УДК 533.9.08;519.677

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ СВЧ ВОЛНЫ ИМПУЛЬСНОГО РАДАРА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

А.А. Калашников

Томский политехнический университет
E-mail: Alex-in-black@rambler.ru

Представлено аналитическое решение задачи определения пространственно-временного распределения поля электрической напряженности излучения импульсного радара в плазме. Реализация решения проведена с учетом двумерных эффектов взаимодействия СВЧ волны и плазмы.

Ключевые слова:
Импульсная рефлектометрия, высокотемпературная плазма, динамическая модель, распространение микроволнового излучения в плазме.
Key words:
Microwave pulsed reflectometry, fusion plasma, dynamical model, probing microwave propagation in plasma.

Введение

Для диагностики высокотемпературной плазмы экспериментальных установок управляемого термоядерного синтеза типа токамак [1] используют метод импульсной рефлектометрии [2]. Метод основан на зондировании плазмы импульсным СВЧ-излучением. Диагностируемой характеристикой является пространственно-временное распределение электронной плотности плазменного слоя.

Для реализации диагностики с помощью импульсного рефлектометра [2] требуется решить задачу определения двумерного распределения поля электрической напряженности СВЧ волны внутри слоя плазмы в динамике [3]. Актуальность такой разработки обусловлена учетом эффектов, которыми пренебрегалось в существующих моделях [3]. Это позволит увеличить адекватность разработки.

Аналитическое решение задачи

В общем случае взаимодействие СВЧ волны и плазмы можно описать уравнениями Максвелла. Считая, что плазма описывается распределениями комплексной диэлектрической и магнитной проницаемостями, запишем уравнения в виде [4, 5]:

$$\nabla \breve{k} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla k_m \mu_0 \boldsymbol{H} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \boldsymbol{E} = -k_m \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \boldsymbol{H} = -\breve{k} \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\breve{k}$ – комплексное волновое число; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума; $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; k_m – относительная магнитная проницаемость; t – время.

Взяв rot от ур. (3), производную по времени от ур. (4) и исключив $\boldsymbol{H}$, получим волновое уравнение:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\breve{k} k_m}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

где c – скорость света в вакууме.

Пренебрегая пространственной дисперсией, получим:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\breve{k} k_m}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Направление распространения узкого поляризованного пучка зондирующего микроволнового излучения на установках типа токамак можно выбрать так, чтобы вектор напряженности электрического поля пренебрежимо мало отклонялся от результирующего вектора напряженности магнитного поля. Влияние магнитного поля на распространение волны можно не учитывать, волна распространяется в О-моде [6], k_m=1. С учетом этого выражение (5) в полярных координатах (r,φ,t) примет вид волнового уравнения Гельмгольца:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \varphi^2} - \frac{\breve{k}}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Преобразовав полученное уравнение, получим:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial r^2} + r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \varphi^2}\right) - \frac{\breve{k}}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Поскольку уравнения Максвелла являются однородными, то каждая компонента вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ также удовлетворяет уравнению (6). Тогда уравнение (6) удобно решить для r, φ и t составляющих вектора $\boldsymbol{E}$, осуществляя тем самым переход от векторных величин к скалярным.

Из технических характеристик радар-рефлектометра определяются граничные условия задачи для несущей частоты f и распределения электрической напряженности E зондирующей волны на границе плазмы:

$$E(r=a,\varphi\in[-\varphi_0:\varphi_0])=E_0^t(t)E_0^y(\varphi)=E_0^t(t)e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}, \quad (7)$$

где a – малый радиус границы плазмы; φ_0 – максимальный угол, ограничивающий освещаемую часть поверхности плазмы; $E_0^y(\varphi)=e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}$ – функция распределения интенсивности излучения на границе плазмы.

Функция $E_0^t(t)$ имеет вид:

$$E_0^t(t)=E_{\max}\exp\left(-2\left(\frac{t-T/2}{T}\right)^2\right)\sin(\omega t),$$

где $E_{\max}$ – модуль электрической напряженности в каждой точке фронта падающей волны; T – ширина волнового пакета по уровню $0{,}5E_{\max}$, T=2 нс; f – несущая частота излучения; ω – угловая частота, $\omega=2\pi f$.

Зондирующая СВЧ волна является плоской и изменяется по закону $\exp(i\omega t)$, поэтому электрическую напряженность E удобно представить в виде интеграла Фурье:

$$E(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}E(r,\varphi,\omega)d\omega, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2E(r,\varphi,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2)e^{i\omega t}E(r,\varphi,\omega)d\omega. \quad (9)$$

Граничные условия (7) для функций (8) преобразуются к виду:

$$E(r,\varphi,\omega)|_{r=a}=E_0(\varphi,\omega)=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}E_{\max}\exp\left(-2\left(\frac{t-T/2}{T}\right)^2\right)\sin(\omega t)e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}dt.$$

Согласно физическому смыслу задачи граничные условия задаются на интервале $[0,t_k]$, который характеризует длительность волнового пакета, составляющую порядка 3 нс. С учетом этого перепишем:

$$E_0(\varphi,\omega)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t_k}e^{-i\omega t}E_{\max}\exp\left(-2\left(\frac{t-T/2}{T}\right)^2\right)\times$$
$$\times\sin(\omega t)e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}dt. \quad (10)$$

Подставив (8) и (9) в (6), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{r^2}\left(\begin{array}{l}r^2\dfrac{\partial^2E(r,\varphi)}{\partial r^2}+\\ +r\dfrac{\partial E(r,\varphi)}{\partial r}+\dfrac{\partial^2E(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}\end{array}\right)-\\ -\dfrac{\breve{k}}{c^2}(-\omega^2)E(r,\varphi)\end{array}\right\}d\omega=0.$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно, то полученное равенство будет верным, если:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2E}{\partial r^2}+r\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{\partial^2E}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{\breve{k}}{c^2}(-\omega^2)E=0. \quad (11)$$

Согласно формализму диэлектрической постоянной имеем [4]:

$$\breve{k}=1-\frac{\omega_p^2(r,t)}{\omega^2}, \quad (12)$$

где функция $\omega_p^2(r,t)$ характеризует зависимость частоты плазменных колебаний от электронной плотности плазменного слоя:

$$\omega_p^2(r,t)=\frac{e^2n_e(r,t)}{m_e\varepsilon_0}, \quad (13)$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная среды; m_e, e – масса и заряд электрона, $n_e(r,t)$ – функция, позволяющая аппроксимировать типовые профили плотности электронов в плазме установок типа токамак с приемлемой степенью точности [7]:

$$n_e(r,t)=n_e(0,t)\left[1-\left(\frac{r}{a(t)}\right)^{\gamma(t)}\right]^{\beta(t)}, \quad (14)$$

где γ, β – функции определенные на множестве действительных чисел, a – малый радиус границы плазмы.

Во время распространения импульса зондирующей волны все протекающие в плазме процессы находятся в стационарном состоянии. Поэтому:

$$\begin{cases}\omega_p^2(r,t\in[0,\tau_{\max}])=\omega_p^2(r),\\ n_e(r,t\in[0,\tau_{\max}])=n_e(r),\end{cases} \quad (15)$$

где $\tau_{\max}$=10 нс – максимальное значение измеряемого времени пролета зондирующей волны в плазме.

Подставив (12) в (11) с учетом (15), имеем:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2E}{\partial r^2}+r\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{\partial^2E}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\omega^2-\omega_p^2(r)}{c^2}E=0.$$

Таким образом, задача свелась к решению полученного уравнения для граничных условий (10). Применив метод разделения переменных $E(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ и разделив это уравнение на $R(r)\Phi(\varphi)$, приходим к выражению:

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}+r^2\frac{\omega^2-\omega_p^2(r)}{c^2}=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Выражая $-\dfrac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda$, получим:

$$\Phi''-\lambda\Phi=0.$$

Ненулевые 2π периодические ($\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$) решения этого уравнения:

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ \ \lambda=-n^2, n\in N. \quad (16)$$

Тогда уравнение для составляющей $R(r)$ примет вид:

$$r^2R''+rR'+(r^2b(r)-n^2)R=0, \quad (17)$$

где $b(r)=\dfrac{\omega^2-\omega_p^2(r)}{c^2}$.

Для определения коэффициентов A_n и B_n в (16) функции (10) разложим в ряд Фурье:

$$E_0(\varphi,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi, \quad (18)$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_0(\varphi,\omega)\cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_0(\varphi,\omega)\sin n\varphi\, d\varphi. \qquad (19)$$

Так как уравнения (16) и (18) удовлетворяют всем значениям параметра φ, и разложение в ряд Фурье единственно, то приравняв коэффициенты при соответствующих слагаемых для граничного условия (10) $E(r,\varphi)|_{r=a}=E_0(\varphi,\omega)$, запишем систему:

$$\begin{cases} A_n R_n(a)=\alpha_n, \\ B_n R_n(a)=\beta_n. \end{cases}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{\alpha_n}{R_n(a)}, \\ B_n=\dfrac{\beta_n}{R_n(a)}. \end{cases}$$

Решение уравнения (11) примет вид:

$$E(r,\varphi,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\frac{R_n(r)}{R_n(a)}.$$

Таким образом, задача сводится к определению составляющей $R(r)$, т. е. к решению ур. (17). Для этого функцию $b(r)$ представим следующим образом:

$$b(r) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2(r)}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} + \chi\omega_p^2(r).$$

Тогда решение удобно искать в виде разложения $R(r)$ по параметру χ:

$$R_n = R_n^0(r) + \chi R_n^1(r). \qquad (20)$$

Подставив (20) в (17) и приравняв коэффициенты при одинаковых слагаемых, для функции $R_n^0(r)$ уравнение (17) записывается в виде:

$$r^2(R_n^0)'' + r(R_n^0)' + \left(\frac{r^2\omega^2}{c^2} - n^2\right)(R^0) = 0.$$

Полученное выражение является уравнением Бесселя, его решение следующее:

$$R_n^0(r) = J_n\left(\frac{r\omega}{c}\right),$$

где $|R_n^0(r)|<u$ и J_n – функция Бесселя первого рода по индексу n.

Функция $R_n^1(r)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Бесселя:

$$r^2(R_n^1)'' + r(R_n^1)' + \left(\frac{r^2\omega^2}{c^2} - n^2\right)(R_n^1) =$$

$$= -r^2\chi\omega_p^2(r)J_n\left(\frac{r\omega}{c}\right).$$

Решение этого уравнения имеет вид [8]:

$$R_n^1 = L_n J_n\left(\frac{r\omega}{c}\right) + C_n N_n\left(\frac{r\omega}{c}\right) + u\left(\frac{r\omega}{c}\right),$$

где N_n – функция Неймана по индексу n, L_n и C_n – постоянные коэффициенты.

$$u\left(\frac{r\omega}{c}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2c}J_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)\int_0^r x^{-1}N_n\left(\frac{x\omega}{c}\right)x^2\frac{1}{c^2}\omega_p^2(x)dx +$$

$$+\frac{\pi}{2c}N_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)\int_0^r x^{-1}J_n\left(\frac{x\omega}{c}\right)x^2\frac{1}{c^2}\omega_p^2(x)dx. \qquad (21)$$

Так как граничные условия (10) не зависят от r, то $R_n^1(a)=0$ следовательно, при $L_n=1$ имеем:

$$C_n = \frac{-u\left(\dfrac{a\omega}{c}\right) - J_n\left(\dfrac{a\omega}{c}\right)}{N_n\left(\dfrac{a\omega}{c}\right)}. \qquad (22)$$

Таким образом, искомая компонента $R(r)$ однозначно определена, и, обобщая решение, окончательный ответ можно записать в виде:

$$\begin{cases} E(r,\varphi,t) = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=1}^{M} e^{i\omega_j t}\sum_{n=0}^{S}\begin{pmatrix}\alpha_n \cos n\varphi + \\ +\beta_n \sin n\varphi\end{pmatrix}\dfrac{R_n(r)}{R_n(a)} \\ R_n(r) = \\ = J_n\left(\dfrac{r\omega}{c}\right) - \dfrac{1}{c^2}\begin{pmatrix} J_n\left(\dfrac{r\omega}{c}\right) + \\ +C_n N_n\left(\dfrac{r\omega}{c}\right) + u\left(\dfrac{r\omega}{c}\right)\end{pmatrix} \end{cases},$$

где M=15 – количество гармоник, которые описывают огибающую функцию отраженных от плазмы волновых пакетов; S – количество слагаемых ряда, описывающего функцию (для экспериментов достаточно ограничиться значением S=20). Входящие в систему параметры и функции определяются из выражений: (10), (13), (14), (19), (21), (22).

Особенности решения

Прямое и обратное преобразования Фурье, лежащие в основе решения, кроме гладкости и дифференцируемости, не налагают дополнительных требований на функцию (7). Поэтому допускается корректировка граничных условий с целью дальнейшего повышения точности.

Полученное в общем виде решение позволяет учесть не только частный случай профиля электронной плотности, но и всю ее эволюцию. Это достигается введением в ур. (14) зависимостей: $n_{e0}=n_e(0,t)$, $\gamma=\gamma(t)$, $\beta=\beta(t)$, $a=a(t)$ – для аппроксимации динамики изменения плотности электронов $n_e(r,t)$ во времени. Варьирование значений γ, β

можно проводить на всем множестве действительный чисел с учетом физического смысла – функция $n_e(r,t)$ должна быть нелинейной и способной описывать все возможные конфигурации профилей в пределах границ их изменения.

Автору известно только одно аналитическое решение [7], позволяющее провести расчет динамики распространения волны в плазме для стационарного распределения электронной плотности, которое является частным случаем разработанного решения. Это предположительно повысит точность моделирования взаимодействия СВЧ волны и плазмы.

Вопрос об адекватности решения остается открытым. Ответ будет получен после создания базы данных с времяпролетными характеристиками и ее сравнением с результатами экспериментов, а также после проведения тестовых моделирований с заданным профилем электронной плотности.

Выводы

1. Представлено аналитическое решение задачи определения пространственно-временного распределения поля электрической напряженности излучения импульсного радара в плазме.
2. В основе аналитической модели заложено решение уравнения Гельмгольца для СВЧ волны внутри плазмы в приближении, что конфигурация электронной плотности описывается классом гладких функций, а форма волнового пакета является плоской.
3. Решение задачи позволяет моделировать распространение СВЧ волны в плазменном слое с переменной электронной плотностью.

Автор статьи выражает благодарность д.ф.-м.н. Андрею Юрьевичу Трифонову за конструктивные предложения и помощь в реализации решения уравнения Гельмгольца, Александру Викторовичу Шарнину за прояснение физического смысла задачи и своевременные проверки решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wesson J., Tokamaks. – Oxford: Oxford University Press, 1987. – 320 p.
2. Baystrukov K.I., Sharnin A.V., et al. Control and data acquisition system of tokamak KTM // Plasma and Fusion Science. – 2008. – № 3. – P. 297–306.
3. Калашников А.А., Шарнин А.В. Модель распространения излучения импульсного радара в высокотемпературной плазме // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 120–124.
4. Хилд М. Микроволновая диагностика плазмы. – М.: Атомиздат, 1968. – 392 с.
5. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма – М.-Л.: Изд-во техн.-теор. лит-ры, 1948. – 539 с.
6. Shevchenko V., Walsh M.J. First Results from the START Multifrequency Pulse Radar Reflectometer // Rew. Sci. Instrum. – 1997. – № 4. – P. 2040–2045.
7. Bruskin L.G., Mase A. Analytical simulation of microwave reflectometry of a plasma cylinder // Rev. Sci. Instrum. – 2001. – № 72. – P. 4139–4144.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

Поступила 26.04.2010 г.