

УДК 531.36

ОСНОВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХМАЯТНИКОВОГО АВТОБАЛАНСИРА НА ГИБКОМ ВАЛУ С УПРУГИМИ ОПОРАМИ

В.А. Дубовик, Г.Р. Зиякаев

Томский политехнический университет

E-mail: zgr@rambler.ru

Получены условия балансировки маятниками неуравновешенного ротора на гибком валу, вращающегося в упруго-податливых опорах.

Ключевые слова:

Ротор, маятниковый автобалансир, дисбаланс, устойчивость, критическая угловая скорость, уравнения движения системы.

Key words:

Rotor, balancing device, unbalance, dynamic stability, critical speed, equations of motion.

Изучению динамики маятниковых и шаровых автобалансиров посвящены работы [1–4]. В [5] исследуется в первом приближении устойчивость основного движения маятникового автобалансера. В этих работах считается, что опоры вала, на котором крепится ротор с балансировочным устройством, являются абсолютно жесткими. Практически опоры вала, как правило, оказываются упруго деформируемыми, что приводит к изменению частоты колебаний вала [6] и, как следствие этого, условий балансировки. Ниже изучается влияние упругой податливости и массы опор вала с неуравновешенным ротором на основное движение маятникового автобалансера. Считается, что на ротор в месте крепления его к валу помимо упругой силы действуют внутреннее трение, пропорциональное скорости деформации [6], и сила внешнего сопротивления, пропорциональная скорости точки крепления. Целью работы является при сформулированных выше положениях установление условий существования основного движения маятникового автобалансера, т. е. движения, при котором отсутствуют прогиб вала и смещение опор (рис. 1, а).

На (рис. 1, б) приведена схема возмущенного движения системы. Ротор, центр масс которого составляет с его геометрическим центром C эксцентриситет $CC' = e$, закреплен посередине вала в точке C так, что он может двигаться только в плоскости, перпендикулярной оси опор $AB - xOy$. При вращении вала вокруг неподвижной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω он прогибается на величину OC , а ось опор AB смещается на $-OO'$. Предполагается, что ось вращения Oz вертикальна, либо силы инерции намного больше сил тяжести. Это позволяет пренебречь влиянием последних на движение системы.

За обобщенные координаты принимаем x, y и x_0, y_0 — перемещения центра ротора и опор вала относительно неподвижной системы координат xOy , а также γ_1, γ_2 — углы поворота маятников относительно вектора дисбаланса ротора $\vec{CC'}$ (рис. 1, б). Массу ротора обозначим через m_p ; массу опоры — m_o ; массу маятника — m ; моменты инерции относительно центральных осей, параллельных оси Oz ротора и маятника соответственно — J_p и J ; изгибную жесткость вала — c ; жесткость опоры — c_o ; длину маятника — l .

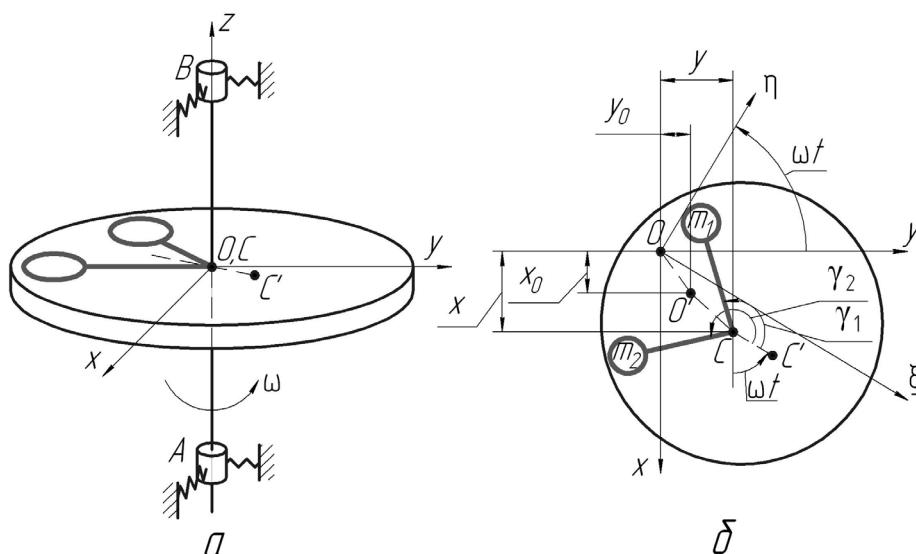


Рис. 1. Схема движений ротора с маятниками: а) основного и б) возмущенного

Упругие силы, действующие на опору и на ротор со стороны вала, равны $\vec{F}_{co} = -c_o \cdot \vec{OO}'$ и $\vec{F}_c = -c_o \cdot \vec{OC}$; сила вязкого сопротивления среды $\vec{F}_T = -h_1 \cdot \vec{V}_C$; моменты сил вязкого сопротивления, препятствующие повороту маятников относительно вала $M_{c1} = -h_2 \dot{\gamma}_1$, $M_{c2} = -h_2 \dot{\gamma}_2$. Скорость деформации вала в точке С равна разности скоростей точек С и О' в системе координат $\xi O \eta$, вращающейся вместе с валом, $\vec{V}_{CO} = \vec{V}_C - \vec{V}_{O'} = \vec{V}_C - \vec{\omega} \times \vec{OC}$. Тогда сила внутреннего трения, приложенная к ротору в точке С равна $\vec{F}_{TB} = -k \vec{V}_{CO}$ [6], а её проекции на неподвижные оси будут

$$\begin{aligned} F_{TBx} &= -k[\dot{x} - \dot{x}_o + \omega(y - y_o)], \\ F_{TBy} &= -k[\dot{y} - \dot{y}_o - \omega(x - x_o)]. \end{aligned}$$

Здесь h_1, h_2 – коэффициенты вязкого трения ротора, маятника; k – коэффициент внутреннего трения; точка сверху означает производную по времени.

В принятых обозначениях кинетическая, потенциальная энергии и диссипативная функция рассматриваемой механической системы имеют вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_p [(\dot{x} - e\omega \sin \omega t)^2 + (\dot{y} + e\omega \cos \omega t)^2] + \\ &+ \frac{1}{2} J_p \omega^2 + 2 \frac{1}{2} m_o (\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ m \left[\left[\dot{x} - l(\omega + \dot{\gamma}_i) \sin(\omega t + \gamma_i) \right]^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[\dot{y} + l(\omega + \dot{\gamma}_i) \cos(\omega t + \gamma_i) \right]^2 \right] + J \right\}; \\ \Pi &= \frac{1}{2} c[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2] + 2 \frac{1}{2} c_o (x_o^2 + y_o^2); \\ \Phi &= \frac{1}{2} k \left\{ \left[\dot{x} - \dot{x}_o + \omega(y - y_o) \right]^2 + \right. \\ &\left. + \left[\dot{y} - \dot{y}_o - \omega(x - x_o) \right]^2 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} h_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} h_2 \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_i^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа 2-го рода, приходим к дифференциальным уравнениям движения системы

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c(x - x_o) + h_1 \dot{x} + k(\dot{x} - \dot{x}_o) + k\omega(y - y_o) - \\ - ml \sum_{i=1}^2 [\ddot{\gamma}_i \sin(\omega t + \gamma_i) + (\omega + \dot{\gamma}_i)^2 \cos(\omega t + \gamma_i)] = \\ = m_p e \omega^2 \cos \omega t; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + c(y - y_o) + h_1 \dot{y} + k(\dot{y} - \dot{y}_o) - k\omega(x - x_o) + \\ + ml \sum_{i=1}^2 [\ddot{\gamma}_i \cos(\omega t + \gamma_i) - (\omega + \dot{\gamma}_i)^2 \sin(\omega t + \gamma_i)] = \\ = m_p e \omega^2 \sin \omega t; \end{aligned} \quad (2)$$

$$2m_o \ddot{x}_o + (2c_o + c)x_o + k\dot{x}_o - cx - k\dot{x} - k\omega(y - y_o) = 0; \quad (3)$$

$$2m_o \ddot{y}_o + (2c_o + c)y_o + k\dot{y}_o - cy - k\dot{y} + k\omega(x - x_o) = 0; \quad (4)$$

$$\ddot{\gamma}_i + h\dot{\gamma}_i = \mu \phi_i(\ddot{x}, \ddot{y}, \gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$M = m_p + 2m, \quad h = h_2 / (J + ml^2),$$

$$\mu = ml / (J + ml^2) < 1,$$

$$\phi_i(\ddot{x}, \ddot{y}, \gamma_i) = \ddot{x} \sin(\omega t + \gamma_i) - \ddot{y} \cos(\omega t + \gamma_i). \quad (6)$$

Для достижения поставленной цели воспользуемся теорией синхронизации объектов с равномерными вращательными движениями [3]. Принимаем μ за малый параметр. Соответствующая (1–6) порождающая система уравнений ($\mu=0$) допускает семейство стационарных периодических решений вида

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{const}_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \text{const}_2 = \alpha_2; \\ x(t) &= U \cos \omega t - V \sin \omega t, \\ y(t) &= U \sin \omega t + V \cos \omega t; \\ x_o(t) &= U_o \cos \omega t - V_o \sin \omega t, \\ y_o(t) &= U_o \sin \omega t + V_o \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} U &= aR(\alpha_1, \alpha_2) + bI(\alpha_1, \alpha_2), \\ V &= aI(\alpha_1, \alpha_2) - bR(\alpha_1, \alpha_2); \\ a &= a_1 a_2 / (a_2^2 + b_2^2), \quad b = a_1 b_2 / (a_2^2 + b_2^2); \\ a_1 &= -2m_o \omega^2 + 2c_o + c, \quad a_2 = a_1 (c - M\omega^2) - c^2; \\ b_2 &= a_1 h \omega; \\ U_o &= a_o R(\alpha_1, \alpha_2) + b_o I(\alpha_1, \alpha_2), \\ V_o &= a_o I(\alpha_1, \alpha_2) - b_o R(\alpha_1, \alpha_2); \\ a_o &= ca_2 / (a_2^2 + b_2^2), \quad b_o = cb_2 / (a_2^2 + b_2^2); \\ R(\alpha_1, \alpha_2) &= m_p e \omega^2 + ml \omega^2 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \\ I(\alpha_1, \alpha_2) &= ml \omega^2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Эти решения зависят от двух постоянных α_1 и α_2 , которые фиксируют маятники относительно вектора дисбаланса ротора. Для определения этих постоянных составим основные уравнения. Решения (7) подставляем в (6), усредняем по времени за период $2\pi/\omega$, полученные порождающие функции приравняем нулю

$$\begin{aligned} P_i(\alpha_1, \alpha_2) &\equiv \\ &\equiv -\omega^2 \left\{ [aR(\alpha_1, \alpha_2) + bI(\alpha_1, \alpha_2)] \sin \alpha_i - \right. \\ &\left. - [aI(\alpha_1, \alpha_2) - bR(\alpha_1, \alpha_2)] \cos \alpha_i \right\} = 0 \\ &i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) имеет решение

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^* = \pi - \alpha_o, \quad \alpha_2 = \alpha_2^* = -(\pi - \alpha_o), \\ \cos \alpha_o &= \frac{m_p e}{2ml} \equiv \lambda < 1, \end{aligned} \quad (10)$$

при котором $R(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = I(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = 0$ и, как следует из (7), $x(t) = y(t) = 0$, $x_o(t) = y_o(t) = 0$, т. е. движение автобалансира, соответствующее этому решению, является основным. Решение (10) можно получить из равновесия сил инерции при основном движении.

Достаточные условия асимптотической устойчивости решения (10) имеют вид [3]

$$L_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2}\right) > 0,$$

$$L_2(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1}\right) > 0. \quad (11)$$

Подставляя в (11) производные от порождающих функций (9), для решения (10) получаем

$$L_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = -2m\omega^4 a,$$

$$L_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (m\omega^4)^2 (a^2 + b^2) 4\lambda^2 (1 - \lambda^2). \quad (12)$$

В соответствии с (10) величина $L_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ всегда положительна. Условие (12) для $L_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ приводит к требованию $a < 0$ или с учетом обозначений (8) к неравенству, записанному в безразмерных переменных

$$z(\beta) \equiv -v^2 \beta^3 + [2v(1 + \gamma) + v^2] \beta^2 - [v(1 + 2\gamma) + (1 + \gamma)^2] \beta + \gamma(1 + \gamma) < 0, \quad (13)$$

$$\text{где } v = \frac{2m_0}{M}, \quad \beta = \frac{\omega^2 M}{c} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \gamma = \frac{2c_0}{c}, \quad \omega_0 = \sqrt{c/M}$$

— собственная частота системы с неподвижными маятниками.

Решение (7) и условие устойчивости (13) не содержат коэффициента k , отсюда рассматриваемое движение не зависит от внутренних сил, что очевидно, т. к. при стационарном вращении вала скорость деформации его равна нулю.

При отсутствии массы опор ($v=0$) условие устойчивости основного движения будет

$$\omega > \sqrt{c^*/M}. \quad (14)$$

Здесь $c^* = 2c_0 c / (2c_0 + c)$ — приведенная жесткость системы. В случае $c_0 \rightarrow \infty$ (опора становится абсолютно жесткой) $c^* \rightarrow c$, и неравенство (14) переходит в условие устойчивости маятникового автобалансира на гибком валу с жесткими опорами [2].

Исследование функции $z(\beta)$ показывает, что $z(0) = \gamma(\gamma + 1) > 0$, $z(\beta) \rightarrow -\infty$ при $\beta \rightarrow +\infty$. В интервале $[0, +\infty)$ в зависимости от значений параметров v , γ она имеет либо один корень β_1 , либо три действительных корня β_1 , β_2 , β_3 , обозначенные в порядке возрастания, при этом два последних могут совпадать. Неравенство (13) выполняется, что соответствует устойчивости движения, в первом случае при $\beta > \beta_1$, а во втором — при $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ и $\beta > \beta_3$. Угловые скорости $\omega_1 = \sqrt{\beta_1} \omega_0$, $\omega_2 = \sqrt{\beta_2} \omega_0$, $\omega_3 = \sqrt{\beta_3} \omega_0$ разделяют прямую $0 < \omega < +\infty$ на устойчивые и неустойчивые области, т. е. являются критическими. Отсюда условия существования и устойчивости основного движения маятникового автобалансира имеют вид

$$\omega > \omega_1,$$

при наличии одной критической скорости и

$$\omega_1 < \omega < \omega_2, \quad \omega > \omega_3,$$

в случае трех критических скоростей.

Если две последние скорости совпадают $\omega_2 = \omega_3 = \omega^*$, то движение будет устойчивым при $\omega > \omega_1$, кроме случая $\omega = \omega^*$.

Аналогичные результаты для жестких опор получены в [5].

На рис. 2 в плоскости $(\omega/\omega_0, 2c_0/c)$ изображены графики критических скоростей в зависимости от жесткости опор $\gamma = 2c_0/c$ при $v=1$. Здесь область A между кривыми 1 и 2 и область B над кривой 3 являются областями устойчивого движения независимо от дисбаланса ротора.

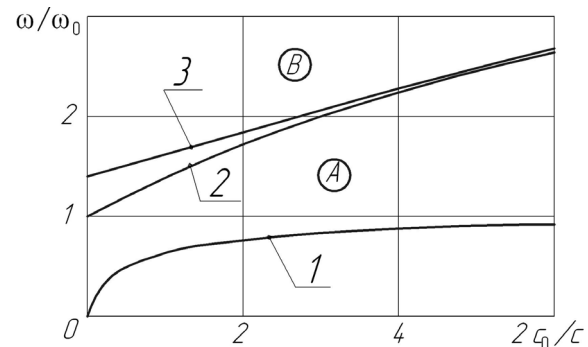


Рис. 2. Графики критических скоростей в зависимости от жесткости опор и области устойчивости движения

Из проведенных расчетов следует, что при $v < 1$ область A увеличивается, а область B уменьшается; при $v > 1$ — наоборот. С ростом параметра v область неустойчивости между кривыми 2 и 3 увеличивается. При $\gamma \geq 5920$ для $v=0,5$; $\gamma \geq 8090$ для $v=1$; $\gamma \geq 10927$ для $v=2$ существует только одна критическая скорость $\omega_1 \approx \omega_0$. В этом случае движение устойчиво при всех ω , удовлетворяющих неравенству $\omega > \omega_0$.

Выводы

Уравновешивание ротора на гибком валу с податливыми опорами малой жесткости маятниковым автобалансиром возможно при вращении вала с угловой скоростью в диапазоне критических скоростей от первой до второй, а также выше третьей. При большой жесткости опор уравновешивание происходит при угловой скорости, превышающей собственную частоту устройства. За счет выбора жесткости опор можно добиться включения автобалансира на угловой скорости, значительно меньшей, чем собственная частота.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. — М.: Наука, 2002. — 119 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.
3. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. — М.: Наука, 1981. — 352 с.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. — Томск:

Изд-во Том. ун-та, 1985. — 84 с.

5. Филимоныхин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доповид НАН України. — 1996. — № 8. — С. 74–78.
6. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 246 с.

Поступила 18.03.2010 г.