

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПЛАЗМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРУ ГОРЕНИЯ ДУГОВОГО РАЗРЯДА

В.П. Зимин

Томский политехнический университет

E-mail: zimmin@ido.tpu.ru

Получены и проанализированы решения краевых задач о распределении плотности плазмы и уравнения горения дугового разряда для четырех форм плазменных образований. Показано, что геометрия электродов влияет на температуру горения дуги в термоэмиссионных преобразователях энергии и на их эффективность. Обсуждается влияние геометрических факторов плазменных образований на температуру горения дуги в задаче конкуренции формообразования.

Ключевые слова:

Краевая задача, уравнение амбиполярной диффузии, уравнение горения дуги, температура горения дуги, плазма, собственная функция, собственное значение, термоэмиссионный преобразователь энергии.

Key words:

Boundary value problem, ambipolar diffusion equation, burn arc equation, burn arc temperature, plasma, eigenfunction, eigenvalue, thermionic converter.

Введение

Дуговой режим реализуется во многих газовых средах в разнообразных плазменных конфигурациях и используется в многочисленных технических устройствах [1]. В частности, низковольтный дуговой разряд в Cs используется в термоэмиссионном преобразователе энергии (ТЭП), который генерирует электрическую энергию непосредственно из тепловой. Для этого используются ТЭП как с плоскопараллельными, так и с цилиндрическими электродами [2]. При изучении процессов в плазме в первую очередь необходимо знать распределение плотности и температуры составляющих её частиц.

Задачу о распределении плотности плазмы в положительном столбе в радиальном направлении, перпендикулярном разряду, впервые поставил и решил В. Шоттки [3]. Он показал, что для нулевых граничных условий первого рода и учёте ионизации в зазоре решение представляется в виде функции Бесселя. Решение подобной задачи для одномерного случая в декартовой системе координат (плоскопараллельные электроды) выражается через тригонометрические функции. Температура электронов определяется из уравнения горения дуги для собственных значений задачи о распределении плотности плазмы в зазоре. В [4] данная задача решалась для моделирования параметров плазмы и расчета вольтамперных характеристик разряда в трубках с ионизованным газом. Для низковольтной дуги в Cs и плоскопараллельными электродами задача, аналогичная [4], решена в [2]. В [5, 6] получено общее выражение для условия горения дуги в Cs с произвольными граничными условиями и любого выделенного плазменного слоя в межэлектродном зазоре.

Для больших межэлектродных расстояний ТЭП при зажигании и гашении дуги в зазоре возникают плазменные неоднородности в виде светящейся пленки на электродах или светящейся сферы в за-

зоре. Эта сфера в иностранной литературе получила название *ball of fire* (огненный шар). Подобные явления возникают и в других газовых средах [1]. Появление пространственных неоднородностей объясняют различными причинами. Например, в [2] сферическую плазменную форму объясняют поверхностной энергией. В настоящей статье рассматривается другая причина: взаимовлияние формы плазменного образования (геометрического фактора) и температуры горения дуги. С этой целью ставятся и решаются задачи распределения плотности плазмы в зазоре для различных пространственных образований плазмы. Одновременно с этим анализируются условия горения дуги, которые позволяют получить соответствующую температуру.

Постановки краевых задач для определения плотности плазмы

При математическом описании стационарного распределения плотности плазмы в плазменном слое предполагаются следующие допущения. Плазма слабоионизована и состоит из атомов, электронов и однократно заряженных ионов. Внешние поля отсутствуют. Имеется существенная объемная ионизация, а рекомбинационные процессы в объеме пренебрежительно малы. В этом случае диффузионное уменьшение плотности плазмы компенсируется генерацией заряженных частиц в объеме. Такое стационарное состояние плазмы описывается уравнением амбиполярной диффузии

$$D_a \Delta n + \nu_{ion} n = 0, \quad (1)$$

где n — плотность плазмы; D_a — коэффициент амбиполярной диффузии; ν_{ion} — частота ионизации в объеме плазмы; Δ — оператор Лапласа. Предполагается, что коэффициенты ур. (1) не зависят от пространственных переменных и находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [1, 2, 4].

Для полной постановки задачи необходимо задать краевые условия – условия на границе плазменного электрода или на границе плазменного образования. Для токонесущей плазмы в общем случае, краевые условия представляют сложную функцию от плотности плазмы и её производных [2, 5, 6]

$$f(n, \nabla n)_{\Gamma} = 0,$$

где Γ – функция, описывающая границу плазменного образования в пространстве. В [7] показано, что без потери общности для моделирования поведения плотности плазмы можно задавать однородные краевые условия первого рода на экстраполированной границе

$$n_{\Gamma_e} = 0, \quad (2)$$

где Γ_e – функция, описывающая экстраполированную границу, на которой плотность плазмы равна нулю.

Рассмотрим несколько постановок краевых задач, в которые трансформируется задача (1, 2) при задании расположения электродов и формы области, заполненной плазмой.

Задача 1. Плазменное образование имеет вид параллелепипеда, размеры которого по осям x , y и z соответственно равны x_L , y_L и z_L . Плоские прямоугольные электроды ТЭП могут быть ориентированы по осям одним из трех способов. Для определенности положим, что электроды имеют размеры y_L , z_L и перпендикулярны оси x , т. е. межэлектродное расстояние равно x_L . Задача распределения плотности плазмы в этом случае, с учетом представления оператора Лапласа в (1) в декартовых координатах, имеет вид

$$D_a \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + v_{ion} n(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} n(x=0, y, z) &= 0, & n(x=x_L, y, z) &= 0, \\ n(x, y=0, z) &= 0, & n(x, y=y_L, z) &= 0, \\ n(x, y, z=0) &= 0, & n(x, y, z=z_L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Задача 2. Плазма находится между двумя дискообразными электродами, радиус которых R_C ; расстояние между ними z_L . Плазменное образование имеет форму цилиндра также радиуса R_C и высотой z_L . Предполагается, что по азимутальной переменной ϕ плазма однородна. Тогда, с учетом представления оператора Лапласа в (1) в цилиндрических координатах, задача распределения плотности плазмы имеет вид

$$D_a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + v_{ion} n(r, z) = 0, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} n(r=R_C, z) &= 0, \\ n(r, z=0) &= 0, & n(r, z=z_L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Заметим, что, исключая тривиальное решение – равенство плотности плазмы во всем объеме нулю и то, что плотность плазмы величина положительная, неявно в краевых условиях (6) присут-

ствует условие II рода: $\frac{\partial n}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$. Оно показывает,

что распределение плотности плазмы вдоль координаты r имеет экстремум (максимум) при $r=0$.

Задача 3. Плазма заключена между соосными цилиндрическими электродами. Радиус эмиттера равен r_E , коллектора r_C . Как и во второй задаче, высота цилиндров равна z_L ; плазма по азимуту однородна. Тогда, с учетом представления оператора Лапласа в (1) в цилиндрических координатах, задача распределения плотности плазмы между двумя цилиндрическими электродами имеет вид

$$D_a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + v_{ion} n(r, z) = 0, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} n(r=r_E, z) &= 0, & n(r=r_C, z) &= 0, \\ n(r, z=0) &= 0, & n(r, z=z_L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Задача 4. Плазменное образование принимает форму шара с радиусом R_S . В этой задаче на вид электродов ограничения не накладываются. Считается, что межэлектродное расстояние гораздо больше R_S , а по переменным ϕ и θ плазма однородна. Тогда, с учетом представления оператора Лапласа в (1) в сферических координатах, задача распределения плотности плазмы в шаровом образовании имеет вид

$$D_a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + v_{ion} n(r) = 0, \quad (9)$$

$$n(r=R_S) = 0. \quad (10)$$

В задачах 3 и 4, как и в задаче 2 неявно задается однородное условие II рода.

Решения краевых задач для плотности плазмы и их анализ

Все приведенные выше задачи являются линейными и однородными: правые части дифференциальных уравнений и краевые условия I рода равны нулю. Для их решения целесообразно использовать метод Фурье [8]. Представим основные выкладки решения первой задачи. Для остальных задач приведем только решение в окончательном виде.

Представим решение ур. (3) в виде

$$n(x, y, z) = n_A n_X(x) n_Y(y) n_Z(z), \quad (11)$$

где n_A – максимальное значение плотности плазмы в области определения. Подставляя (11) в (3), получим

$$\left(n_A n_Y(y) n_Z(z) \frac{\partial^2 n_X(x)}{\partial x^2} + n_A n_X(x) n_Z(z) \frac{\partial^2 n_Y(y)}{\partial y^2} + n_A n_X(x) n_Y(y) \frac{\partial^2 n_Z(z)}{\partial z^2} \right) + v_{ion} n_A n_X(x) n_Y(y) n_Z(z) = 0. \quad (12)$$

Разделив все слагаемые в правой части (12) на функцию $D_a n_A n_X(x) n_Y(y) n_Z(z) \neq 0$, окончательно получим

$$\frac{1}{n_x(x)} \frac{\partial^2 n_x(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{n_y(y)} \frac{\partial^2 n_y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{n_z(z)} \frac{\partial^2 n_z(z)}{\partial z^2} + \frac{v_{ion}}{D_a} = 0. \quad (13)$$

Проводя аналогичные действия с (4), краевые условия для ур. (13) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} n_x(x=0) &= 0, & n_x(x=x_L) &= 0, \\ n_y(y=0) &= 0, & n_y(y=y_L) &= 0, \\ n_z(z=0) &= 0, & n_z(z=z_L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Три первых члена в (14) зависят от разных переменных, но каждый член – только от одной: x, y, z , соответственно. В свою очередь четвертый член правой части ур. (13) – положительная константа. Поэтому ур. (13) имеет решение тогда, когда каждый из трех первых членов равен своей константе

$$\frac{1}{n_x(x)} \frac{\partial^2 n_x(x)}{\partial x^2} = -\lambda_x^2, \quad \frac{1}{n_y(y)} \frac{\partial^2 n_y(y)}{\partial y^2} = -\lambda_y^2, \quad \frac{1}{n_z(z)} \frac{\partial^2 n_z(z)}{\partial z^2} = -\lambda_z^2, \quad (15)$$

а для суммы этих констант выполняется равенство

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = \frac{v_{ion}}{D_a}. \quad (16)$$

Решая каждое из ур. (15), получим

$$\left. \begin{aligned} n_x(x) &= \sin(\lambda_x x), & n_y(y) &= \sin(\lambda_y y), \\ n_z(z) &= \sin(\lambda_z z). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Чтобы решения вида (17) удовлетворяли краевым условиям (14), необходимо выполнение равенств

$$\lambda_x = \frac{\pi}{x_L}, \quad \lambda_y = \frac{\pi}{y_L}, \quad \lambda_z = \frac{\pi}{z_L}. \quad (18)$$

Тогда решение краевой задачи (3), (4) окончательно запишем в виде

$$\begin{aligned} n(x, y, z) &= n_A n_x(x) n_y(y) n_z(z) = \\ &= n_A \sin\left(\frac{\pi}{x_L} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{y_L} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{z_L} z\right), \end{aligned} \quad (19)$$

а из (16) с учетом (18) получаем уравнение горения дуги для задачи 1

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{\pi}{x_L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{y_L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{z_L}\right)^2. \quad (20)$$

Величины $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ называют собственными значениями, а соответствующие им функции (17) – собственными функциями. Легко получить решение задачи 1 с меньшим числом переменных, например для x и y . В этом случае из решения (19) отбрасывается собственная функция $n_z(z) = \sin((\pi/z_L)z)$, а из ур. (20) – третий член в правой части.

Решение задачи 2, ур. (5), (6), имеет вид

$$n(r, z) = n_A n_R(r) n_z(z) = n_A J_0\left(\frac{\mu_1}{R_C} r\right) \sin\left(\frac{\pi}{z_L} z\right), \quad (21)$$

где $J_0(\cdot)$, μ_1 – функция Бесселя нулевого порядка и значение её первого корня. Уравнение горения дуги для плазмы, находящейся между двумя дискообразными электродами, имеет вид

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{\mu_1}{R_C}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{z_L}\right)^2. \quad (22)$$

Решение задачи 3, ур. (7), (8), записывается в виде

$$\begin{aligned} n(r, z) &= n_A n_r(r) n_z(z) = \\ &= n_A J_0\left(\frac{2\mu_1}{r_C - r_E} \left(r - \left(\frac{r_E + r_C}{2}\right)\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{z_L} z\right), \end{aligned} \quad (23)$$

а уравнение горения дуги для плазмы, находящейся между двумя цилиндрическими электродами, запишется как

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{2\mu_1}{r_C - r_E}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{z_L}\right)^2. \quad (24)$$

Наконец, решение задачи 4, ур. (9), (10), представляется в виде

$$n(r) = n_A n_S(r) = n_A \frac{\sin\left(\frac{\pi}{R_S} r\right)}{\frac{\pi}{R_S} r}, \quad (25)$$

и уравнение горения дуги для шаровой плазменной области принимает вид

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{\pi}{R_S}\right)^2. \quad (26)$$

В лабораторных исследованиях используются ТЭП как с плоскопараллельными, так и с цилиндрическими электродами [2, 9]. Для промышленных прототипов термоэмиссионных элементов в большинстве случаев применяют цилиндрические электроды. Но при моделировании характеристик прототипов используют в основном характеристики, полученные для ТЭП с плоскопараллельными электродами. Оценим изменение температуры горения дуги при переходе от плоскопараллельной геометрии электродов преобразователя к цилиндрической.

Термоэмиссионное преобразование энергии наиболее эффективно при межэлектродных расстояниях d порядка долей мм. Тогда при $y_L, z_L \gg d$ можно ограничиться одномерным рассмотрением плазменных процессов в межэлектродном зазоре. В этом случае для плоскопараллельных электродов условие горения дуги с учетом (20) запишется как

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{\pi}{x_L}\right)^2, \quad (26)$$

а для цилиндрических электродов с учетом (24) – в виде

$$\frac{v_{ion}}{D_a} = \left(\frac{2\mu_1}{r_C - r_E}\right)^2, \quad (27)$$

$\mu_1 = 2,405$.

Частота ступенчатой ионизации в Cs равна [9]

$$v_{ion} = n_a \bar{v}_e(T_e) \sigma_0(T_e), \quad (28)$$

где n_a – плотность атомов цезия в плазме; $\bar{v}_e(T_e)$ – тепловая скорость электронов с температурой горения дуги T_e ; $\sigma_0(T_e) = 1,44 \cdot 10^{-12} \cdot \exp(-eE_0/kT_e)$ – сечение ступенчатой ионизации; e – заряд электрона; k – постоянная Больцмана; $E_0 = 3,21$ эВ.

Температура горения дуги определяет затраты на ионообразование. Чем меньше температура, тем характеристики преобразователя больше приближаются к идеальным [8]. Из (28) следует, что $\bar{v}_e(T_e)$ и $v_{ion} \sim \exp(-eE_0/kT_e)$, но вторая зависимость более сильная и следует учитывать только её. Давление насыщенных паров цезия в преобразователях с различными типами электродов полагаем равным и учтем, что $d = x_L = r_C - r_E$. Делим ур. (27) на (26) с учетом (28) и, выполнив ряд преобразований, получим зависимость

$$\Delta T_{eR} = \frac{2 \ln(\mu_1/\pi) T_{eX}^2}{eE_0/k - 2 \ln(\mu_1/\pi) T_{eX}}, \quad (29)$$

где T_{eX} – температуры горения дуги для ТЭП с плоскопараллельными электродами; $\Delta T_{eR} = T_{eR} - T_{eX}$ – приращение температуры горения дуги для преобразователя с цилиндрическими электродами. Для характерных температур горения дуги в цезии $T_{eX} = 2000$ и 2500 К [9] приращение температуры ΔT_{eR} составляет 95 и 151 К соответственно, т. е. порядка 5...6 %.

Таким образом, принимая во внимание температуру горения дуги, при прочих равных условиях, ТЭП с плоскопараллельными электродами более эффективен, чем с цилиндрическими.

Проведем анализ задачи конкуренции формообразования: каким образом зависит температура горения дуги от геометрических факторов плазменного образования. Данная задача решается аналогичным образом, как и предыдущая. Для этого получим оценки температуры горения дуги для равнообъемных плазменных образований задач 1, 2, 4. Указанные в задачах плазменные образования возьмем в виде шара, цилиндра, у которого диаметр равен высоте, и куба. Объем каждого из этих образований равен $V = 4,189$ см³, а их геометрические размеры $R_S = 1$ см, $z_L = 2R_C = 1,747$ см, $x_L = y_L = z_L = 1,612$ см.

Если задавать температуру горения дуги для образования в виде шара, то, используя (20), (22) и (26), для образований в виде куба и цилиндра можно получить формулы, аналогичные (29). Положим для плазменного образования в виде шара температуру горения $T_{eS} = 2500$ К. Тогда приращение температуры горения дуги для плазменного тела в виде цилиндра равно 15 К. Приращение температуры горения дуги для плазменного тела в виде куба на 25 К, т. е. оба приращения порядка 1 %. Различия температур горения дуги для указанных форм плазменных тел мало для того, чтобы одна из форм получила при их физическом формировании преимущество перед другими. По-видимому, на конкурен-

цию форм влияют и другие геометрические факторы. Излучение плазменного тела существенно зависит от площади его поверхности. Так, для выбранных выше параметров, отношение поверхности плазменного тела к его объему для шара, цилиндра и куба равны 3,0; 3,4; 3,7. И для этого фактора наблюдается такая же упорядоченность, как и для температуры горения дуги. Эти два фактора уже выявляют преимущество шаровидного плазменного образования. Возможно, что существенную роль на форму образований оказывают форма электродов и величина межэлектродного расстояния.

Для задач идентификации и диагностики важную роль играют характерные особенности распределения параметров плазмы, в частности, плотности плазмы. Из анализа задач 1–4 и полученных решений (19), (21), (23), (25) можно заключить, что для рассмотренных форм плазменных образований имеются три характерные собственные функции: $n_X'(x) = \sin(\pi x/x_L)$, $n_R'(r) = J_0(\mu_1 r/R_C)$ и $n_S'(r) = \sin(\pi r/R_S)/(\pi r/R_S)$, нормированные на n_A . На рис. 1 изображены данные функции (1 – $n_X'(x)$, 2 – $n_R'(r)$, 3 – $n_S'(r)$) для параметров, $x_L = 1$ см, $R_C = R_S = 0,5$ см. Для удобства сравнения функций зависимость $n_X'(x)$ сдвигалась влево на $x_L/2$, что не меняло её характерное поведение. На рис. 2 представлены первые производные этих функций.

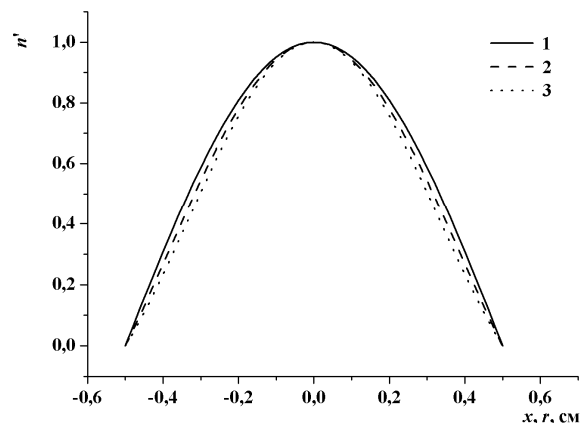


Рис. 1. Характерные собственные функции, описывающие плотность плазмы в дуговом разряде

Если поведение функций различается мало, то их дифференциальные характеристики имеют существенное различие в приграничных областях (рис. 2). При значениях $|n| > 0,35$, что соответствует области изменения плотности плазмы $n/n_A < 0,4$, имеется немонотонное поведение производных собственных функций $n_R'(r)$ и $n_S'(r)$.

Область значений $n/n_A < 0,4$ реализуется при малых и средних токах, проходящих через термоэмиссионный преобразователь [9]. Поэтому производные указанных функций могут быть использованы для диагностики параметров экспериментального распределения плотности плазмы, в том числе формы плазменного образования.

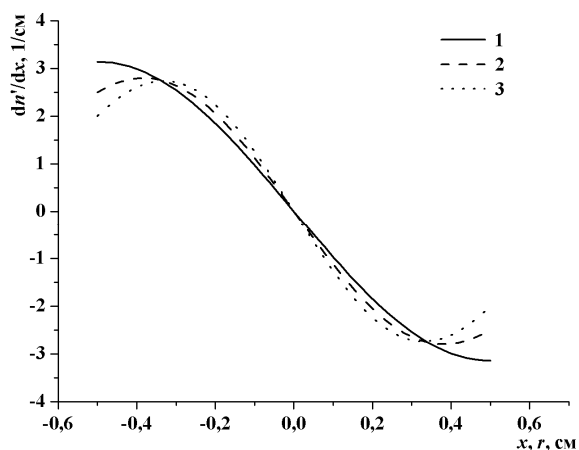


Рис. 2. Производные характерных собственных функций плотности плазмы в дуговом разряде

Выводы

1. Получены решения краевых задач о распределении плотности плазмы различных пространственных форм и уравнения горения дуги, позволяющие определить ее температуру. Решения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В.Л. Электрический ток в газах. Установившийся ток / под ред. Л.А. Сена и В.Е. Голанта. — М.: Наука, 1971. — 543 с.
2. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии / И.П. Стаханов, В.П. Пашенко, А.С. Степанов, Ю.К. Гуськов; под ред. И.П. Стаханова. — М.: Атомиздат, 1973. — 374 с.
3. Schottky W. Diffusionstheorie der positiven Saule // Physikalische Zeitschrift. — 1924. — Bd. 25. — S. 635–640.
4. Грановский В.Л. Электрический ток в газах. Т. 1. Общие вопросы электродинамики газов. — М.; Л.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1952. — 432 с.
5. Зимин В.П. Алгоритм расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионного преобразователя с постоянной температурой электронов / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». — Томск, 1984. — № 7. — 36 с. — Деп. в ВИНТИ 21.03.1984, № 1571–84.

ния представляют произведения собственных функций; уравнения горения дуги — композицию собственных значений.

Плотность плазмы формируют три характерные собственные функции. Две из них, связанные с цилиндрической и сферической системами координат, имеют области немонотонного поведения первых производных. Это можно использовать для идентификации и диагностики параметров плазмы.

2. Исследовано влияние формы электродов и плазменных образований на температуру горения дуги в Cs:

- Для термоэмиссионного преобразователя с цилиндрическими электродами по сравнению с плоскопараллельными температура горения дуги выше на 90...150 К.
- Отличие по температуре горения для плазменных образований различной формы не превышает 1 %. На конфигурацию плазменных образований существенно влияют геометрия и близость расположения электродов.

6. Зимин В.П. Исследование функций для управляющего параметра краевой задачи диффузии плотности плазмы // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 313. — № 4. — С. 86–92.
7. Лошкарев А.И. Аналитическая модель дугового режима и ее использование для оптимизации рабочих параметров ТЭП // Журнал технической физики. — 1972. — Т. 42. — Вып. 10. — С. 2127–2136.
8. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964. — 287 с.
9. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / Ф.Г. Бакшт, Г.А. Дюжев, А.М. Марциновский и др.; под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса. — М.: Наука, 1973. — 480 с.

Поступила 11.03.2010 г.