СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
2. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Фрунзе: Илим, 1990. – 100 с.
3. Пакиров С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 49–53.
4. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 180 с.
5. Матанова К.Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения // Научные труды ОшГУ. – Ош: Редакц.-изд. отдел «Билим», 1999. – Вып. 2. – С. 137–145.
6. Матанова К.Б. О существовании и единственности решения одной обратной задачи // Обратные и некорректные задачи математической физики: Докл. Междунар. конф., посвящ. 75-летию акад. М.М. Лаврентьева, 20–25 авг. 2007 г. – Новосибирск, 2007. – С. 137–145.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
8. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Поступила 10.02.2010 г.

УДК 519.17

М-АЦИКЛИЧЕСКИЕ И ДРЕВОВИДНЫЕ ГИПЕРГРАФЫ

В.В. Быкова

Институт математики Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: bykvalen@mail.ru

Приводится характеризация двух классов гиперграфов: М-ациклических и древовидных. Установлена связь между этими классами: гиперграф М-ацикличен тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф является древовидным. Эта связь дает возможность объединить арсенал известных полиномиальных алгоритмов, позволяющих распознавать принадлежность гиперграфа к указанным классам и строить деревья соединений, деревья декомпозиций и деревья реализаций гиперграфа.

Ключевые слова:
Реализация гиперграфа деревом, дерево соединений гиперграфа, древовидная декомпозиция задач дискретной оптимизации, полиномиальные вычисления.

Key words:
Tree realization hypergraph, tree compounds hypergraph, tree decomposition of problem discrete optimization, polynomial computations.

Введение

Теория гиперграфов – один из разделов современной дискретной математики, имеющий большое прикладное значение. Данная теория располагает группой задач, не имеющих аналогов в теории графов и являющихся в большинстве своем NP-трудными. К этой группе задач, в частности, относятся задачи поиска для гиперграфа декомпозиций и реализаций с заданными свойствами [1–4]. Необходимость практического решения этих задач в условиях, когда размерность задач велика, ставит вопрос о выделении классов гиперграфов, для которых они полиномиально разрешимы. Такие классы, например, образуют М-ациклические и древовидные гиперграфы.

Класс М-ациклических гиперграфов обладает рядом интересных свойств. Основное из них – это существование для связного М-ациклического гиперграфа дерева соединений. Понятие дерева соединений было введено в работе [4] и использовано там для построения монотонных планов соединений и программ полной редукции реляционных баз данных. Между тем, подобные деревья (их называют деревьями декомпозиции, деревьями клик) широко употребляют при решении задач дискретной оптимизации методами локальной декомпозиции и динамического программирования [2, 3]. Локальная оптимизация, осуществляемая в соответствии с деревом декомпозиции, дает возможность решать многие NP-трудные задачи дискретного программирования с разреженной матрицей ограничений за полиномиальное время [3].

Древовидный гиперграф – гиперграф, для которого существует реализация деревом. Древовидная реализация относится к минимальным (по числу ребер) реализациям гиперграфа. Необходимость построения минимальных реализаций появляется, в частности, при проектировании интегральных и вакуумных схем [1]. Доказано, что в общем случае задача поиска минимальной реализации является NP-трудной [5], но в классе древовидных гиперграфов она может быть решена за полиномиальное время [6–8]. Для древовидных гиперграфов полиномиально разрешимыми являются также задачи распознавания бихроматичности гиперграфа и реализуемости гиперграфа на плоскости [9, 10]. Данная работа посвящена установлению связи между классами М-ациклических и древовидных гиперграфов.

Определение необходимых понятий

Используем терминологию и обозначения, принятые в [7–12]. Пусть задан гиперграф $H=(X,U)$ с конечным множеством вершин X и ребер U. В общем случае U – конечное семейство произвольных подмножеств множества X. При $X=\varnothing$ и $U=\varnothing$, гиперграф $H=(\varnothing,\varnothing)$ считается пустым. Пусть $U(x)$ – множество ребер, инцидентных в $H=(X,U)$ вершине $x\in X$, а $X(u)$ – множество всех вершин, инцидентных в $H=(X,U)$ ребру $u\in U$. Число $|U(x)|$ определяет степень вершины x, а число $|X(u)|$ – степень ребра u. Элемент гиперграфа степени 0 считают голым, степени 1 – висячим. Два ребра $u,v\in U$ кратные в $H=(X,U)$, если $X(u)=X(v)$. Ребро вложено u в ребро v, когда $X(u)\subset X(v)$. Если $|X(u)|=2$ для каждого $u\in U$ и в U нет кратных ребер, то $H=(X,U)$ – обыкновенный граф.

Существуют различные способы задания гиперграфа. Так, произвольный гиперграф $H=(X,U)$ однозначно определяется семействами множеств $\{X(u)/u\in U\}$, $\{U(x)/x\in X\}$. Если $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $n\geq 1$ и $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$, $m\geq 1$, то (n,m)-гиперграф $H=(X,U)$ однозначно описывается матрицей инциденций $A(H)=\{a_{ij}\}$, где $a_{ij}=1$ при $x_i\in X(u_j)$ и $a_{ij}=0$ при $x_i\notin X(u_j)$ $(i=1,2,...,n;\, j=1,2,...,m)$.

Гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ с матрицей инциденций $A(H^*)$, полученной транспонированием матрицы инциденций $A(H)$ гиперграфа $H=(X,U)$, называется двойственным гиперграфом для H. Гиперграф H^* полностью сохраняет отношения смежности и инцидентности между элементами гиперграфа H. Оттого он наследует все его свойства, основанные на этих отношениях, и однозначно определяет H.

Универсальным способом задания гиперграфа является кенигово представление. Кенигово представление гиперграфа $H=(X,U)$ – это обыкновенный двудольный граф $K(H)$, отражающий отношение инцидентности различных элементов гиперграфа, с множеством вершин $X\cup U$ и долями X,U. Очевидно, что $K(H)=K(H^*)$. Многие структурные свойства гиперграфа определяются через одноименные свойства кенигова представления. Так, гиперграф H считается связным, если связен граф $K(H)$.

Частично структурные особенности гиперграфа $H=(X,U)$ описывают ассоциирование с ним обыкновенные графы $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$. Граф $L^{(2)}(H)$ представляет отношение смежности вершин, а граф $L(H)$ – отношение смежности ребер гиперграфа H. Граф $L(H)=(U,E)$ считают помеченным, если всякому его ребру $\{u_i,u_j\}\in E$ поставлена в соответствие метка – множество $f_{ij}=X(u_i)\cap X(u_j)\neq\varnothing$. Число $|f_{ij}|$ рассматривают как вес ребра $\{u_i,u_j\}$. Граф $L(H)$, для каждого ребра $\{u_i,u_j\}$ которого указан вес $|f_{ij}|=|X(u_i)\cap X(u_j)|$, называют взвешенным реберным графом гиперграфа H.

Среди множества структурных свойств гиперграфов различают симметричные и двойственные свойства. Свойство α симметричное, когда им обладают (не обладают) гиперграфы H и H^* одновременно. Свойства α и β именуют двойственными, если из того, что H присуще свойство α, следует, что H^* удовлетворяет свойству β, и наоборот, когда H отвечает свойству β, то H^* удовлетворяет свойству α.

Обозначим через $\mathbf{H}$ класс всех непустых связных гиперграфов. Далее будем рассматривать гиперграфы только из этого класса. В этих условия: если $H=(X,U)\in\mathbf{H}$, то $H^*=(X^*,U^*)\in\mathbf{H}$; $H=(X,U)$ и $H^*=(X^*,U^*)$ не содержат голых элементов; $L^{(2)}(H)$, $L(H)$, $L^{(2)}(H^*)$, $L(H^*)$ – связные графы.

Характеризация М-ациклических гиперграфов

Определение М-ациклического гиперграфа основано на понятии бесхордового цикла. Традиционно цикл гиперграфа H определяют через простой цикл кенигова представления $K(H)$ [7, 11]. Здесь употребляется иная трактовка данного понятия [4, 12]. Пусть задан (n,m)-гиперграф $H=(X,U)$ и некоторая последовательность его ребер $P=(u_1,u_2,...,u_k,u_{k+1})$, $3\leq k<m$. Используя обозначение $f_i=X(u_i)\cap X(u_{i+1})$, $i=1,2,...,k$, эту последовательность можно представить как $P=(u_1,f_1,u_2,f_2,...,u_k,f_k,u_{k+1})$. Последовательность P задает в гиперграфе H М-цикл (цикл по Д. Мейеру [4]) длины k, если:

- $u_1,u_2,...,u_{k+1}$ – различные ребра гиперграфа H (различные как элементы семейства U, при этом не исключено наличие среди них кратных и вложенных ребер);
- каждые два соседних ребра в P смежные, т. е. $f_i\neq\varnothing$ для любого $i=1,2,...,k$;
- $f_i\neq f_{i+1}$ для всякого $i=1,2,...,k$;
- $u_1=u_{k+1}$ и $f_1\neq f_k$.

Если все множества $f_1,f_2,...,f_k$ попарно различные, то P – простой М-цикл гиперграфа H. М-цикл $P=(u_1,f_1,u_2,f_2,...,u_k,f_k,u_{k+1})$ считается бесхордовым, если для любой тройки множеств f_a,f_b,f_c $(1\leq a<b<c\leq k)$ из P в гиперграфе H нет ребра u такого, что $f_a\cup f_b\cup f_c\subseteq X(u)$. Когда хотя бы для одной тройки f_a,f_b,f_c $(1\leq a<b<c\leq k)$ такое ребро u существует в H (u играет роль «хорды» и не обязательно принадлежит P), то P – хордовый М-цикл гиперграфа H. Любопытно, что бесхордовый М-цикл всегда простой. Гиперграф H, не содержащий бесхордовых М-циклов, называется М-ациклическим [4, 12]. Понятно, что если гиперграф М-ацикличен, то он либо вообще не содержит М-циклов, либо все его М-циклы хордовые. Наличие бесхордового цикла приводит к М-цикличности гиперграфа.

Всякий обыкновенный граф без циклов М-ацикличен, а с циклами – М-цикличен. Действительно, в каждом простом цикле графа для произвольной тройки множеств f_a,f_b,f_c $(1\leq a<b<c\leq k)$ обязательно $|f_a\cup f_b\cup f|=3$. Между тем, всякое ребро графа содержит только две вершины. Таким образом, М-ацикличность не является прямым обобщением теоретико-графового понятия «хордальность», хотя имеется некоторая аналогия. Напомним, что

обыкновенный граф называется хордальным, если всякий его цикл длиной $k\geq 4$ обладает «хордой» – ребром, соединяющим две несмежные вершины этого цикла [7].

Заметим, что свойство М-ацикличности несимметрично: двойственный гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ обладает или не обладает свойством М-ацикличности независимо от того, является ли М-ациклическим соответствующий ему гиперграф $H=(X,U)$. Это легко устанавливается с помощью специально подобранных примеров.

М-ацикличность гарантирует для гиперграфа многие желательные структурные свойства. Наиболее важные из них – это успешное завершение алгоритма Грэхема и существование дерева соединений. Этот факт констатирует теорема 1.

Теорема 1 [4]. Для произвольного (n,m)-гиперграфа $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ следующие высказывания эквивалентны:

1) H является М-ациклическим гиперграфом;
2) алгоритм Грэхема завершается успешно;
3) для H существует дерево соединений;
4) дерево соединений гиперграфа H – остовное дерево наибольшего веса взвешенного реберного графа $L(H)$.

Алгоритм Грэхема [4] – элиминационная схема последовательного применения к гиперграфу операций: СУВ – слабое удаление голых и висячих вершин (без удаления ребер, которые им инцидентны); СУР – слабое удаление кратных, вложенных ребер (без удаления вершин, которые им инцидентны). Обозначим через $red(H)$ гиперграф, полученный в результате применения алгоритма Грэхема к гиперграфу H. Говорят, что алгоритм Грэхема для H завершается успешно, если $red(H)=(\varnothing,\varnothing)$. Предположим, что шаг алгоритма сводится к выполнению одной операции СУВ или СУР. Поскольку на каждом шаге исходный гиперграф H теряет часть своих элементов, поэтому число шагов алгоритма конечно. Показано [4], что алгоритм Грэхема всегда приводит к одному и тому же гиперграфу $red(H)$ вне зависимости от порядка и числа удаляемых элементов на каждом шаге. Кроме того, операции СУВ и СУР сохраняют связность гиперграфа. Все это свидетельствует о рекурсивном характере алгоритма Грэхема и наследственности свойства М-ацикличности относительно операций СУВ и СУР (все гиперграфы, полученные из М-ациклического гиперграфа путем применения к нему этих операций также М-ацикличны).

Алгоритм Грэхема прост в реализации и имеет полиномиальную временную сложность. В самом деле, наибольшее число шагов алгоритма возникает в случае, когда операции СУВ и СУР устраняют только один элемент гиперграфа. Учитывая, что трудоемкость одного шага составляет $O(nm^2)$, то для выполнения алгоритма Грэхема в худшем случае достаточно $O[nm^2(m+n)]$ условных единиц времени. Таким образом, эквивалентность высказываний 1) и 2) теоремы 1 дает полиномиальный способ проверки М-ацикличности гиперграфа.

Эквивалентность высказываний 1) и 3) теоремы 1 устанавливает полиномиально проверяемое необходимое и достаточное условие существования дерева соединений: для гиперграфа $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ дерево соединений существует тогда и только тогда, когда гиперграф H является М-ациклическим. Приведем определение дерева соединений [4]. Пусть $L(H)=(U,E)$ – реберный граф гиперграфа $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ и $x\in X$. Цепь $P=(u_i,u_{i+1},\dots,u_j)$ графа $L(H)$, следующая из вершины u_i в вершину u_j, называется x-цепью, если $x\in X(u_i),x\in X(u_{i+1}),\dots,x\in X(u_j)$. Пусть $T_{join}(H)$ – остовное дерево графа $L(H)=(U,E)$. Дерево $T_{join}(H)$ называется деревом соединений гиперграфа H, если для всякой пары $u_i,u_j\in U$ и любого $x\in X(u_i)\cap X(u_j)\neq\varnothing$ в $T_{join}(H)$ существует x-цепь, ведущая из u_i в u_j. Эквивалентность высказываний 1) и 4) теоремы 1 указывает полиномиальный способ нахождения дерева соединений с помощью известных теоретико-графовых алгоритмов построения максимального (минимального) остова графа [7].

В качестве примера рассмотрим гиперграф H из работы [7. С. 310]. Процесс применения к нему алгоритма Грэхема приведен на рис. 1. Алгоритм завершается успешно, поскольку $red(H)=(\varnothing,\varnothing)$. Значит, данный гиперграф М-ацикличен.

Единственный М-цикл $P=(u_3,f_{35},u_5,f_{54},u_4,f_{43},u_3)$ гиперграфа H является хордовым, т. к. $f_{35}\cup f_{54}\cup f_{43}=\{x_4\}\cup\{x_4,x_5\}\cup\{x_4,x_8\}=\{x_4,x_5,x_8\}=X(u_4)$. Этот цикл легко обнаруживается в реберном графе $L(H)$, изображенном на рис. 2. Остов наибольшего веса графа $L(H)$ определяет дерево соединений $T_{join}(H)$, ребра которого на рис. 2 отмечены пунктиром. Это одно из трех возможных деревьев соединений.

Теорема 2 [9]. Гиперграф $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ М-ацикличен тогда и только тогда, когда он комплектный, а граф $L^{(2)}(H)$ хордальный.

Данная теорема характеризует М-ациклический гиперграф H через структурные особенности ассоциированных с ним графов $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$. Проанализируем вначале свойство комплектности. Гиперграф $H=(X,U)$ называют комплектным, если для любого $Y\in X$, порождающего в $L^{(2)}(H)$ полный подграф, в H существует ребро $u\subseteq U$ такое, что $Y\subseteq X(u)$ [11]. Очевидно, что всякий комплектный гиперграф не содержит голых вершин. Свойство комплектности двойственно по отношению к свойству условию Хелли. Этот факт доказан в работе [11]. Говорят, что гиперграф $H=(X,U)$ обладает свойством Хелли, если для любого подсемейства его попарно смежных ребер $U'\subseteq U$ существует по крайне мере одна общая вершина, инцидентная каждому ребру из U'. Так, гиперграф H, рис. 1, комплектный и отвечает условию Хелли (следовательно, H^* также комплектный).

Напомним некоторые теоретико-графовые понятия, которые употребляются далее. Пусть задан обыкновенный граф $G=(V,E)$. Кликой графа G называют подмножество $C\subseteq V$, в котором любые две вершины смежные, т. е. порожденный подграф $G(C)$ полный. Клика максимальная, если она не содержится ни в какой другой клике. Граф клик –

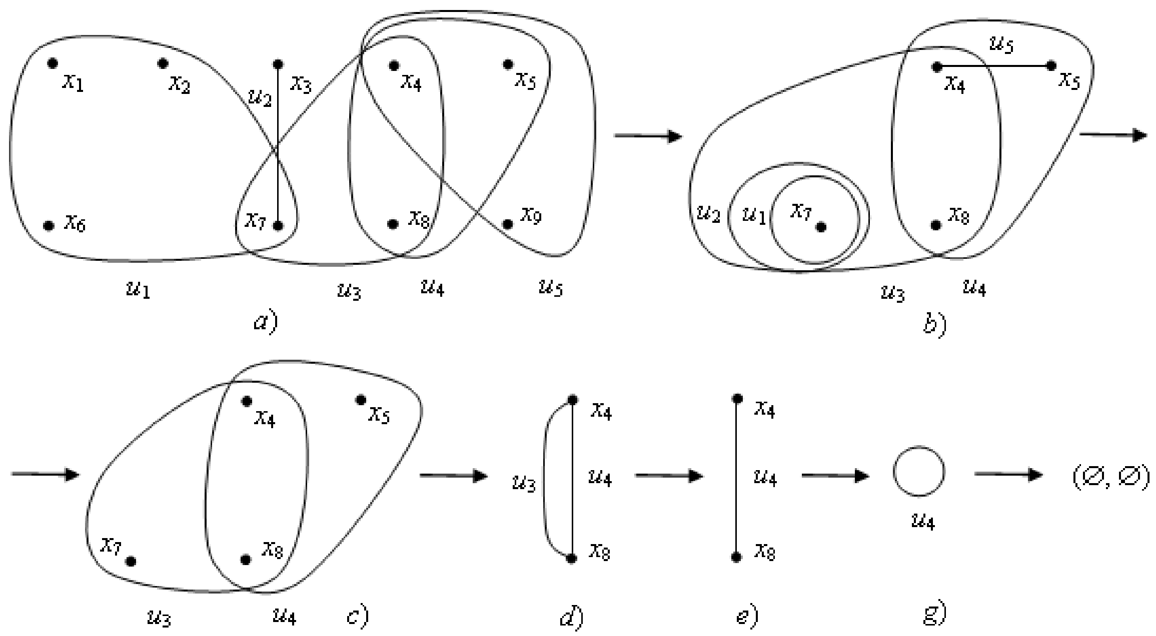
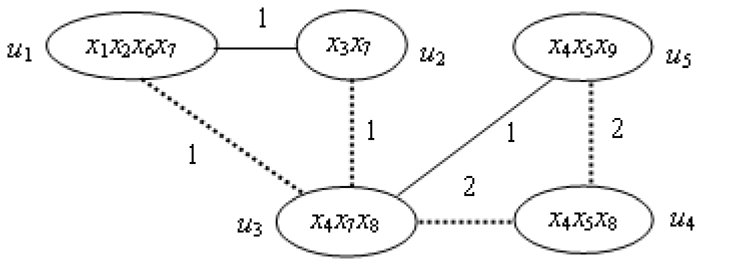


Рис. 1. *a) Исходный гиперграф H. Процесс применения к H алгоритма Грэхема: b) результат СУВ x_1, x_2, x_3, x_6, x_9; c) результат СУР u_1, u_2, u_5; d) результат СУВ x_5, x_7; e) результат СУР u_3; g) результат СУВ x_4, x_8*



$$|f_{12}| = |f_{13}| = |f_{23}| = |\{x_7\}| = 1$$
$$|f_{35}| = |\{x_4\}| = 1$$
$$|f_{34}| = |\{x_4, x_8\}| = 2$$
$$|f_{54}| = |\{x_4, x_5\}| = 2$$

Рис. 2. *Взвешенный реберный граф L(H) гиперграфа H с рис. 1*

граф пересечений всех максимальных клик графа G (две вершины смежны в графе клик тогда и только тогда, когда соответствующие им максимальные клики имеют непустое пересечение). Дерево клик – остовной подграф графа клик, являющийся деревом и удовлетворяющий надлежащему условию: для любых его двух клик C_i,C_j и всякой клики C_k, лежащей на пути из C_i в C_j выполняется включение $C_i \cap C_j \subseteq C_k$ [7].

На рис. 3 изображен граф $L^{(2)}(H)$ смежности вершин гиперграфа H с рис. 1. Граф клик для $L^{(2)}(H)$ представлен на рис. 4. Этот граф с точностью до нумерации совпадает с реберным графом $L(H)$ (рис. 2). Заметим, сам гиперграф H при этом не содержит кратных и вложенных ребер.

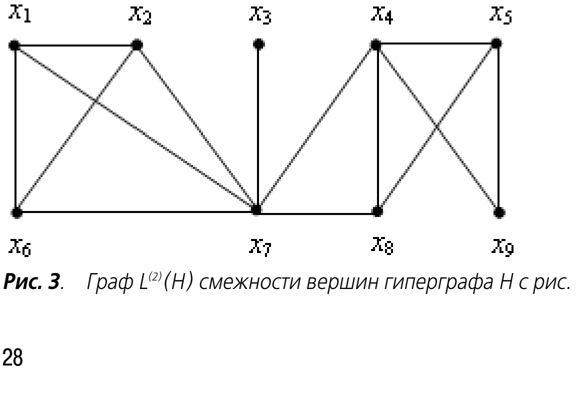


Рис. 3. *Граф $L^{(2)}(H)$ смежности вершин гиперграфа H с рис. 1*

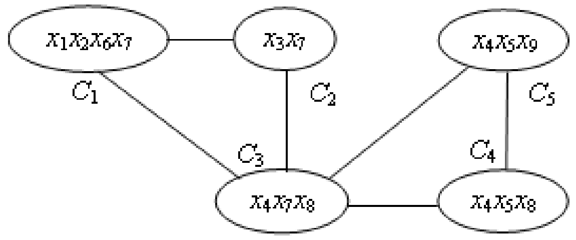


Рис. 4. *Граф клик для $L^{(2)}(H)$*

Утверждение 1. Если (n,m)-гиперграф $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ комплектен и в нем нет кратных и вложенных ребер, то граф клик для $L^{(2)}(H)$ изоморфен реберному графу $L(H)$. В общем случае (при наличии кратных и вложенных ребер) имеет место изоморфное вложение графа клик в $L(H)$.

Доказательство. Справедливость первой части утверждения вытекает непосредственно из определения комплектности гиперграфа: когда H комплектен и в нем нет кратных и вложенных ребер, то каждой максимальной клике C_i графа $L^{(2)}(H)$ соответствует точно одна вершина u_i реберного графа $L(H)$ и $C_i=X(u_i)$, $1 \le i \le m$. Если теперь в гиперграф $H=(X,U)$ вставить дополнительное ребро u_j такое, что $X(u_j) \subseteq X(u_i)$ и $u_i \in U$, то это не приведет к изменению графа клик для $L^{(2)}(H)$, а только добавит в $L(H)$ дополнительную вершину, соответствующую ребру u_j.

Рассмотрим гиперграф H^*, двойственный к гиперграфу H с рис. 1 Данный гиперграф комплектный (рис. 5). В нем имеются кратные и вложенные ребра: $U(x_3)\subset U(x_7)$, $U(x_1)=U(x_2)=U(x_6)\subset U(x_7)$, $U(x_8)\subset U(x_4)$, $U(x_5)\subset U(x_4)$, $U(x_9)\subset U(x_4)$, $U(x_9)\subset U(x_5)$. Реберный граф $L(H^*)$ гиперграфа H^* изображен на рис. 6. Остовное дерево наибольшего веса графа $L(H^*)$ задает дерево соединений гиперграфа H^*. Ребра одного из них на рис. 6 выделены пунктиром.

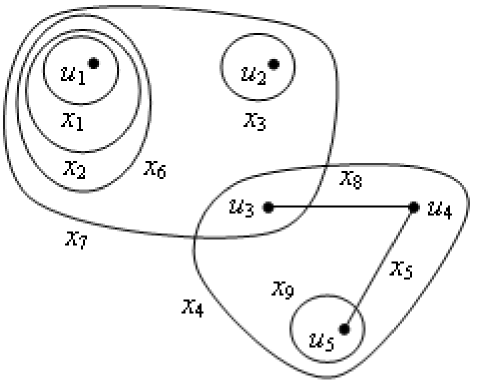
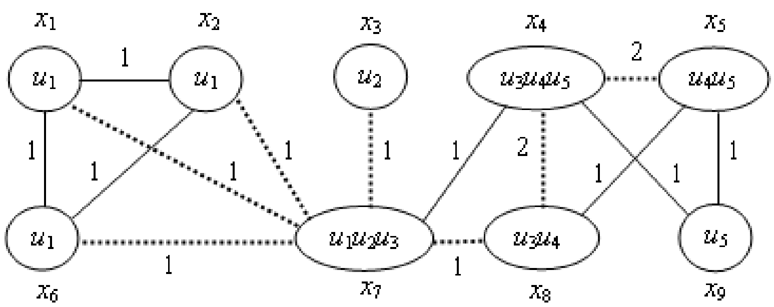


***Рис. 5**. Гиперграф H*, двойственный к гиперграфу H с рис. 1*



$$|f_{12}| = |f_{16}| = |f_{17}| = |\{u_1\}| = 1$$
$$|f_{26}| = |f_{27}| = |f_{67}| = |\{u_1\}| = 1$$
$$|f_{37}| = |\{u_2\}| = 1$$
$$|f_{45}| = |\{u_4, u_5\}| = 2$$
$$|f_{47}| = |f_{78}| = |\{u_3\}| = 1$$
$$|f_{48}| = |\{u_3, u_4\}| = 2$$
$$|f_{49}| = |f_{59}| = |\{u_5\}| = 1$$
$$|f_{58}| = |\{u_4\}| = 1$$

***Рис. 6**. Взвешенный реберный граф L(H*) гиперграфа H**

Граф $L^{(2)}(H^*)$ смежности вершин гиперграфа H^* (рис. 7) содержит только две максимальные клики $C_1=\{u_1,u_2,u_3\}$, $C_2=\{u_3,u_4,u_5\}$, которые отвечают в $L(H^*)$ вершинам x_7,x_4 соответственно. Таким образом, здесь наблюдается изоморфное вложение графа клик в реберный граф гиперграфа.

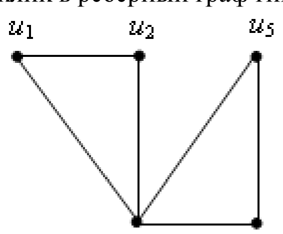


***Рис. 7**. Граф $L^{(2)}(H^*)$ смежности вершин гиперграфа H**

Второе требование теоремы 2 – хордальность графа $L^{(2)}(H)$ – определяет еще ряд важных характеристик:

- $L^{(2)}(H)=(X,E)$ имеет самое большое $|X|=n$ максимальных клик, и все они могут быть найдены за полиномиальное время [13]. Значит, когда граф $L^{(2)}(H)$ хордальный, комплектность – полиномиально проверяемое свойство гиперграфа;
- граф клик для $L^{(2)}(H)$ содержит дерево клик, которое строится как остовное дерево наибольшего веса графа клик [14];
- задача распознавания хордальности любого графа полиномиально разрешима [14]. Это верно, в частности, и для $L^{(2)}(H)$.

Утверждение 2. Если в М-ациклическом гиперграфе $H=(X,U)$I**H** нет кратных и вложенных ребер, то его дерево соединений изоморфно некоторому дереву клик для $L^{(2)}(H)$. В общем случае (при наличии кратных и вложенных ребер) имеет место изоморфное вложение, т. е. для любого дерева клик графа $L^{(2)}(H)$ всегда найдется дерево соединений, в которое оно изоморфно вложено.

Справедливость данного утверждения следует из хордальности $L^{(2)}(H)$ и эквивалентности определений дерева соединений гиперграфа H и дерева клик для $L^{(2)}(H)$. Утверждение 2 учитывает, что для гиперграфа может существовать несколько различных деревьев соединений, точно также как и для графа клик – несколько различных деревьев клик.

Характеризация древовидных гиперграфов

Пусть задан гиперграф $H=(X,U)$I**H**. Древовидной реализацией (реализацией деревом) гиперграфа H считают любой ациклический связный граф $T_{real}(H)=(X,E)$ с множеством вершин X и с множеством ребер E, удовлетворяющим условиям [6, 7]:

- всякое ребро $e=\{x_1,x_2\}\in E$ содержится в некотором ребре $u\in U$ гиперграфа H;
- для любого ребра $u\in U$ подграф $T_{real}(u)$, порожденный множеством $X(u)$, является связным.

Гиперграф, для которого существует реализация деревом, называют древовидным. Необходимые и достаточные условия существования древовидности устанавливает следующая теорема.

Теорема 3 [6,7]. Для гиперграфа $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ существует древовидная реализация тогда и только тогда, когда $H=(X,U)$ удовлетворяет свойству Хелли, а реберный граф $L(H)$ хордальный.

Выясним связь между М-ацикличностью и древовидностью гиперграфа.

Утверждение 3. Для произвольного гиперграфа $H=(X,U)$ и двойственного к нему гиперграфа $H^*=(X^*,U^*)$ справедливы равенства: $L^{(2)}(H)=L(H^*)$, $L(H)=L^{(2)}(H^*)$.

Доказательство. Множества вершин в графах $L^{(2)}(H)=(X,E)$ и $L(H^*)=(X,E^*)$ совпадают. Таким образом, доказательство соотношения $L^{(2)}(H)=L(H^*)$ сводится к установлению равенства множеств $E=E^*$. В самом деле, пусть $\{x,y\}\in E$. По определению вершины $x,y\in X$ смежные в $L^{(2)}(H)$, если H имеет ребро $u\in U$ такое, что $x,y\in X(u)$. Это означает, что ребро u инцидентно в H вершинам x,y, т. е. $u\in U(x)$ и $u\in U(y)$. Отсюда $u\in U(x)\cap U(y)\neq\varnothing$. Значит, $L(H^*)$ содержит ребро $\{x,y\}\in E^*$ и $E\subseteq E^*$. Докажем теперь обратное включение. По определению графа $L(H^*)$ для произвольного ребра $\{x,y\}\subseteq E^*$ верно $U(x)\cap U(y)\neq\varnothing$. Тогда для любого $u\in U(x)\cap U(y)\neq\varnothing$ выполняются отношения принадлежности: $x\in X(u)$, $y\in X(u)$. Итак, $\{x,y\}\in E$ и $E^*\subseteq E$. Следовательно, $E=E^*$. Равенство $L(H)=L^{(2)}(H^*)$ двойственно равенству $L^{(2)}(H)=L(H^*)$. Таким образом, утверждение 3 доказано.

Справедливость утверждения 3 иллюстрируют рис. 2, 3, 6, 7.

Поскольку комплектность и свойство Хелли – двойственные свойства гиперграфов, то с учетом утверждения 3 верна следующая формулировка теоремы 3.

Теорема 4. Гиперграф $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ допускает древовидную реализацию тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ комплектный, а граф $L^{(2)}(H^*)$ хордальный.

В такой формулировке критерий существования древовидной реализации (n,m)-гиперграфа легко проверяется с помощью алгоритма Грэхема с временной сложностью $O[nm^2(m+n)]$. Из теорем 2–4 вытекает двойственность свойств М-ацикличности и древовидности.

Теорема 5. Гиперграф $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ М-ацикличен тогда и только тогда, когда двойственный к нему гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ является древовидным.

Утверждение 4. Пусть гиперграф $H=(X,U)\in\mathbf{H}$ и двойственный к нему гиперграф $H^*=(X^*,U^*)$ древовидный. Тогда всякое дерево соединений $T_{join}(H)$ гиперграфа H является древовидной реализацией гиперграфа H^*, и наоборот, любая древовидная реализация $T_{real}(H^*)$ гиперграфа H^* – дерево соединений для H.

Доказательство. По теоремам 1, 5 гиперграф H является М-ациклическим и для него существует дерево соединений $T_{join}(H)$. Покажем, что $T_{join}(H)$ – древовидная реализация для H^*. Граф $T_{join}(H)$ – остовное дерево графа $L(H)$. По утверждению 3 $L(H)=L^{(2)}(H^*)$, поэтому $T_{join}(H)$ – остовное дерево графа $L^{(2)}(H^*)$. Рассмотрим произвольное ребро $\{u,v\}$ дерева $T_{join}(H)$. Для него, как ребра графа $L(H)$, $X(u)\cap X(v)\neq\varnothing$. Тогда в гиперграфе H^* существует ребро $x\in X(u)\cap X(v)$ такое, что $u\in U(x)$ и $v\in U(x)$. Следовательно, ребро $\{u,v\}$ дерева $T_{join}(H)$ содержится в ребре x гиперграфа H^*. Теперь выберем в H^* произвольное ребро x. Пусть $T_{join}(x)$ – подграф дерева соединений $T_{join}(H)$, порожденный множеством $U(x)$. Этот граф всегда связен, т. е. любые две его вершины $u,v\in U(x)$ соединены цепью. Действительно, по определению дерева соединений в $T_{join}(H)$ существует x-цепь P, ведущая из u в v. Поскольку P является x-цепью, то P полностью лежит в $T_{join}(x)$. Все требования, заданные в определении древовидной реализации, выполнены. Значит, $T_{join}(H)=T_{real}(H^*)$. Аналогичным образом доказывается и обратное высказывание утверждения 4.

Данное утверждение устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством различных деревьев соединений гиперграфа H и множеством различных древовидных реализаций двойственного гиперграфа H^*.

Заключение

На основании доказанных выше теоремы 5 и утверждений 1–4 можно сформулировать основной результат настоящей работы: М-ацикличность и древовидность – двойственные свойства гиперграфа, при этом всякое дерево соединений гиперграфа служит древовидной реализацией для двойственного гиперграфа и наоборот. Это результат позволяет применять полиномиальный алгоритм Грэхема для поиска древовидных реализаций гиперграфа, точно также использовать для нахождения деревьев соединений все известные эффективные алгоритмы построения древовидных реализаций [5–8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батищев Д.И., Старостин Н.В., Филимонов А.В. Многоуровневая декомпозиция гиперграфовых структур // Информационные технологии. Приложение. – 2008. – № 5. – С. 1–31.
2. Журавлев Ю.А., Лосев Г.Ф. Окрестности в задачах дискретной математики // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 2. – С. 32–41.
3. Щербина О.А. Древовидная декомпозиция и задачи дискретной оптимизации (обзор) // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 102–118.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – М.: Мир, 1987. – 608 с.
5. Азаренок А.С., Сарванов В.И. Экстремальные реализации гиперграфов // Доклады АН БССР. – 1986. – Т. 30. – № 10. – С. 887–889.
6. Левин А.Г. О построении минимальных реализаций гиперграфов // Дискретная математика. – 1990. – Т. 2. – Вып. 3. – С. 102–114.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
8. Мельников О.И. Реализации гиперграфа деревьями минимального диаметра // Дискретная математика. – 1997. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 91–97.
9. Быкова В.В. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 98–106.
10. Быкова В.В. Полиномиальные достаточные условия реализуемости гиперграфа на плоскости // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 15–20.
11. Зыков А.А. Гиперграфы // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29. – Вып. 6. – С. 89–154.
12. Быкова В.В., Куприянова Т.В. Сравнительный анализ М-ациклических и комплектных гиперграфов // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Тезисы докл. Междунар. конф. – Омск: Омск. гос. ун-т, 1997. – С. 31.
13. Dirac G.A. On rigid circuit graphs // Anh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1961. – № 25. – P. 71–76.
14. Shibata Y. On the tree representation chordal graphs // J. Graph Theory. – 1988. – № 12. – P. 421–428.

Поступила 01.02.2010 г.