УДК 512.64

А.М.СУХОТИН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

В статье геометрическими методами найдены оценки рангов суммы и произведений линейных операторов, из которых получены, в частности, известные неравенства Сильвестра и Фробениуса (разд. 2). Перестановочность матриц в произведении рассмотрена в разд. 3. В разд. 4 сформулировано и доказано обобщение теоремы Кронекера–Капелли о совместности системы линейных уравнений на матричные уравнения. Разд. 1 содержит новые формулировку и доказательство теоремы о базисном миноре матрицы.

1. Базисной подматрицей матрицы $A=(a_j^i)$ называют всякую $r\times r$-матрицу, составленную из строк (столбцов) некоторого её базисного минора. Ниже символом $\langle n,k\rangle \triangleq \langle A\rangle$ обозначаем размер $\langle A\rangle$ матрицы A, имеющей n строк и k столбцов ($\langle n,k\rangle$-матрицы A).

Теорема 1.1 (О базисном миноре). *Для всякой $\langle n,k\rangle$-матрицы $A=(a_j^i)$ ранга r существует эквивалентная ей клеточная матрица* $H=\left(\begin{array}{c|c} H_1^1 & H_1^2 \\ \hline H_2^1 & H_2^2\end{array}\right)$, *где H_1^1 – диагональная невырожденная, в частности, единичная $\langle r,r\rangle$-матрица, а H_2^1, H_1^2, H_2^2 суть нулевые матрицы соответствующих размеров* (см. [1, стр. 71]).

Доказательством теоремы является алгоритм в четыре шага элементарных преобразований матрицы A в матрицу H (см. [1, стр. 39–41, 139–142], [8, стр. 50], ср. [3, стр. 29–33]).

1-й шаг. Заменяем подматрицу A_1^1 матрицы A базисной подматрицей B_1^1; $A\approx B$. (Если $\det A_1^1\neq 0$, то $A=B$.)

2-й шаг. Заменой в матрице B строк по формулам

2.1) если $b_q^q\neq 0$, то $\widetilde{L}^q=L^q$, если $b_q^q=0$, то $\widetilde{L}^q=L^{q+k}$, $k=\max\{s\colon\, b_{q+s}^{q+s}\neq 0\}$,

2.2) $\widetilde{L}^{p_q}=L^{p_q}-L^q\dfrac{b_q^{p_q}}{b_q^q}$, $\quad q=\overline{1,r},\quad p_q=\overline{q+1,n},$

преобразуем подматрицу B_1^1 в верхнетреугольную подматрицу C_1^1; а подматрицу B_2^1 – в нулевую подматрицу C_2^1. $B\approx C\Rightarrow A\approx C$.

3-й шаг. Заменой в матрице C строк по формулам

$$\widetilde{L}^{r-p_q}=L^{r-p_q}-L^{r-q}\frac{c_{r-p_q}^{r-q}}{c_{r-q}^{r-q}},\quad q=\overline{0,r-2},\quad p_q=\overline{q+1,r-1},$$

преобразуем подматрицу C_1^1 в диагональную подматрицу F_1^1. $F\approx C\Rightarrow A\approx F$.

4-й шаг. Заменой в матрице F столбцов по формулам

$$\widetilde{F}_{p_q}=F_{p_q}-F_q\frac{f_{p_q}^q}{f_q^q}, q=\overline{1,r}, p_q=\overline{r+1,k}$$

преобразуем подматрицу F_1^2 в нулевую подматрицу H_1^2. $F\approx H\Rightarrow A\approx H$.

Подматрица H_2^2 матрицы H является нулевой матрицей, иначе бы $\operatorname{rank} H$ и, следовательно, ранг матрицы A были бы больше r.

Замечание 1.1. *Если базисная подматрица матрицы A неизвестна или неизвестен ранг матрицы A, то шаги 1 и 2 включаем в цикл по индексу q.*

Матрицу H называют *приведённой* (канонической (см. [1, стр. 77]), если подматрица H_1^1 будет единичной) *матрицей матрицы A* или её приведённой (соответственно, канонической) формой. Приведённую матрицу H матрицы A будем обозначать символом ${}^{*}A$.

Следствие 1.1 Теоремы 1.1. *Небазисные ряды (столбцы и строки) матрицы A являются линейными комбинациями соответственных рядов базисной подматрицы матрицы A (в приведённой форме $^*A$ эти линейные комбинации являются тривиальными).*

Следствие 1.2 Теоремы 1.1. *Для каждой квадратной матрицы A справедливо равенство:* $\det(A)=\det(\,^*A)\cdot(-1)^{\sigma}$, *где σ – количество транспозиций в алгоритме доказательства Теоремы* 1.1.

В терминах разд. 1 содержание метода Гаусса решения системы линейных уравнений (СЛУ) имеет следующую формулировку: *приведение матрицы A расширенной матрицы $(A|B|\Sigma)$ СЛУ к канонической её форме.* При этом матрица $(A|B|\Sigma)$ СЛУ переходит в эквивалентную ей матрицу

$$\left(\,^*A\middle|\widetilde{B}\widetilde{\Sigma}\right)=\left(\frac{E\,|H_2^1\qquad\qquad\qquad|\,\widetilde{B}_1}{H_1^2\,|\,H_2^2\;|\,\widetilde{B}_2}\middle|\frac{\widetilde{\Sigma}_1}{\widetilde{\Sigma}_2}\right),\tag{1.1}$$

где E – единичная $\langle r,r\rangle$-матрица, а H_1^2 и H_2^2 являются нуль-матрицами, если они существуют. Если столбец $B_2\neq(0)$, то СЛУ не совместна. При $B_2=(0)$ число $d=k-r$, то есть число столбцов подматрицы H_2^1, равное числу свободных переменных в СЛУ, определяет размерность пространства решений СЛУ. Элементы контрольного столбца Σ равны суммам элементов соответствующей строки матрицы $(A|B)$.

Замечание 1.2. *Линейными операциями только над строками расширенной матрицы $(A|B|\Sigma)$ СЛУ эта матрица приводится лишь к виду*

$$\left(\widetilde{A}\,\middle|\,\widetilde{B}\,\middle|\,\widetilde{\Sigma}\,\right)\triangleq\left(\frac{GE}{0}\middle|\frac{B_1}{B_2}\middle|\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right),\tag{1.2}$$

где матрица $GE=\left(G_1\middle|\frac{E_{r_1}}{0}\middle|\cdots\middle|G_q\middle|\frac{0}{E_{r_q}}\middle|G_{q+1}\right)$ и сумма $r=r_1+r_2+\cdots+r_q$ порядков единичных матриц E_{r_s} определяет ранг матрицы *A*, а число *d*, равное сумме столбцов матриц $G_1,\ldots,G_{q+1}$, то есть числу свободных переменных в СЛУ, определяет размерность пространства решений СЛУ. Из представления расширенной матрицы $(A|B|\Sigma)$ СЛУ в виде (1.1) или (1.2) очевидно не только утверждение теоремы Кронекера – Капелли об условии совместности СЛУ, но и приведённое выше заключение о размерности пространства решений СЛУ.

При $r=n=k$ $(A|B)\approx\left(E|\widetilde{B}\right)$, и единственное решение СЛУ имеет вид $X=\widetilde{B}$.

Отметим, что матричная запись СЛУ представляет собою частный случай двучленного матричного уравнения

$$AX=B\,,\tag{1.3}$$

в котором $\langle X\rangle=\langle B\rangle=\langle n,1\rangle$. Оценка ранга возможного матричного решения *X* для более общего двучленного матричного уравнения [1, стр. 73]

$$AXB=C\,,\tag{1.3'}$$

где $\langle A\rangle=\langle m,n\rangle$, $\langle X\rangle=\langle n,p\rangle$, $\langle B\rangle=\langle p,q\rangle$ и, следовательно, $\langle C\rangle=\langle m,q\rangle$, дана в [1] (см. там же формулу (44) и далее) в следующий форме:

$$\mathrm{rank}C\le\mathrm{rank}X\le\mathrm{rank}C+n+p-\mathrm{rank}A-\mathrm{rank}B\,.\tag{1.4}$$

В [3, стр. 29–33, теор. 3.1.1] показано, что *для каждой $\langle n,k\rangle$-матрицы A существуют две невырожденные ортогональные матрицы: $\langle n,n\rangle$-матрица Q и $\langle k,k\rangle$-матрица P, такие, что $QAP^{-1}=\,^*A$ или, что то же самое,*

$$A=Q^{-1}(\,^*A)P\,.\tag{1.5}$$

Доказательство Теоремы 3.1.1 в [3] состоит из представления соответствующих преобразований *Q* и *P* цепочками подходящих двумерных вращений, а Теорема 3.1.1 называется «теоремой об ортогональном конгруэнтном приведении прямоугольной матрицы ранга *r* к блочному виду с невырожденной квадратной *r* × *r*-клеткой и остальными нулевыми блоками».

Матрицы *A* и *B* называются подобными, если существует невырожденная матрица *T*, такая, что $B=TAT^{-1}$, множество матриц $C_A\triangleq\{TAT^{-1},\ \forall T,\ \det T\neq0\}$ называется [5, стр. 29] классом сопряжённости матрицы *A*.

Замечание 1.3. *Добавление к прямоугольной матрице нулевых столбцов (строк) не меняет ранга матрицы. Не нарушая общности рассуждений, ниже мы будем рассматривать только квадратные матрицы и определяемые ими (в конкретном базисе) линейные операторы в* R_n .

2. В этом разд. и ниже мы считаем рассматриваемые операторы в $\boldsymbol{R}_n$ по умолчанию линейными. Ранг произведения двух операторов в $\boldsymbol{R}_n$ определяет точно

Теорема 2.1. *Ранг r оператора* $\boldsymbol{C}\triangleq\boldsymbol{BA}$ *определяется следующим равенством:*

$$\mathrm{r}\triangleq \operatorname{rank}\boldsymbol{BA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})\right), \qquad (2.1)$$

где $d\triangleq d(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))$ *обозначает размерность пересечения* $\ker\boldsymbol{B}\bigcap\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ *ядра оператора* $\boldsymbol{B}$ *и образа оператора* $\boldsymbol{A}$ *соответственно.*

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть действие оператора $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{R}_n$ как на линейной оболочке образа $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ оператора $\boldsymbol{A}$ и его дополнения в $\boldsymbol{R}_n$.

Так как $d\geq 0$, то из (2.1) следует, что $r\leq \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ и $\operatorname{rank}\boldsymbol{BA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ при $d=0$. А $\operatorname{rank}\boldsymbol{BA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$ лишь при следующем условии: $\boldsymbol{R}_n=(\operatorname{Im}\boldsymbol{A},\ \ker\boldsymbol{B})$. Обозначим символом $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E})$ значение оператора $\boldsymbol{B}$ на подпространстве $\boldsymbol{E}$. Из условия $\boldsymbol{B}(\operatorname{Im}\boldsymbol{A})\subseteq\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_n)$ мы получим оценку: $r\leq\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. Поэтому $\operatorname{rank}\boldsymbol{BA}\leq\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\ \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$ (см. [1, стр. 22]).

Аналогично, используя условие (2.1), мы получаем равенство

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{CBA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})\right)-d\left(KI(\boldsymbol{C},\boldsymbol{BA})\right), \qquad (2.2)$$

дающее точную оценку ранга произведения трёх операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ (ср. оценку (1.4) ранга решения матричного уравнения (1.3')).

Из равенств (2.1) и (2.2) мы получаем для произвольных линейных операторов в R_n три следующие утверждения как следствия и обобщение соответственно:

Утверждение 2.1. $d\left(KI(\boldsymbol{CB},\boldsymbol{A})\right)=d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})\right)+d\left(KI(\boldsymbol{C},\boldsymbol{BA})\right)$.

Утверждение 2.2. *Для любых операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *справедлива следующая оценка их рангов:*

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leq\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+d(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})). \qquad (2.3)$$

Утверждение 2.3. *Ранг произведения* $\boldsymbol{SR}\ldots\boldsymbol{CBA}$ *операторов* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ..., $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ *определяется следующим равенством:*

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{SR}\cdots\boldsymbol{CBA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})\right)-d\left(KI(\boldsymbol{C},\boldsymbol{BA})\right)-\cdots-d\left(KI(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}\cdots\boldsymbol{A})\right).$$

Для другого доказательства (2.3) достаточно представить образ $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ подпространством линейной оболочкой ядра $\ker\boldsymbol{B}$ оператора $\boldsymbol{B}$ и его дополнения в $\boldsymbol{R}_n$, рассмотрев при этом все возможные случаи: 1) $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\subseteq\ker\boldsymbol{B}$, 2) $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}\cap\ker\boldsymbol{B}=0$ и 3) $KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})\subset\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$.

Как следствие, из (2.1) с учётом очевидного неравенства $d(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))\leq n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$ мы получаем ещё одно утверждение (*неравенство Сильвестра* [1, стр. 73]):

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-n\ \leq\ \operatorname{rank}\boldsymbol{BA}\ \leq\ \min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}. \qquad (2.4)$$

Из равенств (2.1), (2.2) и условия $d(KK(\boldsymbol{C},\boldsymbol{BA}))\geq 0$ получим как следствие и известное (см. [11, стр. 25]) *неравенство Фробениуса*:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}+\operatorname{rank}\boldsymbol{BC}\leq\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\ +\operatorname{rank}\boldsymbol{ABC}. \qquad (2.5)$$

Действительно, из (2.1) и (2.2) получаем два условия:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}+\operatorname{rank}\boldsymbol{BC}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+\operatorname{rank}\boldsymbol{C}\ -d\left(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\right)-d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\right),$$

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\ +\operatorname{rank}\boldsymbol{ABC}\ =\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+\operatorname{rank}\boldsymbol{C}\ -d\left(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\right)-d\left(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BC})\right),$$

сравнение правых частей которых с учётом очевидного для любых операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ неравенства $d(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BC}))\leq d(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))$ даёт доказываемое.

Для произвольных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ мы получаем из Теоремы 2.1 как следствие равенство (ср. [4, стр. 116, упр. 8])

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+d(KK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))-n-d(KIK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})), \qquad (2.6)$$

где $n=\dim\boldsymbol{R}_n$, число $d(KIK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))$ есть размерность пересечения подпространств $\ker\boldsymbol{B}$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$ и $\ker\boldsymbol{A}$, а $d(KK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))$ – размерность пересечения ядер $\ker\boldsymbol{A}$ и $\ker\boldsymbol{B}$.

Аналогичным образом точная оценка ранга произведения ABC трёх операторов A, B и C получается из (2.2) ещё и в виде следующего ниже равенства (ср. [4, стр. 116, упр. 9]):

$$\operatorname{rank} CBA = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C + d(KK(B,A)) + d(KK(C,BA)) - 2n. \qquad (2.5')$$

Тривиальную оценку $|\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B| \leq \operatorname{rank}(A+B) \leq \min\{n, \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B\}$ ранга суммы $A+B$ линейных операторов A и B в R_n можно улучшить аналогично следующим образом (ср. [4, стр. 116, упр. 7]).

Теорема 2.2. *Ранги операторов A, B и A+B, действующих в* R_n, *связаны условиями*

$$|\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B| \leq d(KI(B,A)) + d(KI(A,B)) + \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B -$$
$$- d(KI(B,A) \cap \operatorname{Im} B) - d(KI(A,B) \cap \operatorname{Im} A) - d(L(A) \cap \operatorname{Im} B) - d(L(B) \cap \operatorname{Im} A),$$
$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - d(\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B) \leq n,$$

где $L(A)$ и $L(B)$ суть линейные оболочки подпространств $\operatorname{Im} A$, $\ker A$ и $\operatorname{Im} B$, $\ker B$ соответственно, а $d(E)$ означает, как и выше, размерность подпространства E.

В доказательстве Теоремы 2.3 использованы, в частности, неравенство (2.3) и очевидные неравенства $0 \leq \operatorname{rank} A - d(L(B) \cap \operatorname{Im} A)$ и $0 \leq \operatorname{rank} B - d(L(A) \cap \operatorname{Im} B)$.

Преобразование $T(A) \triangleq HAH^{-1}$ матрицы A линейного оператора A при замене $e = \tilde{e}H$ базиса e в R_n не является самым общим преобразованием матрицы (ср. с доказательством Теоремы 1.1 или с равенством (1.5)). Поэтому линейный оператор A называется оператором простой структуры (как в [1]) или диагонализуемым (как в [11]), или полупростым (см. [5, стр. 29]), если матрица A этого оператора имеет в некотором базисе диагональную форму: $A \sim D$. В условиях Теоремы 3.1.1 из [3] для матрицы диагонализуемого оператора матрицы Q и P должны (с учётом Замечания 1.3) совпадать. Матрицу H, диагонализующую матрицу A оператора A, мы называем *диагонализующей матрицей для оператора A* (для матрицы A). В [1, стр. 80] матрица H называется *фундаментальной для A*, в [3, стр. 62] – *трансформирующей для A*.

Очевидно, что для диагональных матриц D и $\tilde{D}$ ($\det \tilde{D} \neq 0$) справедливо равенство $\tilde{D} D \tilde{D}^{-1} = D$. Если матрица $\tilde{D}$ является матрицей перестановок, то есть каждые её строка и столбец содержат по одному ненулевому элементу $d = 1$, или мономиальной ($d \neq 0$), то матрица $\tilde{D} D \tilde{D}^{-1}$ отличается от матрицы D лишь порядком диагональных элементов. Поэтому приведённая матрица для матрицы A находится с точностью до порядка её диагональных элементов, а диагонализующая матрица для неё определяется с точностью до умножения на матрицу перестановок и обратную для неё слева и справа соответственно. Базис R_n, в котором матрица диагонализуемого оператора имеет диагональную форму, назовём собственным для оператора A базисом. Пусть, например, у некоторого оператора A матрица $A(p,\ q) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$, тогда ортогональная матрица $H = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-1}{2b} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}$, $ab \neq 0$, будет диагонализующей для матрицы A. При $a^2 = 2$ и $b^2 = 0{,}25$ собственный базис для оператора A будет ортонормированным и $A = HAH^{-1} = \begin{pmatrix} \pm\delta & 0 \\ 0 & \mp\delta \end{pmatrix}$, где $\delta = 0{,}125\sqrt{2}\,(q + 8p)$.

Очевидно, что образ $\operatorname{Im} A$ диагонализуемого оператора A и его ядро $\ker A$ пересекаются по ноль-вектору (см. [2, стр. 117]), из чего следует, что образ $\operatorname{Im} A$ диагонализуемого оператора A в R_n является подмножеством прообраза $\operatorname{Im}^{-1}(A)$, а одномерные инвариантные подпространства этого оператора определяются собственными векторами e^q, $q = \overline{1,\ r}$, $r = \operatorname{rank} A$, входящими в собственный базис (точнее сказать, нетривиальной линейной комбинацией собственных векторов, соответствующих данному собственному значению оператора A [1, стр. 79]. Поэтому линейный оператор диагонализуем, если его собственные значения различны. Однако это условие не является необходимым. Тривиальный пример даёт тождественный оператор. Необходимое и достаточное условие диагонализуемости оператора A имеет несколько эквивалентных форм: 1) оператор A имеет n линейно независимых собственных векторов [1, стр. 80], 2) геометрическая кратность каждого собственного значения λ_i оператора A совпадает с его алгебраической кратностью [6, стр. 58], 3) жорданова матрица оператора A диагональна [1, стр. 144], 4) все элементарные делители матрицы оператора A линейны [1, стр. 144], 5) инвариантные множители матрицы этого оператора имеют лишь простые корни [2, стр. 238].

Вектор x называется присоединённым вектором первого порядка оператора A, соответствующим собственному значению λ, если вектор $y \stackrel{\Delta}{=} (A-\lambda E)x$ является собственным вектором оператора A. Введём для оператора A более общее, чем диагонализуемость, понятие (ср. [8, стр. 83], см. [2, стр. 213–214], [7, стр. 243–244]):

Определение 2.1. *Линейный оператор A назовём приводимым, если его ядро* $\ker A$ *и образ* $\operatorname{Im} A$ *пересекаются по ноль-вектору.*

Очевидно, что образ $\operatorname{Im} A$ приводимого оператора A и его ядро $\ker A$ в R_n взаимно дополнительны, а диагонализуемый оператор A является приводимым. Линейный оператор A приводим (см. [2, стр. 215]) тогда и только тогда, когда этот оператор не имеет присоединённых векторов первого порядка, соответствующих нулевому собственному значению. Также очевидно, что для оператора A понятия приводимости и диагонализуемости тождественны лишь тогда, когда $\operatorname{rank} A \le 1$.

Жорданову матрицу J_A оператора A можно представить (см.[1, стр. 143], [5, стр. 29]) суммой двух матриц: $J_A = J(E_A) + J(H_A)$, где $J(E_A)$ – прямая сумма соответствующих одноблочных скалярных λ_α-матриц (равенство $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ в общем случае не исключено), а матрица $J(H_A)$ – квазидиагональная матрица, у которой размеры каждого блока H_{λ_α} соответствуют размерам λ_α-подматрицы матрицы $J(E_A)$ и каждый блок содержит ненулевые элементы (единицы) лишь в первой наддиагонали. Поэтому жорданова клетка приводимого оператора, соответствующая его нулевому собственному значению λ_0, является нулевой подматрицей, а недиагонализуемый оператор A может быть неприводимым лишь тогда, когда число ноль является собственным значением этого оператора кратности $\sigma \ge 2$. Например, матрица $A(p, q) = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $pq \ne 0$, диагонализуема, так как $\lambda = 0$ является собственным значением матрицы $A(p, q)$ кратности $\sigma = 1$. Действительно, $\operatorname{Im} A = t(1,\ 0)^{-1}$, $\ker A = v(-p, q)^{-1}$ и $\operatorname{Im} A \cap \ker A = 0$. Менее очевиден следующий

Пример 2.1. Пусть матрица A оператора A в базисе (e) имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\lambda_{1,2} = 0$ $(\sigma_0 = 2)$, $\lambda_3 = 3$, $\operatorname{Im} A = t(1,\ 1,\ 1)^{-1}$, $\ker A = v(1,\ 0,-1)^{-1} + u(0,\ 1,-1)^{-1}$. Легко видеть, что $\operatorname{Im} A$ и $\ker A$ пересекаются по ноль-вектору, то есть оператор A приводим и, так как $\operatorname{rank} A = 1$, он и диагонализуем. Действительно, матрица A подобна диагональной: $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Отметим ещё, что преобразующая для матрицы A (диагонализующая) матрица $T = \begin{pmatrix} -a & -b & c \\ a-c & b-c & c \\ c & c & c \end{pmatrix}$ при всех значениях a, b, c удовлетворяет (см. [1, стр. 149] уравнению $AT - TJ_A = 0$.

Для приводимого оператора A мы получаем из (2.6) , как следствие, равенство

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{BA} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} + d(KK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})) - n\,.$$

Ядро $\ker \boldsymbol{BA}$ оператора $\boldsymbol{BA}$ равно линейной оболочке $\operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A}(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))$ и $\ker A$, а образ $\operatorname{Im} \boldsymbol{BA}$ определяется подпространством $\boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A})$. Поэтому из равенства (2.1) и определения приводимости оператора следует

Теорема 2.3. *Произведение* ***BA*** *операторов* ***A*** *и* ***B*** *приводимо тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\ker A,\ \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A}(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))) \cap \boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}) = 0. \tag{2.7}$$

Из равенства (2.7) следует, что условие неприводимости оператора $\boldsymbol{BA}$ имеет следующую форму:

$$\exists \boldsymbol{a} \neq 0 : \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}) \text{ и } \boldsymbol{a} \in \ker \boldsymbol{A} \text{ или } \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} \in \ker \boldsymbol{B}\,. \tag{2.7'}$$

Если оператор $\boldsymbol{B}$ приводим или, в частности, является невырожденным оператором, то в силу (2.7') оператор $\boldsymbol{BA}$ есть приводимый оператор тогда и только тогда, когда $\ker \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}) = 0$. Отметим еще, что приводимость оператора $\boldsymbol{BA}$ не зависит от приводимости оператора $\boldsymbol{A}$. Если же оператор $\boldsymbol{A}$ не вырожден $(\ker \boldsymbol{A} = 0)$, то $\ker \boldsymbol{BA} = \ker \boldsymbol{B}$ и, следовательно, приводимость оператора $\boldsymbol{BA}$ определяется приводимостью оператора $\boldsymbol{B}$.

Полагая в равенствах (2.1) или (2.6) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, получаем следующие оценки.

Утверждение 2.3. *Для произвольного оператора* $\boldsymbol{A}$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{AA} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} - d(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})) \le \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

то есть для приводимого оператора $\boldsymbol{A}$ $\operatorname{rank} \boldsymbol{AA} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, *если же оператор* $\boldsymbol{B}$ *неприводим, то ранг оператора* $\boldsymbol{BB}$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{BB} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - d(IK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})) < \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\,.$$

В справедливости первой части Утверждения 2.3 можно убедиться и непосредственно из представления $\boldsymbol{R}_n$ линейной оболочкой $\ker \boldsymbol{A}$ и $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}_n) = \boldsymbol{A}(\ker \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}_n))$.

Вторую часть Утверждения 3 иллюстрирует при $n = 2$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ оператор $\boldsymbol{B}$, у которого $\operatorname{Im} \boldsymbol{B} = \ker \boldsymbol{B} = x\,\boldsymbol{e}_1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Структура матрицы X, перестановочной с матрицей A, то есть решение матричного уравнения $AX = XA$, описана в [1, стр. 190–194]. Количество линейно независимых матриц, перестановочных с матрицей A, определяется (см. [1, стр. 193]) числом $N = n_1 + 3n_2 + \cdots + (2t-1)n_t$, где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ и n_s суть степени инвариантных многочленов $i_s(\lambda)$ матрицы A. Поэтому при $t = 1$ $N = n$. Очевидно, что число N равно количеству произвольных элементов матрицы X: $N \le n^2$, при этом точное равенство имеет место лишь в тривиальном случае (см. [12, стр. 19–20]), когда $A = \sigma E$ – скалярная матрица, в частности нулевая или единичная. Необходимое и достаточное условие коммутативности $AB = BA$ произведения AB матрицы A и заданной матрицы B в координатной форме $a_i^k b_k^j = b_i^k a_k^j$ (см. [1, стр. 191]) содержит n^2 линейных относительно a_i^k уравнений с определителем $\Delta = \left| \delta_i^p b_q^j - \delta_q^j b_i^p \right|$, тождественно равным нулю.

Необходимое условие (слабое) перестановочности матриц в произведении AB получается, как следствие, из Теоремы 2.1 в следующем виде:

$$AB = BA \Rightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} - d(KI(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})) = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - d(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})).$$

Так как $\ker \boldsymbol{AB} = \ker B + \operatorname{Im}^{-1} B\,(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))$, где $\operatorname{Im}^{-1} B\,(E)$ обозначает прообраз подпространства E оператора $\boldsymbol{B}$, и так же для оператора $\boldsymbol{BA}$ $\ker \boldsymbol{BA} = (\ker \boldsymbol{A}\,, \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{KI}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})))$, то в силу $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\ker \boldsymbol{AB} = \ker \boldsymbol{BA}) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\ker \boldsymbol{B}\,, \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{B}\,(KI(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))) = (\ker A\,, \operatorname{Im}^{-1} A\,(\boldsymbol{KI}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}))). \tag{3.1}$$

Пусть $R_k \triangleq \operatorname{Im} \boldsymbol{BA} = \operatorname{Im} \boldsymbol{AB} \triangleq \boldsymbol{AB}(R_n)$. Для оператора $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{B}(R_k) \subseteq R_k$, ибо $\boldsymbol{B}(R_k) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}(R_n)) = \boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B}(R_n)) \subseteq \boldsymbol{BA}(R_n) = R_k$. Аналогично $\boldsymbol{A}(R_k) \subseteq \boldsymbol{R}_k$. Так как $\boldsymbol{R}_k \subseteq \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$ и $R_k \subseteq \operatorname{Im} \boldsymbol{B}$, то $R_k \subseteq \operatorname{Im} \boldsymbol{A} \cap \operatorname{Im} \boldsymbol{B}$. Очевидно, что для приводимых (в частности, диагонализуемых) операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ при $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ справедливо точное равенство:

$$\boldsymbol{R}_k = \operatorname{Im} \boldsymbol{A} \cap \operatorname{Im} \boldsymbol{B}. \tag{3.2}$$

Условие приводимости операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не является для (3.2) необходимым, как показывает следующий пример. Пусть в $\boldsymbol{R}_4$ действия неприводимых операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на векторах базиса определены соответственно условиями:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \to (0, e_1, e_3, e_4) \text{ и } (e_1, e_2, e_3, e_4) \to (0, 0, e_4, 0)\,.$$

Тогда $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} = (e_1, e_3, e_4)$, $\operatorname{Im} \boldsymbol{B} = (e_4) = \operatorname{Im} \boldsymbol{BA} = (e_4)$ и $R_k = \operatorname{Im} \boldsymbol{A} \cap \operatorname{Im} \boldsymbol{B} = (e_4)$.

Так как $\operatorname{Im} \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A} \cap \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{B})$ и $\operatorname{Im} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\operatorname{Im} \boldsymbol{B} \cap \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A})$, то для перестановочности операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в произведении $\boldsymbol{AB}$ необходимое условие имеет ещё и такую геометрическую форму:

$$R_k = \operatorname{Im} \boldsymbol{BA} = \operatorname{Im} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A} \cap \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\operatorname{Im} \boldsymbol{B} \cap \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A}). \tag{3.3}$$

Из условий (3.1) и (3.3) получаем, как следствие, следующее

Утверждение 3.1. *Произведение* $\boldsymbol{AB}$ *перестановочных операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *является оператором, приводимым тогда и только тогда, когда выполняется любое из двух эквивалентных условий*:

$$\boldsymbol{B}(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}) \cap (\ker \boldsymbol{B}, \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{KI}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}))) = 0,$$

$$\boldsymbol{A}(\operatorname{Im} \boldsymbol{B}) \cap (\ker \boldsymbol{A}, \operatorname{Im}^{-1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{KI}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}))) = 0.$$

Используя правило умножения квазидиагональных матриц (см. [1, стр. 53]) и перестановочность в произведении AB скалярной матрицы B (см. [12, стр. 19–20]), легко доказать два следующих утверждения.

Утверждение 3.2. *Операторы* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{A}$ *перестановочны, если в некотором базисе в* $\boldsymbol{R}_n$ *матрицы этих операторов являются квазидиагональными одной структуры и в каждой паре соответственных блоков по крайней мере один из блоков является скалярной матрицей.*

Утверждение 3.3. *Если в некотором базисе в* R_n *матрица оператора* $\boldsymbol{B}$ *является квазидиагональной и каждая р-клетка этой матрицы является* σ_p*-скалярной матрицей* ($\sigma_p \neq \sigma_q$), *то матрица перестановочного с оператором* $\boldsymbol{B}$ *оператора* $\boldsymbol{A}$ *является в том же базисе квазидиагональной той же структуры.*

В [1, стр. 193] доказано более общее утверждение – Теорема 3:

Если две матрицы A *и* B *перестановочны и одна из них, например* A, *имеет квазидиагональный вид*: $A=\{A_1, A_2\}$, *где матрицы* A_1 *и* A_2 *не имеют общих характеристических чисел, то и матрица* B *имеет такой же квазидиагональный вид.*

Следствие Утверждения 3.3. *Если у оператора* B *все его собственные значения различны, то перестановочный с ним оператор* A *также является оператором простой структуры и их соответственные собственные векторы совпадают* (см. [1, стр. 194]).

Диагонализуемая матрица B разлагается (см. [12, стр. 47, Теорема 4]), в прямую сумму скалярных матриц: $B = \lambda_1 E_{\sigma_1} \oplus \lambda_2 E_{\sigma_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_\alpha E_{\sigma_\alpha}$, где σ_γ – кратность соответствующего собственного значения λ_γ матрицы B и $\Sigma \sigma_\gamma = n$. Перестановочная с диагонализуемой матрицей B матрица A имеет в силу Утверждения 3.3 соответствующий квазидиагональный вид:

$$A \triangleq (a_p^q) = (a_{p_1}^{q_1}) \oplus (a_{p_2}^{q_2}) \oplus \ldots \oplus (a_{p_\alpha}^{q_\alpha}). \tag{3.4}$$

Число $N(A)$ произвольных элементов a_p^q матрицы A в (3.4) определяется, таким образом, равенством $N(A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_\alpha^2$ (см. [7, стр. 231]), где σ_γ означает, как и выше, кратность собственного значения λ_γ матрицы B.

Для матрицы-суммы A_1+A_2 очевидно в силу дистрибутивности умножения матриц относительно их сложения следующее

Утверждение 3.4. *Если матрица* B *перестановочна с двумя из трёх матриц*: A_1, A_2 *и* $A \triangleq A_1 + A_2$, *то она перестановочна и с третьей из этих матриц, в частности*

$$(A_1 B = B A_1, A_2 B = B A_2) \Rightarrow (AB = BA). \tag{3.5}$$

Пусть жорданова матрица J_A оператора $\boldsymbol{A}$ представлена (см. разд. 2) суммой двух матриц: $J_A = J(E_A) + J(H_A)$. Матрица B, перестановочная с каждой из матриц $J(E_A)$ и $J(H_A)$ квазидиагональной матрицы J_A, перестановочна в силу (3.5) и с самой матрицей J_A. Если матрица B является квазидиагональной матрицей такой же структуры, как и матрица J_A, тогда в силу Утверждения 3.2 она перестановочна с матрицей $J(E_A)$. Следовательно, справедливо (см.[1, стр. 188], ср. [5, стр. 23–29]) следующее

Утверждение 3.5. *Если матрица* B *является квазидиагональной матрицей той же структуры, что и матрица* J_A, *и перестановочна с матрицей* $J(H_A)$ *из разложения жордановой матрицы* J_A *матрицы* A: $J_A = J(E_A) + J(H_A)$, *тогда она перестановочна и с матрицей* J_A.

В частности, перестановочная с одноклеточной матрицей $J(H_A)$ матрица B является правильной верхней треугольной матрицей (см. [1, стр. 189]).

Матрица S симметрического оператора $\boldsymbol{S}$ симметрична в любом базисе, поэтому жорданова матрица J_S такого оператора диагональна (см. [10, стр. 246]), то есть симметрический оператор $\boldsymbol{S}$ является диагонализуемым.

Поэтому с учётом Утверждения 3.3 и равенства (3.4) является очевидным такой факт (ср. [9, стр. 16–17]):

Утверждение 3.6. *Симметрические операторы перестановочны тогда и только тогда, когда их произведение является симметрическим оператором.*

Справедливость этого утверждения можно получить непосредственно из равенств:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

В условиях Утверждения 3.6 матричное уравнение $X^n = AB$ имеет лишь дискретный произвол. Действительно, если $J_S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ – жорданова матрица матрицы $AB \triangleq S$, тогда (см. [1, стр. 199–202]) $J_X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, где $x_i = \sqrt[n]{s_i}$.

Для симметрической матрицы S справедливо (ср. [10, стр. 222]) следующее

Утверждение 3.7. *Класс диагонализующих матриц T матрицы S содержит n-параметрическое множество треугольных матриц L, таких, что справедливо равенство*

$$LSL^T = J_S .$$

Доказательство Утверждения 3.7 можно получить из следующих импликаций:

$$LSL^T = A \to \left(LSL^T\right)^T = A^T \to LSL^T = A^T \to A = A^T$$

и сравнения количества $N_S = 0{,}5(n^2 - n)$ скалярных уравнений, получаемых из матричного равенства $A{=}D$, с количеством $N_L = 0{,}5(n^2 + n)$ элементов матрицы L.

4. Обобщением теоремы Кронекера – Капелли о совместности системы линейных неоднородных уравнений является

Теорема 4.1. *Матричное уравнение* (см. (1.3)) $A \cdot X = C$ $(C \neq 0)$ *имеет решение лишь при условии* $\operatorname{rank} C \leq \operatorname{rank} A$. *Если* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C$, *то для всех d, таких, что* $\operatorname{rank} C \leq d \leq n$, *существует решение X ранга d, если же* $\operatorname{rank} C < \operatorname{rank} A$, *то ранг каждого решения X удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{rank} C \leq \operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} C + \operatorname{def} A. \tag{4.1}$$

Когда матрица C является нулевой, то из неравенства (4.1) получим для каждого решения X однородного уравнения $A \cdot X = 0$, здесь $\langle 0 \rangle = \langle n, n \rangle$, соответствующую оценку ранга этого решения в виде неравенства $0 \leq \operatorname{rank} X \leq \operatorname{def} A$ или точного равенства $\operatorname{rank} X = d(KI(A,X)) = \operatorname{def} A$ для общего решения (это очевидное равенство следует и из неравенства (1.4)).

Действительно, условие (4.1) следует непосредственно из неравенства (2.7), равенства (2.1) и очевидного неравенства $d(KK(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})) \leq \operatorname{def} A$.

Как непосредственное следствие равенства (2.1) точная оценка ранга каждого решения X уравнения (1.3) получается в следующей форме:

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} C + d(KI(A,X)) .$$

Структура решения X матричного уравнения (2.3) и более общего уравнения (2.3') описана в [1, стр. 23, 27, 209–210]. Оценку ранга решения X уравнения (2.3') можно получить из неравенства Фробениуса (2.5) и равенства (2.1) в следующей форме (ср. неравенство (1.4)):

$$\operatorname{rank} B - s_B \leq \operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} A + s_A , \tag{4.2}$$

где

$$s_B \triangleq d(KI(X,B)),\ s_A \triangleq d(KI(A,X)) \ \text{ и } \ \operatorname{rank} B - \operatorname{rank} C \triangleq s \leq s_B + s_A . \tag{4.3}$$

Действительно, из (4.1) для уравнения $AXB = C$ следует неравенство $\operatorname{rank} B - \operatorname{rank} C \leq$ $\leq d(KI(A,X)) + d(KI(X,B))$. Так как $\operatorname{def} X + \operatorname{rank} B \leq n + s_B$ и $\operatorname{def} A + \operatorname{rank} X \leq n + s_A$, то $\operatorname{rank} B - s_B \leq$ $\leq \operatorname{rank} X$ и $\operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} A + s_A$. Из этих неравенств и получаем доказываемое неравенство (4.2).

При $s = 0$, то есть когда $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C$, из (4.2) и (4.3) получаем, в частности, такую очевидную оценку ранга решения X уравнения $AXB = C$: $\operatorname{rank} B \leq \operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} A$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 4-е изд., доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.
2. Гельфанд М. И. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 280 с.
3. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Научная книга, 1997. – 390 + XXVI с.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматгиз, 1994. – 320 с.
5. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов: Пер. с нем. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – Изд. 11-е. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 431 с.
7. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 269 с.
8. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 232 с.
9. Попов Ю. И., Столяров А. В. Специальные классы регулярных гиперполос: Учеб. пособие. – Калининград: Калининградск. ун-т, 1992. – 80 с.
10. Стренг Г. Линейная алгебра и её приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 454 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
12. Широков П. А. Тензорное исчисление: Алгебра тензоров. – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1961. – 447 с.