

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ВНУТРЕННИМ НАБОРОМ ЛОКАЛЬНЫХ РЕБЕР, ПРИМЕНЯЕМОЙ В ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

Яковлева Татьяна Владимировна¹,
yan-tan1987@mail.ru

Крысько Антон Вадимович^{1,2},
anton.krysko@gmail.com

Кружилин Вадим Сергеевич¹,
kruzhilin93@mail.ru

¹ Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,
Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77.

² Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки алгоритмических методов повышения надежности и точности работы гироскопических приборов, которые находят свое применение в нефтегазовой промышленности, так как прочность, точность и стойкость к высокой температуре датчиков чрезвычайно важна во время бурения для контроля пространственной ориентации скважин и скважинных объектов.

Цель работы заключается в построении математической модели вынужденных колебаний и контактного взаимодействия структуры, состоящей из двух пластин с внутренним набором ребер и зазорами между элементами, которая найдет свое применение в теории гироскопов. Для исследования подобных конструктивно-нелинейных задач применены методы качественной теории дифференциальных уравнений, вейвлет-анализ, три метода (Вольфа, Розенштейна, Канца) для анализа знака старшего показателя Ляпунова, численное моделирование с использованием программного пакета MATLAB. Решение проведено методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях по пространственной координате и методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности по времени.

Результаты. Изучено влияние количества ребер между пластинами на характер их колебаний и контактное взаимодействие при продольном нагружении на верхнюю пластину. В ходе проведенных исследований выявлены сценарии перехода системы из гармонического в хаотическое состояние. Рассмотрены две задачи: 1) внутренний набор ребер состоит из двух балок, 2) внутренний набор ребер состоит из трех балок. Выявлено, что при хаотическом режиме в обеих задачах наблюдается явление перемежаемости частот, то есть смена интервалов времени с разными частотами и разными характеристиками колебаний. Достоверность решения обеспечена применением различных методов определения старшего показателя Ляпунова, сравнением результатов, полученных методом Бубнова–Галеркина и методом конечных разностей.

Ключевые слова:

Распределенные механические структуры, контактное взаимодействие, малые зазоры, вейвлет-анализ, параметрические колебания, показатели Ляпунова.

Введение

В нефтегазовой промышленности в различных технологиях добычи нефти и газа в настоящее время все больше находят свое применение микромеханические акселерометры при стандартном статическом контроле скважин с целью оценить и картографировать существующую скважину сразу после бурения или по прошествии времени. Кроме того, они активно применяются в динамическом направленном бурении, когда требуется достичь больших подземных участков с локальной платформы (например, с океанской платформы) или подвести к стволу скважины большую часть резервуара (например, горизонтальное бурение через продуктивный горизонт). При измерении во время бурения, которое выполняется в жестких условиях окружающей среды и при котором требуется направлять бурильную головку в заданный район. Для этих измерений требуются прочные, высокоточные и стойкие к высокой температуре датчики. В качестве

конкретных примеров таких разработок можно привести системы динамической стабилизации подвижных объектов, инерциальные средства контроля пространственной ориентации скважин и скважинных объектов. Поэтому в последние десятилетия наиболее интенсивно и динамично развивающимся направлением была признана микросистемная техника [1–5], в состав которой входят миниатюрные датчики инерциальной и внешней информации, микродвигатели и преобразователи. Таким образом, чрезвычайно важен вопрос изучения новых эффектов, связанных с точностью и надежностью работы приборов, в частности микромеханических акселерометров [6–8]. Последние могут быть описаны с помощью математической модели двух пластин, между которыми имеется набор ребер жесткости в виде параллельных балок и малые зазоры между элементами [9–13]. Наличие малых зазоров между пластинами и балкой при динамическом воздействии различной природы вызывает ха-

отические колебания, которые могут привести к быстрому износу и разрушению элементов конструкции приборов. Анализ характера колебаний приведет к возможности управлять ими [14]. Тем самым важен вопрос влияния контактного взаимодействия слоев и количества подкрепляющих ребер на характер сложных колебаний системы и, как следствие, на точность показания датчиков. Целью данной работы является изучение условий, при которых возможно возникновение хаотических колебаний подобных систем. Актуальность работ связана с необходимостью решения целого ряда задач для нефтегазовой и железнодорожной отраслей, аэрокосмической, автомобильной промышленности, медицины, робототехники, гироскопических приборов и т. д.

1. Постановка задачи

В работе построена математическая модель вынужденных колебаний и контактного взаимодействия трехслойной структуры, состоящей из двух параллельных пластин с внутренним набором локальных ребер. Этот набор ребер представляет собой в общем случае n параллельных балок, расположенных на симметричном расстоянии от центра пластин. Уравнения для пластин и балок рассматриваются геометрически линейные, пластины подчиняются кинематической модели Кирхгофа–Лява, балки – Эйлера–Бернулли. Между балками и пластинами имеются малые зазоры h_k . Наличие зазора между элементами механической структуры обуславливает необходимость учитывать контактное взаимодействие между ними, то есть решать конструктивно нелинейную задачу по классификации П.А. Лукаша [15]. Контактное взаимодействие учитывается по модели Винклера, предложенной Б.Я. Кантором [16]. Материал балок и пластин упругий и изотропный.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla_\lambda^4 w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial t} + q_1(x, y, t) + \\ & + P_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \sum_{l=1}^n q_{kl} = 0, \\ & \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_l}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_l}{\partial t} + q_{k1l} - q_{k2l} = 0, \\ & \frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla_\lambda^4 w_2 + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial t} + \sum_{l=1}^n q_{k2l} = 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $l = \overline{1, n}$, l – номер балки,

$$\begin{aligned} q_{k1l} &= K(w_1 - w_l - h_k) \Psi_{1l}, \\ \Psi_{1l} &= \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_l)], \\ q_{k2l} &= K(w_l - w_2 - h_k) \Psi_{2l}, \\ \Psi_{2l} &= \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_l - h_k - w_2)]. \end{aligned}$$

Соотношения q_{k1l} , q_{k2l} представляют собой контактное давление между слоями. Если $w_1 > w_l + h_k$ есть контакт между верхней пластиной и балкой с

номером l , то $\Psi_{1l} = 1$, иначе $\Psi_{1l} = 0$. Если $w_1 > w_2 + h_k$ есть контакт между нижней пластиной и балкой, то $\Psi_{2l} = 1$, иначе $\Psi_{2l} = 0$. ∇_λ^4 – бигармонический оператор; w_1 , w_2 – функции прогибов пластины; w_l – функция прогибов балок; K – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта; h_k – зазор между слоями; t – время; ε – коэффициент затухания; μ – коэффициент Пуассона; $P_x(y, t) = p_0 \sin(\omega_p t)$ – продольная нагрузка, действующая на верхнюю пластину, приложенная вдоль подкрепляющих ребер.

Система уравнений (1) приведена к безразмерному виду следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a\bar{x}, \quad y = a\bar{y}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \\ \tau &= \frac{ab}{2h} \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}, \quad \lambda = \frac{a}{b} = 1, \quad h_k = 2h\bar{h}_k, \end{aligned}$$

где a , b – размеры пластин по x и y соответственно, a – длина балок, $2h$ – толщина пластин, g – ускорение силы тяжести, E – модуль упругости, γ – удельный вес материала. Для простоты записи черточки над безразмерными параметрами в системе уравнений (1) опущены.

2. Методы решения

К исходным уравнениям (1) присоединены граничные условия и начальные условия. К этим условиям следует добавить условия непроникновения одной системы в тело другой. Полученные системы конструктивно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях. Функции w_1 , w_2 , w_l ($l = \overline{1, n}$), являющиеся решениями, приближенно аппроксимируем выражением в виде произведения функций, зависящих от времени и координат:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{1kj}(t) \varphi_{1kj}(x, y), \\ w_2 &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{2kj}(t) \varphi_{2kj}(x, y), \\ w_l &= \sum_{k=1}^{N_l} A_{lk}(t) \varphi_{lk}(x), \quad \text{где } l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения задачи Коши применены методы Рунге–Кутты 4-го, 6-го, 8-го порядка точности по временной координате. Предпочтение отдаем методу Рунге–Кутты 4-го порядка точности в силу быстроты вычислений. Вопрос о подтверждении достоверности результатов рассмотрен в статье [17, 18].

Далее анализ получаемых результатов проводится с помощью методов нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений: для каждого элемента механической структуры строятся сигналы, фазовые портреты, спектры мощности Фурье, применяются различные вей-

влет-преобразования. Для анализа знака старшего показателя Ляпунова применяются три метода: Вольфа [19], Розенштейна [20], Канца [21].

3. Численный эксперимент

В работе в качестве примера рассмотрены две задачи:

- 1) трехслойная механическая структура, состоящая из двух параллельных пластин, между которыми присутствуют две параллельные балки;
- 2) трехслойная механическая структура, состоящая из двух параллельных пластин, между которыми присутствуют три параллельные балки.

В обеих задачах изучается хаотическая динамика этих структур и их контактное взаимодействие при наличии зазоров между элементами $h_i=0,1$. Исследования проводятся при выборе в качестве граничных условий пластины, шарнирно опирающиеся по контуру, и балки, шарнирно опертые на концах:

$$\begin{aligned} w_{1,2} &= 0; \quad w_{1,2}''|_x = 0; \quad \text{при } x = 0; 1; \\ w_{1,2} &= 0; \quad w_{1,2}''|_y = 0; \quad \text{при } y = 0; 1; \\ w_l &= 0; \quad w_l''|_x = 0; \quad \text{при } x = 0; 1, \quad l = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Присоединены начальные нулевые условия:

$$w_i|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}_i|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Для граничных условий (3) аппроксимирующие функции примут вид

$$\begin{aligned} \varphi_{kj}^{1,2}(x, y) &= \sin(k\pi x) \sin(j\pi y), \\ \varphi_k^l(x) &= \sin(k\pi x), \quad l = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Изучим характер поведения такой многослойной системы под действием внешней продольной нагрузки $P_x(y, t) = p_0 \sin(\omega_p t)$, приложенной на верх-

нюю пластину, при этом будем учитывать контактное взаимодействие слоев. Частота внешнего воздействия $\omega_p=5$ выбрана близкой к частоте собственных колебаний пластины, $\varepsilon=1$, $\mu=0,3$. Зададим значение прогиба верхней пластины в начальный момент времени: $w_1=0,001$.

3.1. Параметрические колебания многослойной системы, состоящей из двух пластин, между которыми имеются две балки

Исследуем характер сложных колебаний многослойного пакета, состоящего из двух параллельных пластин, между которыми находятся две параллельные балки, расположенные на симметричном расстоянии от центра пластин ($y=0,35$ и $y=0,65$) (рис. 1).

Приложим продольную нагрузку с амплитудой $p_0=0,1$, в этом случае верхняя пластина совершает гармонические колебания на частоте $\omega_p=5$ и не касается подкрепляющих балок. Балки и нижняя пластина находятся в состоянии покоя.

При интенсивности продольной нагрузки, начиная с $p_0=0,10145$, верхняя пластина и обе балки вступают в контактное взаимодействие. При такой нагрузке происходит первое касание, обе балки совершают непродолжительные по времени затухающие колебания на собственной частоте $\omega_0=2,8$. Характер колебаний верхней пластины по-прежнему гармонический. Нижняя пластина находится в состоянии покоя.

Увеличим продольную нагрузку до $p_0=0,21$. В этом случае происходит контактное взаимодействие верхней пластины с обеими балками. Нижняя пластина находится в состоянии покоя. Характер колебаний верхней пластины и балок хаотический на доминирующей частоте внешнего возбуждения

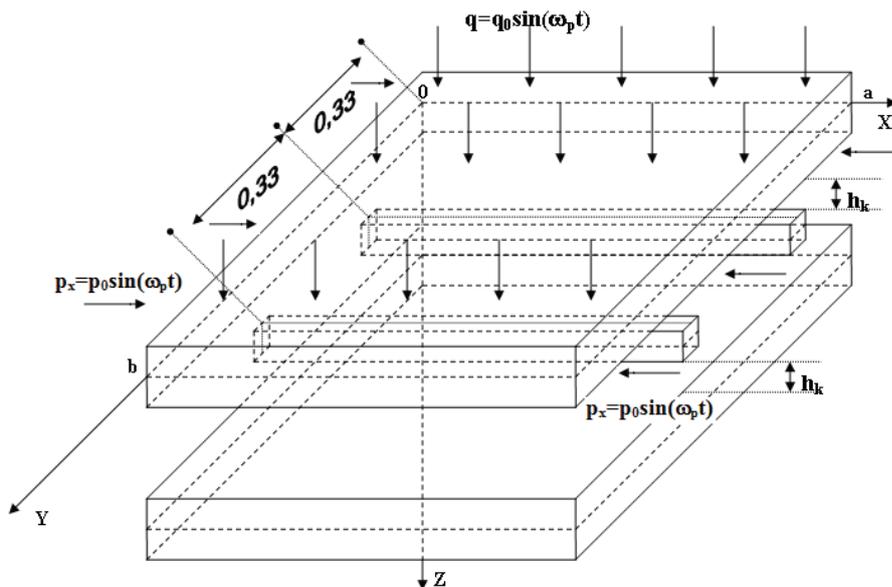


Рис. 1. Расчетная схема многослойной системы, состоящей из двух пластин, между которыми находятся две балки

Fig. 1. Design scheme of a multilayer system consisting of two plates with two beams between them

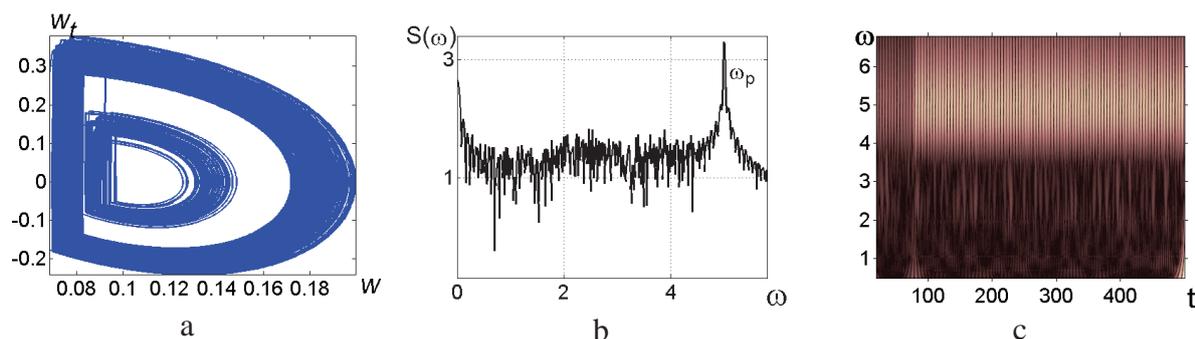


Рис. 2. Фазовый портрет (а), спектр мощности Фурье (b), 2D вейвлет-спектр (с) первой балки ($y=0,35$) при амплитуде нагрузки $p_0=0,21$

Fig. 2. Phase portrait (a), FFT spectrum (b), 2D wavelet-spectrum (c) of the first beam ($y=0,35$) for $p_0=0,21$

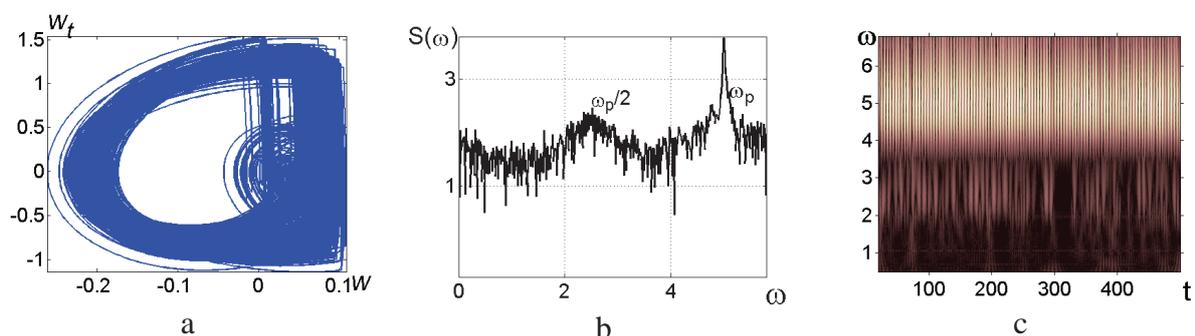


Рис. 3. Фазовый портрет (а), спектр мощности Фурье (b), 2D вейвлет-спектр (с) верхней пластины при амплитуде нагрузки $p_0=0,38$

Fig. 3. Phase portrait (a), FFT spectrum (b), 2D wavelet-spectrum (c) of the upper plate for $p_0=0,38$

$\omega_p=5$. Спектры мощности Фурье представляют собой сплошной пьедестал (рис. 2, а), фазовые портреты – странные аттракторы (рис. 2, б). Однако на графиках 2D вейвлет-спектров Морле наблюдаются зоны перемежаемости частот (рис. 2, с).

В ходе исследований были посчитаны старшие показатели Ляпунова для каждого элемента структуры. С целью избежать численной погрешности анализ был проведен по трем методам: Вольфа, Розенштейна, Канца. В случае воздействия нагрузки интенсивности $p_0=0,21$ старший показатель для первой балки ($y=0,35$) по методу Вольфа равен 0,01844, по методу Розенштейна – 0,06297, по методу Канца – 0,01844. Для верхней пластины старший показатель Ляпунова по трем методам соответственно равен 0,01047, 0,02376, 0,01786. Положительный знак старшего показателя Ляпунова характеризует хаотическое состояние системы.

При увеличении интенсивности нагрузки до $p_0=0,38$ в контактное взаимодействие вступают все элементы трехслойной структуры. Характер колебаний элементов хаотический, но при этом происходит бифуркация Хопфа: $\omega_p/2=2,5$ и $\omega_p=5$ (рис. 3, б). 2D вейвлет-спектры Морле свидетельствуют о наличии перемежаемости частот (рис. 3, с). Таким образом, хаос происходит на бифуркации Хопфа.

3.2. Параметрические колебания многослойной системы, состоящей из двух пластин, между которыми имеются три балки

Исследуем характер сложных колебаний многослойного пакета, состоящего из двух параллельных пластин, между которыми находятся три параллельные балки, расположенные на симметричном расстоянии от центра пластин ($y=0,25$, $y=0,5$ и $y=0,75$) (рис. 4).

При действии продольной нагрузки амплитудой $p_0=0,1$ верхняя пластина совершает гармонические колебания на частоте $\omega_p=5$ и не касается подкрепляющих балок. Балки и нижняя пластина находятся в состоянии покоя.

При интенсивности продольной нагрузки $p_0=0,10141$ происходит первое касание верхней пластины и трех балок, последние совершают непродолжительные по времени затухающие колебания на частоте собственных колебаний $\omega_0=2,8$. Характер колебаний верхней пластины гармонический. Нижняя пластина находится в состоянии покоя.

Увеличим продольную нагрузку до $p_0=0,13$. В этом случае происходит контактное взаимодействие верхней пластины с балками. Нижняя пластина находится в состоянии покоя. Верхняя пластина и балки совершают хаотические колебания с

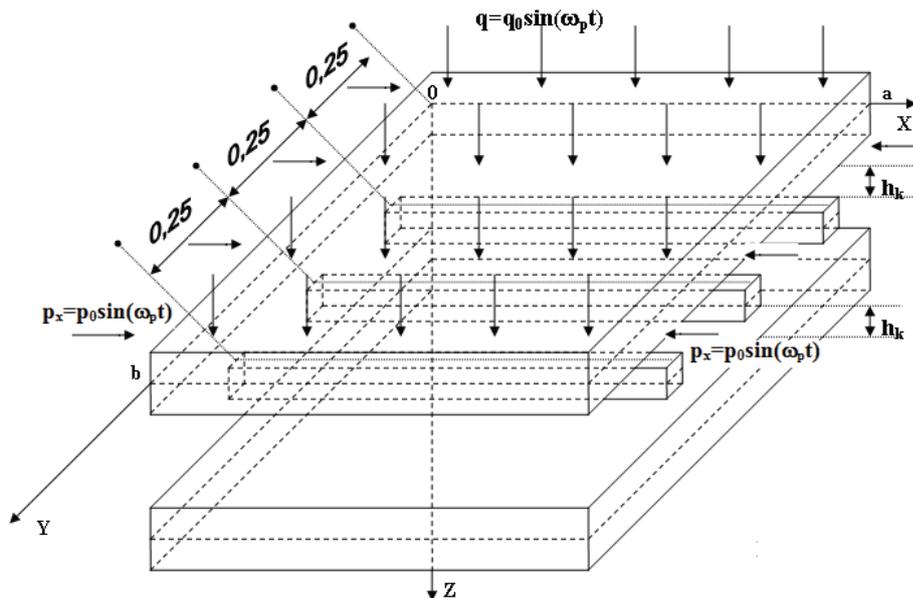


Рис. 4. Расчетная схема многослойной системы, состоящей из двух пластин, между которыми находятся три балки

Fig. 4. Design scheme of a multilayer system consisting of two plates with three beams between them

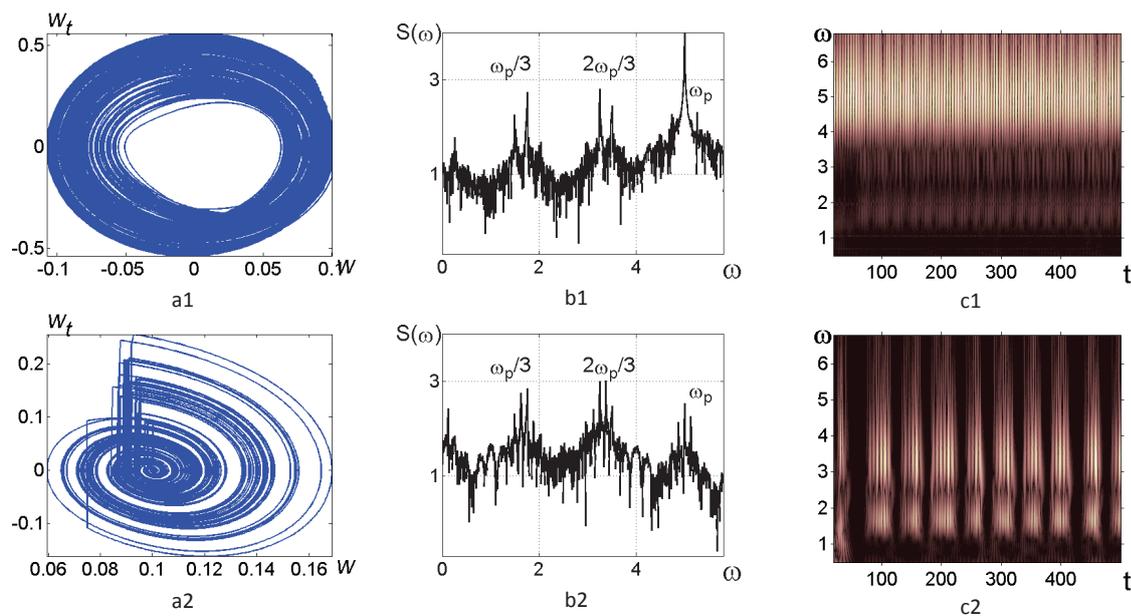


Рис. 5. Фазовый портрет (a1, a2), спектр мощности Фурье (b1, b2), 2D вейвлет-спектр (c1, c2) верхней пластины и первой балки ($y=0,25$) соответственно при амплитуде нагрузки $p_0=0,13$

Fig. 5. Phase portrait (a1, a2), FFT spectrum (b1, b2), 2D wavelet-spectrum (c1, c2) of the upper plate and the first beam ($y=0,25$) for $p_0=0,13$

утроением периода: $\omega_p/3=1,66$, $2\omega_p/3=3,33$ и $\omega_p=5$ (рис. 5, b1, b2). Колебания крайних балок ($y=0,25$ и $y=0,75$) – синхронные. На графиках 2D вейвлет-спектров Морле наблюдаются зоны включения/выключения частот (рис. 5, c1, c2). Фазовые портреты элементов системы представляют собой странные аттракторы (рис. 5, a1, a2). Старший показатель для верхней пластины по методу Вольфа равен 0,00090, по методу Розенштейна – 0,06404, по методу Канца – 0,02046. Для первой балки старший показатель Ляпунова по трем мето-

дам соответственно равен 0,01095, 0,05240, 0,00546. Таким образом, все характеристики указывают на хаотическое состояние системы.

При амплитуде продольной нагрузки $p_0=0,17$ в контактное взаимодействие вступают все элементы системы. Характер колебаний верхней и нижней пластин и первой балки ($y=0,25$) – хаотический. Для пластин доминирующей частотой является $\omega_p=5$, на 2D вейвлет-спектре для первой балки наблюдается весь спектр частот. Вторая ($y=0,5$) и третья ($y=0,75$) балки совершают непродолжи-

тельные по времени затухающие колебания на частоте $\omega_0=2,8$.

При дальнейшем увеличении интенсивности продольной нагрузки колебания всех элементов носят хаотический характер. Спектры мощности представляют собой сплошной пьедестал на доминирующей частоте $\omega_p=5$.

Заключение

Построена математическая модель вынужденных колебаний и контактного взаимодействия структуры, состоящей из двух пластин с внутренним набором ребер в виде n параллельных балок и зазорами между элементами. В ходе исследований удалось установить, что количество подкрепляющих балок между пластинами существенно влияет на контактное взаимодействие и сценарий перехода от гармонических колебаний к хаотическим. При контактном взаимодействии системы из двух пластин и двух балок (при их первом касании) сразу же происходят хаотические колебания на доминирующей частоте $\omega_p=5$, а при дальнейшем увели-

чении нагрузки появляется бифуркация Хопфа. При контактном взаимодействии системы из двух пластин и трех балок сразу же происходят хаотические колебания с утроением периода. А при увеличении амплитуды нагрузки хаотические колебания происходят на доминирующей частоте внешней нагрузки $\omega_p=5$. При хаотическом режиме в обеих задачах наблюдается явление перемежаемости частот. На отдельных интервалах времени хаос одного типа, а на других интервалах времени – другого типа, т. е. происходит смена интервалов времени с разными частотами и разными характеристиками колебаний. Результаты достоверны, так как получены с помощью различных методов определения показателя Ляпунова, и все остальные характеристики подтверждают наличие хаотического состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-5609.2016.8 (в части проведения численного моделирования), грантов РФФИ (№ 16-08-01108а в части разработки алгоритмов и методов решения) и РФФИ (№ 16-01-00721а в части постановки задачи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haghghi H.S., Markazi A.H. Chaos prediction and control in MEMS resonators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2010. – № 15 (10). – P. 3091–3099.
2. Aghababa M.P. Chaos in a fractional-order micro-electro-mechanical resonator and its suppression // Chinese Physics B. – 2012. – № 21 (10). – P. 9.
3. Li G., Aluru N.R. Linear, nonlinear and mixed-regime analysis of electrostatic MEMS // Sensor Actuator A: Physical. – 2001. – № 91. – P. 278–291.
4. Zhang W.M., Meng G. Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS // Sensor Actuator A: Physical. – 2005. – № 119. – P. 291–299.
5. Amorim T.D., Dantas W.G., Gusso A. Analysis of the chaotic regime of MEMS/NEMS fixed-fixed beam resonators using an improved 1DOF model // Nonlinear Dynamics. – January 2015. – V. 79. – Iss. 2. – P. 967–981.
6. Иерархические тепловые модели бесплатформенной инерциальной навигационной системы на волоконно-оптических гироскопах / В.Э. Джашитов, В.М. Панкратов, А.В. Голиков, С.Г. Николаев, А.П. Колеватов, А.Д. Плотников, К.В. Коффер // Гироскопия и навигация. – 2013. – № 1 (80). – С. 49–63.
7. Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Барулина М.А. Математические модели термоупругого напряженно-деформированного состояния и погрешности масштабного коэффициента волоконно-оптического гироскопического датчика // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 2. – С. 43–52.
8. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. – М.: Физматлит, 2009. – 228 с.
9. Антуфьев Б.А. Дивергенция пластины, дискретно подкрепленной системой ребер // Известия вузов. Авиационная техника. – 2012. – № 1. – С. 64–66.
10. Игудисман О.С., Абрамович Х. Потеря устойчивости и критическое поведение пологих подкрепленных цилиндрических панелей // Известия вузов. Авиационная техника. – 2012. – № 4. – С. 11–14.
11. Сложные колебания и контактное взаимодействие пластины, подкрепленной балкой с зазором между ними, в условиях экстремальных режимов нагружения / Т.В. Яковлева, Е.Ю. Крылова, В.Г. Баженов, В.А. Крысько // Известия вузов. Строительство. – 2016. – № 3. – С. 13–23.
12. Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko-Jr., T.V. Yakovleva, V.A. Krysko // Journal of Sound and Vibration. – 2016. – № 369. – P. 77–86.
13. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума / Т.В. Яковлева, В.Г. Баженов, В.А. Крысько, Е.Ю. Крылова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 259–272.
14. Павлов С.П., Жигалов М.В. Сходимость одной итерационной процедуры решения уравнений Кармана–Власова–Муштари из теории оболочек // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52. – № 9. – С. 1694–1699.
15. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
16. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 100 с.
17. Wavelet-Analysis-Based Chaotic Synchronization of Vibrations of Multilayer Mechanical Structures / V.A. Krysko, T.V. Yakovleva, V.V. Dobriyan, I.V. Papkova // International Applied Mechanics. – November, 2014. – V. 50. – № 6. – P. 706–720.
18. Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Singapore: World Scientific, 2016. – 562 p.
19. Determining Lyapunov exponents from a time series / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1985. – № D16. – P. 285–317.
20. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – № D65. – P. 117–134.
21. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series // Physics Letters. – 1994. – № A185. – P. 77–87.

Поступила 28.09.2016 г.

Информация об авторах

Яковлева Т.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

Крысько А.В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина; программист научно-учебной лаборатории 3D-моделирования кафедры инженерной графики и промышленного дизайна Института кибернетики Национального исследовательского Томского политехнического университета.

Кружилин В.С., студент физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

UDC 539.3

CONSTRAINED OSCILLATIONS AND CONTACT INTERACTION OF THE STRUCTURE, CONSISTING OF TWO PARALLEL PLATES WITH INTERNAL SET OF LOCAL RIBS, USED IN THE THEORY OF GYROSCOPES

Tatyana V. Yakovleva¹,
yan-tan1987@mail.ru

Anton V. Krysko^{1,2},
anton.krysko@gmail.com

Vadim S. Kruzhilin¹,
kruzhilin93@mail.ru

¹ Yuri Gagarin Saratov State Technical University,
77, Politekhnikheskaya street, Saratov, 410054, Russia.

² National Research Tomsk Polytechnic University,
30, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia.

The relevance of the study is caused by the need to develop algorithmic methods for improving the reliability and accuracy of gyroscopic devices, which are used in oil and gas industry. Strength, accuracy and resistance to high temperature of the sensors are extremely important while drilling, to control spatial orientation of wells and downhole objects.

The aim of the work is to construct a mathematical model of the constrained oscillations and contact interaction of the structure consisting of two plates with the internal set of ribs and gaps between the elements, which will be used in the gyroscopes theory. To study such structural and nonlinear problems the authors have applied the methods of qualitative theory of differential equations, wavelet analysis, three methods (Wolf, Rosenstein, Kantz) for analyzing the sign of the highest Lyapunov exponent, numerical simulation using MATLAB software package. The solution was obtained by the Bubnov–Galerkin method in higher approximations in space coordinate and by the Runge–Kutta method of the 4th order of accuracy in time.

Results. The authors studied the effect of the number of ribs between the plates on character of their oscillations and contact interaction with longitudinal loading on the top plate, and identified the scenarios of transition of the system from harmonic into a chaotic state. The paper deals with two tasks: 1) the inner set of ribs consists of two beams, 2) the inner set of ribs consists of three beams. It was revealed that in chaotic regime in both tasks the frequency intermittency phenomenon is observed, that is changing time intervals with different frequencies and different oscillation modes. The reliability of the solution is provided by application of different methods for determining the highest Lyapunov exponent, by comparing the results obtained by the Bubnov–Galerkin method and the finite difference method.

Key words:

Distributed mechanical structures, contact interaction, small gaps, wavelet analysis, parametric oscillation, Lyapunov exponents.

The research was financially supported by the grant of the President of the Russian Federation MK-5609.2016.8 (numerical simulation), the grants of RFBR no. 16–08–01108a (development of algorithms and techniques of solution) and 16–01–00721a (statement of a problem).

REFERENCES

- Haghighi H.S., Markazi A.H. Chaos prediction and control in MEMS resonators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, no. 15 (10), pp. 3091–3099.
- Aghababa M.P. Chaos in a fractional-order micro-electro-mechanical resonator and its suppression. *Chinese Physics B*, 2012, no. 21 (10), p. 9.
- Li G., Aluru N.R. Linear, nonlinear and mixed-regime analysis of electrostatic MEMS. *Sensor Actuator A: Physical*, 2001, no. 91, pp. 278–291.
- Zhang W.M., Meng G. Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS. *Sensor Actuator A: Physical*, 2005, no. 119, pp. 291–299.
- Amorim T.D., Dantas W.G., Gusso A. Analysis of the chaotic regime of MEMS/NEMS fixed–fixed beam resonators using an improved 1DOF model. *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, no. 2, pp. 967–981.
- Dzhashitov E., Pankratov V.M., Golikov A.V., Nikolaev S.G., Kolevov A.P., Plotnikov A.D., Koffer K.V. Ierarkhicheskie teplovye modeli besplatformennoy inertsiyalnoy navigatsionnoy sistemy na volokonno-opticheskikh giroskopakh [Hierarchical thermal models of strapdown inertial navigation system on fogs]. *Gyroskopy i Navigatsiya*, 2013, no. 1, pp. 49–63.
- Dzhashitov V.E., Pankratov V.M., Barulina M.A. Matematicheskie modeli termouprugogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i pogreshnosti masshtabnogo koeffitsienta volokonno-opticheskogo giroskopicheskogo datchika [Mathematical models of thermoelastic deflected mode and scale factor error of fiber optic gyro sensor]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, no. 2, pp. 43–52.
- Merkurev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotelnogo giroskopov* [The dynamics of MEMS and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 228 p.
- Antufev B.A. Divergentsiya plastiny, diskretno podkrepenny sistemoy reber [Divergence of a plate discretely supported by the stringer system]. *Russian Aeronautics*, 2012, no. 1, pp. 64–66.
- Igudisman O.S., Abramovich Kh. Poterya ustoychivosti i zakriticheskoe povedenie pologikh podkrepennykh tsilindricheskikh paneley [Buckling and post-buckling behavior of shallow suppor-

- ted cylindrical panel]. *Russian Aeronautics*, 2012, no. 4, pp. 11–14.
11. Yakovleva T.V., Krylova E.Y., Bazhenov V.G., Krysko V.A. Complex modes and contact interaction of a platesupported with a beam with a gap in extreme loading modes. *News of higher educational institutions. Construction*, 2016, no. 3, pp. 13–23. In Rus.
 12. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, no. 369, pp. 77–86.
 13. Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova C.Y. Contact interaction of a plate, reinforced by ribs, with gaps under the influence of white noise. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 259–272. In Rus.
 14. Pavlov S.P., Zhigalov M.V. Skhodimost odnoy iteratsionnoy protsedury resheniya uravneniy Karmana–Vlasova–Mushtari iz teorii obolochek [The convergence of one iterative procedure for solving equations of Karman–Vlasov–Mushtari of the shells theory]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 9, pp. 1694–1699.
 15. Lukash P.A. *Osnovy nelineinoy stroitelnoy mekhaniki* [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1978. 204 p.
 16. Kantor B.Ya. *Kontaknyye zadachi nelineinoy teorii obolochek vrashcheniya* [Contact problems of nonlinear theory of revolution shells]. Kiev, Ukrainian Academy of Sciences. Institute of Mechanical Engineering Problems, 1990. 100 p.
 17. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Dobriyan V.V., Papkova I.V. Wavelet-Analysis-Based Chaotic Synchronization of Vibrations of Multilayer Mechanical Structures. *International Applied Mechanics*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 706–720.
 18. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems*. Singapore, World Scientific, 2016. 562 p.
 19. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, no. D16, pp. 285–317.
 20. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, no. D65, pp. 117–134.
 21. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters*, 1994, no. A185, pp. 77–87.

Received: 28 September 2016.

Information about the authors

Tatyana V. Yakovleva, Cand. Sc., associate professor, Yuri Gagarin Saratov State Technical University.

Anton V. Krysko, Dr. Sc., professor, Yuri Gagarin Saratov State Technical University; programmer, National Research Tomsk Polytechnic University.

Vadim S. Kruzhilin, student, Yuri Gagarin Saratov State Technical University.