы A, тип любого элемента $b \in B$ в этой группе такой же, как и в группе A. Таким образом, B – однородная подгруппа группы A, имеющая такой же тип, что и группа A. Тогда из [13. Теорема 86.6. С. 136] следует, что B – вполне разложимая группа. Получаем, что A и B – однородные вполне разложимые группы, имеющие один и тот же тип и ранг, следовательно, $A \cong B$.

Теорема доказана.

Отметим, что однородная вполне разложимая группа является также f.i.-корректной [7. Следствие 18. С. 76].

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups // Math. Scand. – 1959. – № 2. – P. 361–371.
2. Kaplansky I. Infinite Abelian groups. – Michigan: Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1954. – 91 p.
3. Crawly P. Solution of Kaplansky′s test problem for primary abelian groups // J. Algebra. – 1965. – № 4. – P. 413–431.
4. Corner A.L. Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. – 1963. – V. 52. – P. 687–710.
5. Sasiada E. Negative solution of I. Kaplansky first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups // Bull. Polish Acad. Sci. Math. Astron. Phys. – 1961. – № 5. – P. 331–334.
6. Fuchs L. Abelian groups. – Budapest: Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958. – 367 p.
7. Гриншпон С.Я. f.i.-корректность абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. – 1989. – Вып. 8. – С. 65–79.
8. De Groot J. Equivalent abelian groups // Canad. J. Math. – 1957. – № 9. – P. 291–297.
9. Приходько И.А. E-корректные абелевы группы // Абелевы группы и модули. – 1984. – Вып. 4. – С. 90–99.
10. Росошек С.К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. – 1979. – Вып. 1. – С. 143–150.
11. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп без кручения и f.i.-корректность // Вестник МГУ. Серия матем., мех. – 1981. – № 1. – С. 97–99.
12. Гриншпон С.Я. f.i.-корректные абелевы группы // Успехи матем. наук. – 1999. – Т. 54. – № 6. – С. 155–156.
13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – Т. 2. – М.: Мир, 1977. – 335 с.

Поступила 27.04.2010 г.

УДК 517.91

АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Е. Семенов, С.Н. Колупаева

Томский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: sme@tsuab.ru

Приведен краткий обзор неявных методов интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены и представлены графически области абсолютной устойчивости для методов Гира (формул дифференцирования назад) при решении жестких систем дифференциальных уравнений. Даны рекомендации по выбору порядка метода Гира.

Ключевые слова:
Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, неявные методы, формулы дифференцирования назад.

Key words:
Stiff systems of ordinary differential equations, implicit method, backward differentiation formulae.

При моделировании реальных процессов широко используется аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). При этом практика показывает, что начальная задача (задача Коши) для систем ОДУ может быть отнесена к следующим типам: мягкая, жесткая, плохо обусловленная и быстро осциллирующая. Каждый тип предъявляет специфические требования к методам интегрирования. К жестким системам относятся задачи химической кинетики [1, 2], нестационарные процессы в сложных электрических цепях [3, 4], системы, возникающие при решении уравнений теплопроводности и диффузии [5], движения небесных тел, искусственных спутников [6], физики пластичности [7] и многие другие.

При численном решении систем ОДУ возникают сложности, связанные с тем, что при описании сложного физического процесса скорости локальных процессов могут быть существенно различными, а переменные системы могут быть разнопорядковыми величинами и/или изменяться на интервале интегрирования на порядки величины [7].

Кроме этого при проведении физических экспериментов может наблюдаться пограничный слой, который характеризуется режимом быстрого изменения поведения объекта исследования. Такой слой может возникать не обязательно в начале эксперимента, а лишь тогда, когда некоторый «управляющий» параметр резко изменит свое значение или достигнет некоторого критического значения. При численном решении такого вида задач численный метод необходимо выбирать очень тщательно [1, 2, 8–12].

Интерес к жестким системам возник в начале XX в., первоначально в радиотехнике (задача Вандер-Поля, 1920 г. [3, 4, 13–16]). Затем новая волна интереса появилась в середине 50-х гг. прошлого столетия при изучении уравнений химической кинетики, движения небесных тел [6], в которых присутствовали очень медленно и очень быстро изменяющиеся компоненты. Тогда выяснилось, что считавшиеся исключительно надежными методы типа Рунге–Кутты стали давать сбой при численном расчете подобных задач.

Одна из первых попыток дать определение жестким системам принадлежит Ч. Кертиссу и Дж. Хиршфельдеру (C.F. Curtiss, J.O. Hirschfelder). В 1952 г. они предложили следующую трактовку: *жесткие системы* – это те уравнения, решение которых получить намного проще с помощью определенных неявных методов, чем с помощью классических явных методов типа Эйлера или Адамса [17].

В литературе приводится несколько суждений о жесткости, каждое из которых отражает определенные аспекты поведения численного решения (например, невозможность использования явных методов интегрирования [18], наличие быстро затухающих возмущений [10, 19], большие постоянные Липшица или логарифмические нормы матриц [20, 21], большая разница собственных значений матрицы Якоби [1, 2, 22, 23], заполненность матрицы Якоби [24], априорная знакоопределенность решения [25], количество переходных фаз [26] и так далее). В некоторых приложениях важным фактором, влияющим на поведение численного решения, является размерность системы ОДУ [27] или наличие пограничного слоя [22, 28], в других – лишь предельное поведение (плавное изменение) при больших интервалах интегрирования. Зачастую даже не ясно, относится жесткость к частному решению или к проблеме в целом [29].

В работах [1–3, 12, 22, 23, 30] авторы затрудняются дать строгое определение жесткой системы в силу его сложности, а вводят рабочее описание жесткой задачи. Это задача, моделирующая физический процесс, компоненты которого обладают несоизмеримыми характерными временами, или же процесс, характерное время (обратные величины собственных значений якобиана системы) которого намного меньше отрезка интегрирования.

В 1970-х гг. Л. Шампайн и Б. Гир (L.F. Shampine, C.W. Gear), накопившие к тому времени большой опыт вычислительных экспериментов в области систем, имеющих разнопорядковые компоненты вектора решений, предложили свое определение жесткой системы: начальная задача для системы ОДУ является жесткой, если хотя бы у одного из собственных чисел якобиана $J_{i,j}=\partial f_i/\partial y_j$, $i, j=1,...,N$ вещественная часть отрицательна и велика (по модулю), а решение на большей части отрезка интегрирования меняется медленно [14, 31].

В работах [22, 28] систему ОДУ называют жесткой, если вещественные части всех собственных значений якобиана системы отрицательны, т. е. $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$, $i=1,2,...,N$ (система асимптотически устойчива по Ляпунову) и отношение

$$s=\frac{\max(|\mathrm{Re}(\lambda_i)|,\ i=1,2,...,N)}{\min(|\mathrm{Re}(\lambda_i)|,\ i=1,2,...,N)}$$

велико. Число s называется числом жесткости системы.

Проблема определения жесткой системы в том, что для числа жесткости s не указана граница, когда оно становится велико. Систему уравнений можно считать жесткой, если число жесткости s больше 10, однако во многих прикладных задачах этот коэффициент достигает значений порядка 10^6 и более [32]. В работе [33] вводится понятие сверхжесткости, при этом коэффициент жесткости достигает значений порядка $10^6...10^{12}$.

Заметим, что надежных простых способов оценки жесткости нет, поэтому нужны численные методы, работающие без проверок на жесткость.

Обзор существующих подходов к нахождению численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} Y'=F(x,Y),\ x\in[x_0,b] \\ Y(x_0)=Y_0 \end{cases}. \tag{1}$$

При численном интегрировании системы (1) широко применяют методы, в которых использована линейная комбинация вектора решения $Y_1, Y_2,..., Y_n,...$ и его производных в некоторой последовательности точек $x_1, x_2,..., x_n,...$ Такие методы принято называть *линейными* методами [3, 4, 31].

Существует несколько типов линейных методов: многоэтапные, многошаговые, а также методы, в которых используют производные высших порядков (*multiderivative methods*). Многоэтапные методы – это явные и неявные методы Рунге–Кутты. К многошаговым методам относят методы Адамса (Adams–Bashforth, Adams–Moulton) и формулы дифференцирования назад (BDF, *backward differentiation formulae*). Методы, в которых используются производные высших порядков, основаны на использовании разложения функции в ряд Тейлора (Taylor series).

С момента открытия явления жесткости в развитии численных методов для интегрирования жестких систем имеют место следующие тенденции: исследование явления жесткости как такового и создание теоретического аппарата анализа устойчивости методов [3, 18], конструирование и усовершенствование методов, в том числе с учетом специфики решаемых задач [34–40] и перспектив для распараллеливания [41–43]. Наиболее полный обзор современного состояния численных методов решения жестких систем ОДУ с обширной библиографией представлен в работах [3, 4, 18, 28, 44, 45].

Одним из простых способов построения решения системы (1) в точке x_{n+1}, если оно известно в точке x_n, является способ, основанный на разложении функции решения $Y(x_{n+1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_n:

$$Y(x_{n+1})=Y(x_n)+hF(x_n,Y_n,h),$$

где $F(x_n,Y_n,h)=Y'(x_n)+hY''(x_n)/2!+h^2Y'''(x_n)/3!+\ldots$. Если этот ряд оборвать на q-ом слагаемом и заменить $Y(x_n)$ приближенным значением Y_n, то получим приближенную формулу:

$$Y_{n+1}=Y_n+h(F(x_n,Y_n)+hF'(x_n,Y_n)/2!+ \\ +h^2F''(x_n,Y_n)/3!+\ldots+h^qF^{(q)}(x_n,Y_n)/(q+1)!) \qquad (2)$$

при $q=1$ получим вычислительную схему явного метода Эйлера [1, 2, 12, 22, 46]

$$Y_{n+1}=Y_n+hF(x_n,Y_n).$$

Применение формулы (2) ограничено лишь теми задачами, где легко вычисляются производные высших порядков функции $F(x,Y)$ правой части системы (1). Заметим, что обычно это не так.

К. Рунге (C. Runge, 1895), К. Хойн (K. Heun, 1900) и М. Кутта (M. Kutta, 1901) предложили подход, основанный на построении формулы для Y_{n+1} вида [1, 2, 4]:

$$Y(x_{n+1})=Y(x_n)+h\Phi(x_n,Y_n,h),$$

где h – шаг интегрирования. Функция $\Phi(\cdot)$ близка к $F(\cdot)$, но не содержит производных от функции правой части уравнения. Было получено семейство явных и неявных методов, требующих s-кратного вычисления функции правой части на каждом шаге интегрирования (s-этапные методы). Формулы этих методов идеально приспособлены для практических расчетов: они позволяют легко менять шаг интегрирования h, являются одношаговыми, достаточно экономичны, по крайней мере, до формул четвертого порядка включительно. Возможно, наиболее известной является формула четырехэтапного метода Рунге–Кутты четвертого порядка.

Одна из основных проблем, связанных с применением методов Рунге–Кутты (а в действительности, практически всех явных методов) состоит в выборе величины шага интегрирования h, обеспечивающей устойчивость вычислительной схемы [1, 2, 12, 22, 23, 46, 47], тем не менее, и в наши дни, разрабатываются и используются явные адаптивные методы для решения жестких ОДУ [36].

Наличие жестких задач сделало неявные вычислительные схемы особенно привлекательными и привело к разработке группы неявных устойчивых методов, у которых отмеченная проблема с выбором шага интегрирования в значительной степени снята [17, 23, 31, 48–52]. Наиболее распространенными среди них являются методы Адамса–Мултона и «формулы дифференцирования назад» (более общее название – методы Гира). Получив приближение к решению в точках $x_1,x_2,\ldots,x_n$ можно использовать их для нахождения решения в точке x_{n+1}.

Вычислительные схемы *неявных методов Адамса–Мултона* имеют вид [1, 2, 12, 22, 23, 46, 47]:

$$Y_{n+1}=Y_n+h\sum_{i=0}^{q}\beta_i F(x_{n-i+1},Y_{n-i+1}), \qquad (3)$$

где q – определяет порядок метода, константы β_i, $i=0, 1, \ldots, q$ соответствуют выбранному порядку метода [4, 23, 31]. Заметим, что неявный метод Эйлера (первый порядок) и метод трапеций (второй порядок) являются частными случаями последней вычислительной схемы (3) при $q=0$ и $q=1$ соответственно.

Построение многошаговых методов основано на использовании полинома степени q. Приближенное значение решения $Y(x)$ в точке x_{n+1} представляется в виде линейной комбинации нескольких приближенных значений решения и его производной в этой и предшествующих q точках. Очевидно, использование многошаговых формул ставит задачу вычисления q значений начальных значений Y_1, Y_2, ..., Y_n, точность задания которых должна быть не хуже точности соответствующей формулы. В общем виде полином можно представить [1, 2, 12, 22, 23, 46, 47]

$$Y_{n+1}=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i Y_{n-i+1}+h\sum_{j=0}^{q}\beta_j F(x_{n-j+1},Y_{n-j+1}). \qquad (4)$$

Некоторые константы α_i и β_i в (4) могут принимать нулевые значения. При выборе $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_q=0$ можно построить формулы дифференцирования назад.

Область устойчивости неявных методов

Первые исследования, посвященные изучению устойчивости многошаговых методов, относятся к трудам Д. Дальквиста [53, 54]. Как следует из определений, приведенных выше, жесткие уравнения предъявляют жесткие требования к устойчивости численных методов, применяемых для их решения. При получении асимптотически устойчивого решения жесткой задачи Коши ошибка разностного метода не должна расти при любом шаге, т. е. метод должен быть безусловно устойчивым. Обзор текущего состояния по исследованию областей устойчивости многошаговых методов можно найти в работах [3, 4].

Авторы [22, 46, 55] формулируют определение устойчивости метода более четко через использование модельного уравнения первого порядка

$$y'=\lambda y,\ y(x_0)=y_0. \qquad (5)$$

Общее решение уравнения (5) есть $y=C\cdot\exp\{\lambda x\}$, где C – константа, и решение соответствующей ему задачи Коши с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ есть функция $y=y_0\cdot\exp\{\lambda(x-x_0)\}$, которая стремится к нулю, если $\mathrm{Re}(\lambda)<0$ и бесконечно растет по абсолютной величине при $\mathrm{Re}(\lambda)>0$, где λ в общем случае комплексное число.

Под *областью устойчивости* многошагового метода (4) решения начальной задачи (5) будем понимать множество точек комплексной плоскости, определяемой комплексной переменной $\sigma=h\lambda$, для которых этот метод, примененный к модельному ур. (5), устойчив, т. е. обеспечивает невозрастание ошибки [22, 46, 55].

Для определения области устойчивости неявных методов (4) будем использовать характеристический (комплексный) полином

$$P(z)=(z^q-\alpha_1 z^{q-1}-\alpha_2 z^{q-2}-...-\alpha_q)+$$
$$+\sigma(\beta_0 z^q+\beta_1 z^{q-1}+\beta_2 z^{q-2}+...+\beta_{q-1}z+\beta_q)=0,$$

который представим в виде [3, 4, 23, 31]:

$$\sigma(\theta)=$$
$$=-\frac{-e^{iq\theta}+\alpha_1 e^{i(q-1)\theta}+\alpha_2 e^{i(q-2)\theta}+...+\alpha_{q-1}e^{i\theta}+\alpha_q}{\beta_0 e^{iq\theta}}, \quad (6)$$

где α_k, β_k – коэффициенты метода (k=0,1,2,..., q; $\beta_1=\beta_2=...=\beta_q=0$); q – порядок метода; i – мнимая единица; $z=e^{i\theta}$ – комплексное число, $0\leq\theta\leq 2\pi$. Для определения области абсолютной устойчивости метода для данного значения $\sigma=\sigma_0$ найдем решение уравнения (6) относительно θ.

Множество точек, порождаемых уравнением (6), представляет собой геометрическое место точек единичных корней Γ_σ, для которых справедливо $|z|=1$. Областью абсолютной устойчивости неявных методов (4) является внешняя область Γ_σ, т. к. при $|\sigma|=h|\lambda|\to\infty$ неявные методы (4) устойчивы [3, 4, 23, 31].

Для определения геометрического места точек, описываемых уравнением (6), использована система компьютерной алгебры MathCAD. В результате получено геометрическое место единичных корней Γ_σ (рис. 1). Областью абсолютной устойчивости является внешняя область Γ_σ (заштрихована).

Исследование областей устойчивости (Γ_σ является простой замкнутой кривой), изображенных на рис. 1, показывает, что неявные методы (4) с 1 по 6 порядок включительно являются жестко устойчивыми (введено впервые в [31]). Свойство жесткости для неявного метода (4) с 1 по 6 порядок включительно достигается при различных значениях вещественного числа $\delta\leq 0$ (на рис. 1, *в–е*, отмечено пунктирной линией). В частности, для метода первого и второго порядков δ=0, третьего – δ=–0,1; четвертого – δ=–0,7; пятого – δ=–2,4; шестого – δ=–6,1.

Для метода Гира седьмого порядка ур. (6) будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma(\theta)=-\frac{\begin{pmatrix}-e^{i7\theta}+\frac{980}{363}e^{i6\theta}-\frac{490}{121}e^{i5\theta}-\frac{4900}{1089}e^{i4\theta}-\\ -\frac{1225}{363}e^{i3\theta}+\frac{196}{121}e^{i2\theta}-\frac{490}{1089}e^{i\theta}+\frac{20}{363}\end{pmatrix}}{\frac{140}{369}e^{i7\theta}}.$$

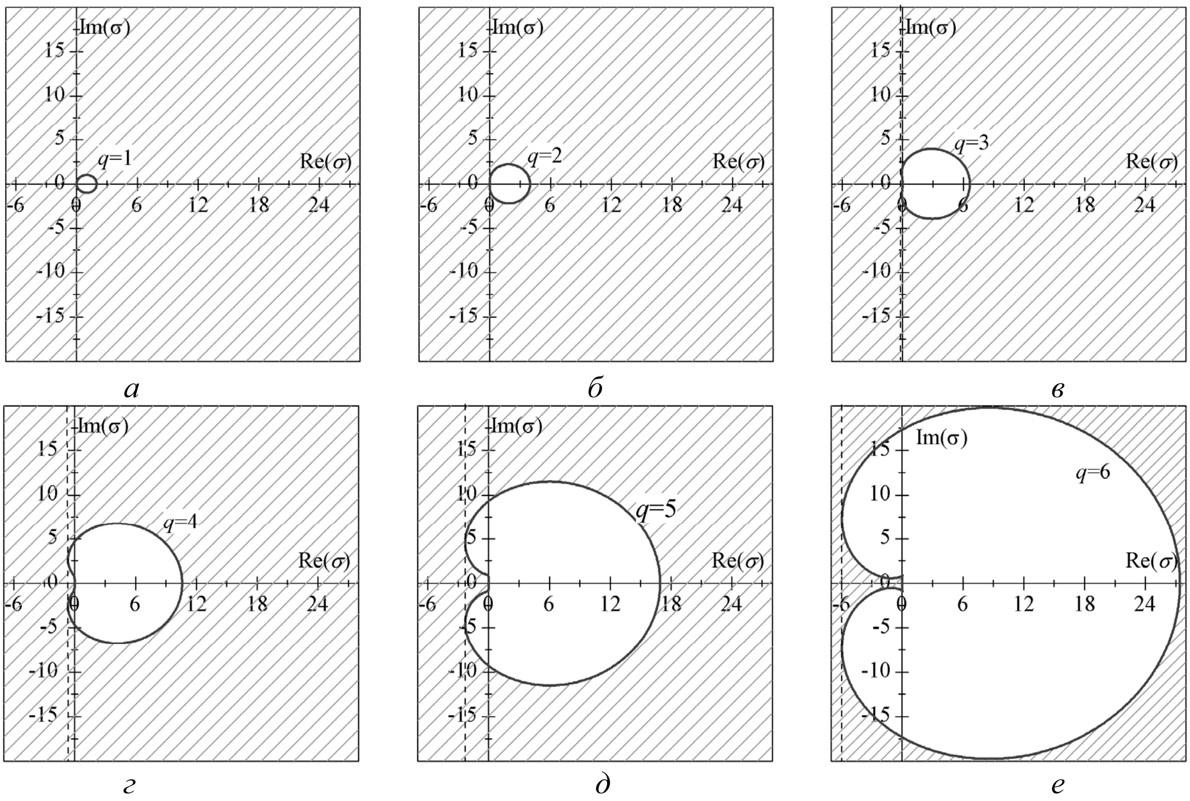

Рис. 1. *Области абсолютной устойчивости для методов Гира q-го порядка: а) первого (метод Эйлера); б) второго; в) третьего; г) четвертого; д) пятого; е) шестого*

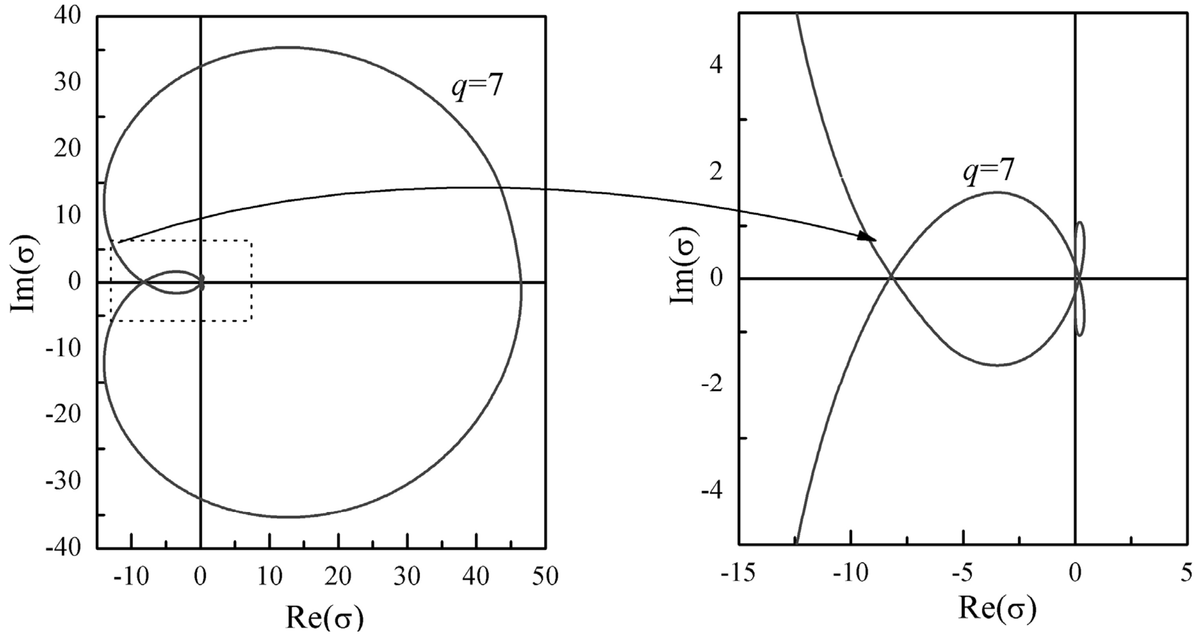

Рис. 2. *Геометрическое место точек единичных корней Γ_σ для метода Гира седьмого порядка*

Находя решение $\sigma(\theta)$ относительно θ, получаем, что метод Гира седьмого порядка не отвечает требованиям жесткой устойчивости (рис. 2) [23, 31]. В начале координат и при $\mathrm{Re}(\sigma)\approx-8$ имеются точки пересечения Γ_σ.

Результаты, полученные для уравнения (5), можно распространить на системы ОДУ. В случае автономной системы ОДУ вида $Y'=\mathbf{A}Y$, где $\mathbf{A}$ – постоянная матрица, можно провести приведение к жордановой форме и перейти к нахождению решения системы ОДУ вида $Z'=\mathbf{J}Z$, где $\mathbf{J}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$, λ_i – собственные числа матрицы $\mathbf{A}$, $i=1,2,...,N$, $Y=\mathbf{T}Z$, $Z=\mathbf{T}^{-1}Y$. Матрица $\mathbf{T}$ составлена из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Таким образом, исходная система ОДУ распадается на n скалярных уравнений, для которых можно найти решение и применить описанный выше подход для нахождения области устойчивости [4, 23, 31]. Если коэффициенты системы $Y'=\mathbf{A}(x)Y$ не являются постоянными, проверка собственных значений $\mathbf{A}$ при каждом значении x становится вычислительно трудоемкой [31]. Заметим, что при работе с нелинейными системами вида $Y'=\mathbf{A}Y+G(x,Y)$ устойчивость решения может быть обеспечена только в начале координат, кроме этого, устойчивость может быть нарушена для собственных значений, лежащих на мнимой оси [18].

Обзор альтернативных способов нахождения областей устойчивости неявных методов наиболее полно приведен в [3, 4, 18].

Неявные методы (в записи Гира) пригодны для расчета большого класса жестких систем ОДУ. При этом уменьшение шага (до минимально возможного) не всегда позволяет приспособиться к локальному поведению решения и сократить объем вычислений при соблюдении требуемой точности. Оптимальная стратегия использования многошаговых методов подразумевает наличие процедуры автоматического управления порядком (с 1 до 6) и величиной шага. Это требует вычисления оценки локальной ошибки метода и эффективной (в смысле экономии оперативной памяти ЭВМ) организации вычислений, хранения и воспроизведения массива предшествующих значений решения.

Выводы

Несмотря на интенсивное развитие численных методов для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, до сих пор не существует общепринятого строгого математического определения жесткости [16, 56–59], поэтому определения жесткости [1–3, 10, 12, 17, 18, 22, 23, 30] остаются актуальными.

Как правило, в большинстве решателей обыкновенных дифференциальных уравнений применяют неявный метод Эйлера первого порядка или метод трапеций второго порядка. Неявные методы Гира (формулы дифференцирования назад) являются жестко устойчивыми от 1 до 6 порядка включительно, поэтому для ускорения процесса интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно использовать повышение порядка.

Результаты расчетов позволяют определить для неявных методов области абсолютной устойчивости, где обеспечена возможность изменения величины шага интегрирования в широких пределах при сохранении вычислительной устойчивости метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 320 с.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
4. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2008. – 463 p.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. – № 5. – С. 8–11.
6. Gear C.W., Skeel R.D. The development of ODE methods: a symbiosis between hardware and numerical analysis // Proc. of the ACM Conf. on History of scientific and numeric computation / Ed. by G.E. Crane. – 1987. – P. 105–115.
7. Семенов М.Е., Колупаева С.Н., Ковалевская Т.А., Данейко О.И. Математическое моделирование деформационного упрочнения и эволюции деформационной дефектной среды в дисперсно-упрочненных материалах // Эволюция структуры и свойства металлических материалов / под ред. А.И. Потекаева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – С. 5–41.
8. Cohen S.D., Hindmarsh A.C. Cvode, a stiff/nonstiff ODE solver in C // Conference Processing SciCADE95: Scientific Computing and Differential Equations. – Stanford: Stanford University, 1995. – March. – P. 2–3.
9. Enright W.H., Pryce J.D. Two Fortran Packages for Assessing Initial value Methods // Association for Computing Machinery Transaction on Mathematical Software. – 1987. – V. 13. – № 1(3). – P. 1–23.
10. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 295 с.
11. Розенброк Х., Стори С. Вычислительные методы для инженеров-химиков. – М.: Мир, 1968. – 443 с.
12. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
13. Hull T.E., Enright W.H., Fellen B.M., Sedgwic A.E. Comparing Numerical Methods for Ordinary Differential Equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1972. – V. 9. – № 4. – Dec. – P. 603–637.
14. Shampine L.F., Gear C.W. A User's View of Solving Stiff Ordinary Differential Equations // SIAM Review. – 1979. – V. 21. – № 1. – Jan. – P. 1–17.
15. Mazzia F., Iavernaro F. Test Set for Initial Value Problem Solvers // Department of Mathematics, University of Bari. 2003. URL: www.dm.uniba.it/~testset (дата обращения: 02.02.2010).
16. Brugnano L., Mazzia F., Trigiante D. Fifty years of Stiffness // arXiv.org e-Print archive. 2009. URL: http://arxiv.org/abs/0910.3780 (дата обращения: 02.02.2010).
17. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of Stiff Equations // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. – 1952. – V. 38. – March. – P. 235–243.
18. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
19. Ascher U.M., Petzold L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Diferential-Algebraic Equations. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 310 p.
20. Soderlind G. The logarithmic norm. History and modern theory // BIT Numerical Mathematics. – 2006. – V. 46. – № 3. – P. 631–652.
21. Higham D.J., Trefethen L.N. Stiffness of ODE // BIT Numerical Mathematics. – 1993. – V. 35. – № 33. – P. 286–303.
22. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
23. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
24. Nejad L.A.M. A comparison of stiff ODE solvers for astrochemical kinetics problems // Astrophys. and Space Sci. – 2005. – V. 299. – №. 1. – P. 1–29.
25. Bertolazzi E. Positive and conservative schemes for mass action kinetics // Computers Math. Applic. – 1996. – V. 32. – № 6. – P. 29–43.
26. Novati P. An explicit one-step method for stiff problems // Computing. – 2003. – V. 1. – № 71. – P. 133–151.
27. Weiner R., Schmitt B.A., Podhaisky H. Rowmap a row-code with Krylov techniques for large stiff ODEs // Appl. Numerical Math. – 1997. – V. 25. – Iss. 2–3. – P. 303–319.
28. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
29. Hundsdorfer W.H. The numerical solution of stiff initial value problems: an analysis of one step methods // Center for Mathematics and Computer Science. – 1985. – № 12. – 30 p.
30. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
31. Gear C.W. Numerical Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations. Englewood Clifs. – N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971. – 253 p.
32. Petcu D., Dragan M. Designing an ODE solving environment // Lectures Notes in Computational Science and Engineering 10: Advances in Software Tools for Scientific Computing / Ed. by H. Langtangen, A. Bruaset, E. Quak. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – P. 319–338.
33. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Куприянов Г.А., Михайлов К.В. Устойчивые численно-аналитические методы решения сверхжестких дифференциально-алгебраических систем уравнений // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 10. – С. 35–50.
34. Вшивков В.А. Об одном способе конструирования W-методов для жестких систем ОДУ // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12. – № 4. – С. 42–58.
35. Rahunanthan A., Stanescu D. High-order W-methods // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – V. 233. – Iss. 8. – P. 1798–1811.
36. Скворцов Л.М. Явные двухшаговые методы Рунге-Кутты // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 9. – С. 54–65.
37. Savcenco V. Construction of multirate roads methods for stiff ODEs // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – V. 225. – № 2. – P. 323–337.
38. Hundsdorfer W., Savcenco V. Analysis of multirate theta-methods for stiff ODEs // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – V. 59. – № 3–4. – P. 693–706.
39. Hojjati G., Apdabili M.Y.R., Hosseini S.M. A-EBDF: An adaptive method for numerical solution of stiff systems of ODE // Mathematics and Computers in Simulations. – 2004. – V. 66. – № 1. – P. 33–41.
40. Филиппов С.С. АВС-схемы для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады РАН. – 2004. – Т. 399. – № 2. – С. 170–172.
41. Podhaisky H., Schmitt B.A., Weiner R. Design, analysis and testing of some parallel two-step W-methods for stiff systems // Appl. Numerical Math. – 2002. – V. 42. – Iss. 1. – P. 381–395.
42. Bahi J., Charr J., Couturier R., Laiymani D. A parallel algorithm to solve large stiff ODE systems on grid systems // International Journal of High Performance Computational Applications. – 2009. – V. 23. – № 2. – P. 140–159.
43. Фельдман Л.П. Устойчивые одношаговые блочные методы численного решения жестких ОДУ // Искусственный интеллект. – 2009. – № 1. – С. 213–217.
44. Soderlind G., Wang L. Evaluating numerical ODE/DAE methods, algorithms and software // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2006. – V. 185. – № 2. – P. 244–260.

45. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
46. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
47. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
48. Gear C.W. The automatic integration of ordinary differential equations // Communications of the ACM. – 1971. – V. 14. – № 3. – P. 176–179.
49. Gear C.W. The Algorithm 407: DIFSUB for solution of ordinary differential equations [D2] // Communications of the ACM. – 1971. – March. – V. 14. – № 3. – P. 185–190.
50. Nordsieck A. On Numerical Integration of Ordinary Differential Equations // Mathematics of Computation. – 1962. – V. 16. – № 77. – Jan. – P. 22–49.
51. Miranker W.L. The Computation Theory of Stiff Diffential Equations. Serie III. № 102. – Roma: IAC. Istitute per Le Applicazioni Del calcolo «Mauro Picone», 1975. – 120 p.
52. Miranker W.L. Numerical method for stiff equations and singular perturbation problem. – Reidel: Reidel Publishing Company, 1981. – V. 5. – № 1. – 205 p.
53. Dahlquist G. Convergence and stability in the numerical integrator of ordinary diferential equations // Math. Scand. – 1956. – V. 4. – P. 33–53.
54. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerilal Mathematics. – 1963. – V. 3. – № 1. – P. 27–43.
55. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
56. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.
57. Shampine L.F., Thompson S. Stiff systems // Scholarpedia. 2007. URL: www.scholarpedia.org/article/Stiff_systems (дата обращения: 14.04.2010).
58. Mott D., Oran E., B. L. A Quasi-Steady-State Solver for the Stiff Ordinary Differential Equations of Reaction Kinetics // Journal of Computational Physics. – 2000. – № 164. – Iss. 2. – P. 407–428.
59. Cash J. Efficient numerical methods for the solution of stiff initial-value problems and differential algebraic equations // Proc. Royal Society Lond. – 2003. – V. 459. – P. 797–815.

Поступила 15.04.2010 г.

УДК 517.9

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Т.Д. Асылбеков, М.К. Чамашев

Ошский государственный университет, Кыргызстан
E-mail: marat2712@rambler.ru

Методом интегральных уравнений и сжимающих отображений, доказана корректность коэффициентной обратной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с действительными трехкратными и простыми характеристиками.

Ключевые слова:
Коэффициентная обратная задача, функция Римана, система интегральных уравнений, система интегро-дифференциальных уравнений, корректность, векторная функция, метод сжимающих отображений.

Key words:
Coefficient inverse problem, Riemann function, the integral equation system, integro-differential equation system, correctness, vector function, contraction method.

1. Постановка задачи. Исследование коэффициентных обратных задач является одним из основных направлений теории обратных задач для дифференциальных уравнений. Обзор работ, посвященных таким задачам, приведены, например, в работах [1–3]. Коэффициентные обратные задачи для уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков рассмотрены в работах [4–7].

В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\ 0<y<h\}$ рассмотрим линейное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$u_{xxxy}+\alpha(x,y)u_{xxy}+\beta_1(x,y)u_{xx}+\beta_2(x,y)u_{xy}+$$
$$+\gamma_1(x,y)u_x+\gamma_2(x)u_y+\delta(x,y)u=f(x,y). \qquad (1)$$

Краевые задачи, задачи Коши и Дарбу для уравнения (1) изучены в работах [8, 9].

Пусть $C^{r+s}(D)$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}\quad (i=1,...,r;\ j=0,...,s).$$

Задача 1. Требуется найти коэффициент $\gamma_2(x)$ и решение $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{3+1}(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le \ell, \qquad (2)$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ \ u_x(0,y)=\chi_2(y),$$
$$u_{xx}(0,y)=\chi_3(y),\ \ 0\le y\le h,$$
$$u(x,h)=\psi(x),\quad 0\le x\le \ell, \qquad (3)$$

где α, β_1, β_2, γ_1, δ, f, τ, χ_i $(i=\overline{1,3})$, ψ – известные функции, причем