УДК 519.2:621.391

О СТРУКТУРЕ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ. УСЛОВНО-ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*

Томский государственный университет

*Томский политехнический университет. E-mail: svrhm@rambler.ru

Рассматривается условно-гауссовский случай для задачи нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью. Получены соотношения, определяющие эволюцию во времени шенноновских мер количества информации.

1. Введение

В [1] на основе анализа научных публикаций для систем калмановского типа была решена задача нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью для общего случая. В данной работе рассматривается частный случай, допускающий эффективное вычисление информационного количества. Система обозначений та же, что и в [1]. В дополнение $\mathbf{N}\{y;a,B\}$ обозначает гауссовскую плотность с параметрами a и B.

2. Основные результаты

Эффективное нахождение оценок фильтрации и интерполяции было осуществлено в [2–4] при условиях (см. (2.1–2.4) в [1])

$$f(\cdot)=f(t)+F(t)x_t,\quad p_0(x)=\mathrm{N}\{x;\mu_0;\Gamma_0\},$$
$$h(\cdot)=h(t,z)+H_{0,N}(t,z)\tilde{x}_{t,\tau}^{N+1},\tag{1}$$
$$g(\cdot)=g(t_m,z)+G_{0,N}(t_m,z)\tilde{x}_{t_m,\tau}^{N+1},$$

$$H_{0,N}(t,z)=[H_0(t,z)\mid H_1(t,z)\mid\cdots\mid H_N(t,z)]=[H_0(t,z)\mid H_{1,N}(t,z)],$$
$$G_{0,N}(t_m,z)=[G_0(t_m,z)\mid G_1(t_m,z)\mid\cdots\mid G_N(t_m,z)]=[G_0(t_m,z)\mid G_{1,N}(t_m,z)],\tag{2}$$

когда апостериорные плотности для процесса $\tilde{x}_{t,\tau}^{N+1}$ являются гауссовскими (см. (2.5), (2.7), (2.9) в [1]). Введем следующие обозначения

$$\mu(t)=M\{x_t|z_0^t,\eta_0^m\},\quad \mu(\tau_k,t)=M\{x_{\tau_k}|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\mu_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\begin{bmatrix}\mu(t)\\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu(t)\\ \mu(\tau_k,t)\end{bmatrix},\quad k=\overline{1;N},\tag{3}$$

$$\Gamma(t)=M\{[x_t-\mu(t)][x_t-\mu(t)]^T|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\Gamma_{kk}(\tau_k,t)=M\{[x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)][x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]^T|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\Gamma_{0k}(\tau_k,t)=M\{[x_t-\mu(t)][x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]^T|z_0^t,\eta_0^m\},\tag{4}$$
$$\Gamma_{lk}(\tau_l,\tau_k,t)=M\{[x_{\tau_l}-\mu(\tau_l,t)][x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]^T|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\begin{bmatrix}\Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\cdot) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\Gamma(t) & \Gamma_{01}(\tau_l,t) & \Gamma_{0k}(\tau_k,t)\\ \Gamma_{01}^T(\cdot) & \Gamma_{11}(\tau_l,t) & \Gamma_{lk}(\tau_l,\tau_k,t)\\ \Gamma_{0k}^T(\cdot) & \Gamma_{lk}^T(\cdot) & \Gamma_{kk}(\tau_k,t)\end{bmatrix},$$
$$l=\overline{1;N-1},\quad k=\overline{2;N},\quad k>l.$$

Утверждение. При условиях (1), (2)

$$p_t(x;\tilde{x}_N)=p_t(\tilde{x}_{N+1})=\mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+1};\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t),\ \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\},$$
$$p_t(x)=\mathbf{N}\{x;\mu(t),\ \Gamma(t)\},\tag{5}$$
$$p_\tau^t(\tilde{x}_N)=\mathbf{N}\{\tilde{x}_N;\tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t),\ \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)\}$$

и блочные составляющие параметров этого распределения на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_t\mu(t)=[f(t)+F(t)\mu(t)]dt+\tilde{H}_0^T(t,z)R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t,$$
$$d_t\mu(\tau_k,t)=\tilde{H}_k^T(t,z)R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t,\quad k=\overline{1;N},$$
$$d\Gamma(t)/dt=F(t)\Gamma(t)+\Gamma(t)F^T(t)+$$
$$+Q(t)-\tilde{H}_0^T(t,z)R^{-1}(t,z)\tilde{H}_0(t,z),$$
$$d\Gamma_{kk}(\tau_k,t)/dt=-\tilde{H}_k^T(t,z)R^{-1}(t,z)\tilde{H}_k(t,z),\quad k=\overline{1;N},$$
$$d\Gamma_{0k}(\tau_k,t)/dt=F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k,t)-$$
$$-\tilde{H}_0^T(t,z)R^{-1}(t,z)\tilde{H}_k(t,z),\quad k=\overline{1;N},$$
$$d\Gamma_{lk}(\tau_l,\tau_k,t)/dt=-\tilde{H}_l^T(t,z)R^{-1}(t,z)\tilde{H}_k(t,z),$$
$$l=\overline{1;N-1},\quad k=\overline{2;N},\quad l<k,$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m)=\mu(t_m-0)+\tilde G_0^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde\eta(t_m),$$
$$\mu(\tau_k,t_m)=\mu(\tau_k,t_m-0)+\tilde G_k^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde\eta(t_m),$$
$$\Gamma(t_m)=\Gamma(t_m-0)-\tilde G_0^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde G_0(t_m,z),$$
$$\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m-0)-\tilde G_k^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde G_k(t_m,z),$$
$$\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m-0)-\tilde G_0^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde G_k(t_m,z),$$
$$\Gamma_{lk}(\tau_l,\tau_k,t_m)=\Gamma_{lk}(\tau_l,\tau_k,t_m-0)-\tilde G_l^T(t_m,z)\,W^{-1}(t_m,z)\tilde G_k(t_m,z),$$

где

$$d\tilde z(t)=dz(t)-[h(t,z)+H_{0,N}(t,z)\,\tilde\mu_{N+1}(\tilde\tau_N,t)]dt,$$
$$\tilde\eta(t_m)=\eta(t_m)-[g(t_m,z)+G_{0N}(t_m,z)\tilde\mu_{N+1}(\tilde\tau_N,t_m-0)],\qquad(6)$$
$$\tilde H_0(t,z)=H_0(t,z)\Gamma(t)+H_{1,N}(t,z)\,\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t),$$
$$\tilde H_k(t,z)=H_k(t,z)\Gamma_{kk}(\tau_k,t)+\sum_{i\neq k}^{N}H_i(t,z)\,\Gamma_{ki}^T(\tau_k,\tau_i,t),$$
$$\tilde G_0(t_m,z)=G_0(t_m,z)\Gamma(t_m-0)+G_{1,N}(t_m,z)\,\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t_m-0),\qquad(7)$$
$$\tilde G_k(t_m,z)=G_k(t_m,z)\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m-0)+$$
$$+\sum_{i\neq k}^{N}G_i(t_m,z)\Gamma_{ki}^T(\tau_k,\tau_i,t_m-0),$$
$$W(t_m,z)=V(t_m,z)+G_{0,N}(t_m,z)\,\tilde\Gamma_{N+1}(\tilde\tau_N,t_m-0)G_{0,N}^T(t_m,z)$$

и $\varphi(\cdot,t_m{-}0)=\lim\varphi(\cdot,t)$ при $t\uparrow t_m$.

Так как фиксированная память является частным случаем скользящей памяти (см. Замечание 1 в [1]), то сформулированный результат следует как частный результат из Теорем 1 и 2 в [2].

Замечание. Поскольку процесс x_t при условиях (1) является гауссовским [5, 6], то для априорных плотностей (2.6), (2.8), (2.10) справедливы свойства гауссовости вида (5) с заменой буквы μ на букву a, а Γ на D. Параметры такой плотности находятся очевидным образом.

Теорема 1. Количество информации (2.17) из [1] может быть представлено в виде (2.15) из [1], где $I_t[\cdot]$ и $I_{\tau|t}^t[\cdot]$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]/dt=$$
$$=\frac12\operatorname{tr}[M\{R^{-1}(t,z)\tilde H_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde H_0^T(t,z)\}]-\qquad(8)$$
$$-\frac12\operatorname{tr}[Q(t)[M\{\Gamma^{-1}(t)\}-D^{-1}(t)]],$$

$$dI_{\tau|t}^t[\tilde x_\tau^N;z_0^t,\eta_0^m]/dt=$$
$$=\frac12\operatorname{tr}[M\{R^{-1}(t,z)H_{1,N}(t,z)\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t)H_{1,N}^T(t,z)\}]-$$
$$-\frac12\operatorname{tr}[Q(t)\begin{bmatrix}M\{\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde\tau_N)-\Gamma^{-1}(t)\}-\\-[D^{-1}(t\,|\,\tilde\tau_N)-D^{-1}(t)]]\end{bmatrix},\qquad(9)$$

где (см. (2), (4), (7) и Замечание)

$$\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t)=\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N,t)-\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t)\Gamma^{-1}(t)\tilde\Gamma_{0N}(\tilde\tau_N,t),\quad(10)$$
$$\Gamma(t\,|\,\tilde\tau_N)=\Gamma(t)-\tilde\Gamma_{0N}(\tilde\tau_N,t)\tilde\Gamma_N^{-1}(\tilde\tau_N,t)\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t),\quad(11)$$
$$D(t\,|\,\tilde\tau_N)=D(t)-\tilde D_{0N}(\tilde\tau_N,t)\tilde D_N^{-1}(\tilde\tau_N,t)\tilde D_{0N}^T(\tilde\tau_N,t),\quad(12)$$

с начальными условиями (3.6) и (3.7) из [1], где

$$\Delta I_{t_m}[\cdot]=(1/2)\,M\{\ln[|\Gamma(t_m-0)|/|\Gamma(t_m)|]\},\qquad(13)$$
$$\Delta I_{\tau|t_m}^{t_m}[\cdot]=(1/2)\,M\{\ln[|\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t_m-0)|/|\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t_m)|]\}\quad(14)$$

и $\Gamma(t_m-0)=\lim\Gamma(t)$, $\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t_m-0)=\lim\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t)$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. По свойству гауссовских плотностей [5, 6] для $p_{\tau|t}^t(\tilde x_N\,|\,x)$ (см. (2.11) в [1]) согласно (5) имеет место свойство

$$p_{\tau|t}^t(\tilde x_N\,|\,x)=\mathbf N\{\tilde x_N;\tilde\mu_N(\tilde\tau_N\,|\,t),\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t)\},\qquad(15)$$
$$\tilde\mu_N(\tilde\tau_N\,|\,t)=\tilde\mu_N(\tilde\tau_N,t)+\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t)\Gamma^{-1}(t)[x-\mu(t)],$$

а $\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N|t)$ определено в (10). Из $\overline{h(t,z)}=M\{h(t,x_t,\tilde x_\tau^N,z)|z_0^t,h_0^m\}$, (3.10) в [1], (1–3) следует, что

$$\overline{h(t,z)}=h(t,z)+H_{0,N}(t,z)\,\tilde\mu_{N+1}(\tilde\tau_N,t),$$
$$\overline{h(\tilde\tau_N,z\,|\,x)}=h(t,z)+H_0(t,z)x+H_{1,N}(t,z)\,\tilde\mu_N(\tilde\tau_N\,|\,t),$$
$$\overline{h(\tilde\tau_N,z\,|\,x)}-\overline{h(t,z)}=$$
$$=[H_0(t,z)+H_{1,N}(t,z)\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N\,|\,t)\Gamma^{-1}(t)][x-\mu(t)].\qquad(16)$$

Тогда из (16) с учетом (7)

$$M\{[\overline{h(\tilde\tau_N,z\,|\,x_t)}-\overline{h(t,z)}][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=$$
$$=\tilde H_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde H_0^T(t,z).\qquad(17)$$

Из (5) и Замечания следует

$$M\{[\partial\ln p_t(x_t)/\partial x_t][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=\Gamma^{-1}(t),$$
$$M\{[\partial\ln p(t,x_t)/\partial x_t][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=D^{-1}(t).\qquad(18)$$

Так как $M\{\cdot\}=M\{M\{\cdot|z_0^t,\eta_0^m\}\}$, тогда подставляя (17), (18) в (3.4) из [1] получаем (8).

Из (1), (15), (16)

$$h(t,x,\tilde x_N,z)-\overline{h(\tilde\tau_N,z\,|\,x)}=H_{1,N}(t,z)[\tilde x_N-\tilde\mu(\tilde\tau_N,t)]-$$
$$-H_{1,N}(t,z)\tilde\Gamma_{0N}^T(\tilde\tau_N,t)\Gamma^{-1}(t)[x-\mu(t)].\qquad(19)$$

Тогда согласно (4), (10), (19)

$$M\{[h(t,x_t,\tilde x_\tau^N,z)-\overline{h(\tilde\tau_N,z\,|\,x_t)}][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=$$
$$=H_{1,N}(t,z)\tilde\Gamma_N(\tilde\tau_N\,|\,t)H_{1,N}^T(t,z).\qquad(20)$$

Так как (см. (2.5), (2.7), (2.9), (2.11), (2.13) в [1])

$$p_{\tau|t}^t(\tilde x_N\,|\,x)=p_\tau^t(x;\tilde x_N)/p_t(x)=$$
$$=p_{t|\tau}^t(x\,|\,\tilde x_N)p_\tau^t(\tilde x_N)/p_t(x),$$

то

$$\frac{\partial\ln p_{\tau|t}^t(\tilde x_N\,|\,x)}{\partial x}=\frac{\partial\ln p_{t|\tau}^t(x\,|\,\tilde x_N)}{\partial x}-\frac{\partial\ln p_t(x)}{\partial x}.\qquad(21)$$

Аналогично (15)

$$p_{t|\tau}^t(x\,|\,\tilde x_N)=\mathbf N\{x;\mu(t\,|\,\tilde\tau_N),\Gamma(t\,|\,\tilde\tau_N)\},\qquad(22)$$
$$\mu(t\,|\,\tilde\tau_N)=\mu(t)+\tilde\Gamma_{0N}(\tilde\tau_N,t)\tilde\Gamma_N^{-1}(\tilde\tau_N,t)[\tilde x_N-\tilde\mu_N(\tilde\tau_N,t)],$$

а $\Gamma(t|\tilde\tau_N)$ определено в (11). Из (5), (22)

$$\frac{\partial\ln p_t(x)}{\partial x}=-\Gamma^{-1}(t)\big[x-\mu(t)\big],$$
$$\frac{\partial\ln p_{t|\tau}^t(x\,|\,\tilde x_N)}{\partial x}=-\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde\tau_N)[x-\mu(t\,|\,\tilde\tau_N)].\qquad(23)$$

Тогда согласно (11), (22), (23)

$$M\{[\partial\ln p_t(x_t)/\partial x_t][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=\Gamma^{-1}(t),$$
$$M\{[\partial\ln p_{t|\tau}^t(x_t\,|\,\tilde x_\tau^N)/\partial x_t][\cdot]^T\,\big|\,z_0^t,\eta_0^m\}=\Gamma^{-1}(t\,|\,\tilde\tau_N),\qquad(24)$$
$$M\{[\partial\ln p_{t|\tau}^t(x_t\,|\,\tilde x_\tau^N)/\partial x_t]\times$$
$$\times[\partial\ln p_t(x_t)/\partial x_t]^T\,|\,z_0^t,\eta_0^m\}=\Gamma^{-1}(t).$$

Используя (21), (24) получаем

$$M\left\{\frac{\partial \ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau \mid x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau \mid x_t)}{\partial x_t}\right)^T \Bigg| z^t_0, \eta^m_0\right\} = \\ = \Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t). \quad (25)$$

Аналогичные вычисления для априорных плотностей (см. Замечание) приводят к формуле

$$M\left\{\frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau \mid t, x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau \mid t, x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\} = \\ = D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N) - D^{-1}(t). \quad (26)$$

Из (21), (24)

$$M\{[\partial \ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau \mid x_t)/\partial x_t][\partial \ln p_t(x_t)/\partial x_t]^T \,|\, z^t_0, \eta^m_0\} = 0. \quad (27)$$

Аналогично, получаем

$$M\{[\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau \mid t, x_t)/\partial x_t][\partial \ln p(t, x_t)/\partial x_t]^T\} = 0. \quad (28)$$

Так как $M\{\cdot\}=M\{M\{\cdot|z^t_0,\eta^m_0\}\}$, тогда подставляя (20), (25–28) в (3.5) из [1] получаем (9). Из (3.13) из [1] и (5)

$$[p_{t_m}(x)/p_{t_m-0}(x)] = \overline{[c(\eta(t_m), z \mid x)}/c(\eta(t_m), z)] = \\ = [\mathbf{N}\{x; \mu(t_m), \Gamma(t_m)\}/\mathbf{N}\{x; \mu(t_m-0), \Gamma(t_m-0)\}].$$

Тогда с учетом $M\{\cdot\}=M\{M\{\cdot|z^t_0,\eta^m_0\}\}$ и $M\{\cdot\}=M\{M\{\cdot|z^t_0,\eta^{m-1}_0\}\}$, получаем

$$M\{\ln[\overline{c(\eta(t_m), z \mid x_{t_m})}/c(\eta(t_m), z)]\} = \\ = (1/2)M\{\ln[|\Gamma(t_m-0)|/|\Gamma(t_m)|]\}. \quad (29)$$

Подстановка (29) в (3.8) из [1] приводит к (13). Используя (3.18) из [1] и (15) аналогично (13), получаем (14).

Теорема 2. Количество информации (2.17) из [1] может быть представлено в виде (2.16) из [1], где $I^t_\tau[\cdot]$ и $I^t_{t|\tau}[\cdot]$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI^t_\tau[\tilde{x}^N_\tau; z^t_0, \eta^m_0]/dt = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[M\{R^{-1}(t,z)\tilde{H}_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{H}^T_{1,N}(t,z)\}], \quad (30)$$

$$dI^t_{t|\tau}[x_t; z^t_0, \eta^m_0 \mid \tilde{x}^N_\tau]/dt = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[M\{R^{-1}(t,z)\}H_0(t,z)\Gamma(t \mid \tilde{\tau}_N)H^T_0(t,z)] - \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[Q(t)[M\{\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)\} - D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)]], \quad (31)$$

где (см. (2), (4), (7))

$$\tilde{H}_{1,N}(t,z) = [H_0(t,z)\tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t) + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)] = \\ = [\tilde{H}_1(t,z) \mid \tilde{H}_2(t,z) \mid \cdots \mid \tilde{H}_N(t,z)], \quad (32)$$

с начальными условиями (3.22) и (3.23) из [1], где

$$\Delta I^{t_m}_\tau[\cdot] = (1/2)M\{\ln[|\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t_m-0)|/|\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t_m)|]\}, \quad (33)$$

$$\Delta I^{t_m}_{t_m|\tau}[\cdot] = (1/2)M\{\ln[|\Gamma(t_m-0 \mid \tilde{\tau}_N)|/|\Gamma(t_m \mid \tilde{\tau}_N)|]\} \quad (34)$$

и $\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t_m-0)=\lim\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)$, $\Gamma(t_m-0|\tilde{\tau}_N)=\lim\Gamma(t|\tilde{\tau}_N)$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Соотношения (1–3), (16) и (22) дают, что

$$\overline{h(t,z \mid \tilde{x}_N)} = h(t,z) + H_0(t,z)\mu(t \mid \tilde{\tau}_N) + H_{1,N}(t,z)\tilde{x}_N,$$

$$\overline{h(t,z \mid \tilde{x}_N)} - \overline{h(t,z)} = \\ = [H_0(t,z)\tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{\Gamma}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t) + H_{1,N}(t,z)] \times \\ \times [\tilde{x}_N - \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)]. \quad (35)$$

Таким образом, с учетом (4), (7), (32) получаем

$$M\{[\overline{h(t,z \mid \tilde{x}^N_\tau)} - \overline{h(t,z)}][\cdot]^T \,|\, z^t_0, \eta^m_0\} = \\ = \tilde{H}_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{H}^T_{1,N}(t,z). \quad (36)$$

Согласно (1), (2) и (35)

$$h(t,x,\tilde{x}_N,z) - \overline{h(t,z \mid \tilde{x}_N)} = H_0(t,z)[x - \mu(t \mid \tilde{\tau}_N)]. \quad (37)$$

Из (22) и (37) следует

$$M\{[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z) - \overline{h(t,z \mid \tilde{x}^N_\tau)}][\cdot]^T \,|\, z^t_0, \eta^m_0\} = \\ = H_0(t,z)\Gamma(t \mid \tilde{\tau}_N)H^T_0(t,z). \quad (38)$$

Аналогично (24) с учетом Замечания, получаем

$$M\{[\partial \ln p(t, x_t \mid \tilde{\tau}_N, \tilde{x}^N_\tau)/\partial x_t][\cdot]^T \,|\, z^t_0, \eta^m_0\} = D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N). \quad (39)$$

Так как $M\{\cdot\}=M\{M\{\cdot|z^t_0,\eta^m_0\}\}$, тогда, подставляя (36) в (3.20) из [1], получаем (30). Использование (24), (38), (39) в (3.21) из [1] дает (31). Формулы (33), (34) получаются аналогично (13), (14) с использованием (3.24), (3.25), (3.29), (3.31) из [1] и (5), (22).

Следствие 1. Количество информации (2.17) из [1] на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$dI^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau, x_t; z^t_0, \eta^m_0]/dt = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[M\{R^{-1}(t,z)H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{0,N}(t,z)\}] - \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[Q(t)[M\{\Gamma^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)\} - D^{-1}(t \mid \tilde{\tau}_N)]], \quad (40)$$

с начальным условием

$$\Delta I^{t_m}_{\tau,t_m}[\cdot] = (1/2)M\{\ln[|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0)|/|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m)|]\} \quad (41)$$

и $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)=\lim\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Из (2), (4), (7), (10), получаем

$$\tilde{H}_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde{H}^T_0(t,z) + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N \mid t)H^T_{1,N}(t,z) = \\ = H_0(t,z)\Gamma(t)H^T_0(t,z) + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_0(t,z) + \\ + H_0(t,z)\tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{1,N}(t,z) + \\ + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{1,N}(t,z) = \\ = H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{0,N}(t,z). \quad (42)$$

Использование (8), (9) в (2.15) из [1] с учетом (42) дает (40). Из (4) и (10) следует [7]

$$|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)| = |\Gamma(t)||\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N \mid t)|. \quad (43)$$

Тогда, используя (3.6), (3.7) в (2.15) из [1] с учетом (13), (14), (43), получаем (41).

Аналогично (42), из (2), (4), (11), (32) следует

$$\tilde{H}_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}^{-1}_N(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{H}^T_{1,N}(t,z) + H_0(t,z)\Gamma(t \mid \tilde{\tau}_N)H^T_0(t,z) = \\ = H_{0,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T_{0,N}(t,z). \quad (44)$$

Использование (30), (31) в (2.16) из [1] с учетом (44) дает (40). Из (4) и (11) следует [7]

$$|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)| = |\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)||\Gamma(t \mid \tilde{\tau}_N)|. \quad (45)$$

Тогда, используя (3.22), (3.23) в (2.16) из [1] с учетом (33), (34), (45), получаем (41).

Следствие 2. Пусть в (1), (2) отсутствуют зависимости коэффициентов от z. Тогда имеют место Теоремы 1, 2 и Следствие 2, где отсутствуют зависимости от z и оператор $M\{\cdot\}$. Таким образом, точное вычисление $I_\tau^t[\cdot]$, $I_{t|\tau}^t[\cdot]$, $I_{\tau|t}^t[\cdot]$ возможно только в условно-гауссовском случае при отсутствии в каналах наблюдения обратной связи (см. Замечание 1 в [1]).

3. Оптимальная передача стохастических процессов по каналам с запаздыванием

Сигнал x_t, сообщение на выходе непрерывного канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ являются скалярными и определяются в виде

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)d\omega_t,\ p_0(x) = \mathrm{N}\{x;\mu_0,\gamma_0\},$$
$$dz_t = h(t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)d\upsilon_t,$$
$$\eta(t_m) = g(t_m,x_\tau,z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m). \qquad (46)$$

Из соотношений (46) следует, что в непрерывном и дискретном каналах передаются прошлые значения x_τ сигнала, т.е. непрерывный и дискретный каналы являются каналами передачи с запаздыванием.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathrm{K}^1=\{\mathrm{H}^1;\mathrm{G}^1\}=\{h(\cdot);g(\cdot)\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$M\{h^2(t,x_\tau,z)\}\le\tilde h(t),\quad M\{g^2(t_m,x_\tau,z)\}\le\tilde g(t_m),$$

найти функционалы $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$, обеспечивающие минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$ относительно задачи фильтрации, где $\Delta(t)=M\{[x_t-\hat x(t,z,\eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat x(t,z,\eta)$ процесса x_t, которая соответствует принятому сообщению $\{z_0^t;\eta_0^m\}$ при заданных $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

Теорема 3. В классе $\mathrm{K}_l=\{\mathrm{H}_l^1;\mathrm{G}_l^1\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l^1=\{h(\cdot):\quad h(t,x_\tau,z)=h(t,z)+H_1(t,z)x_\tau\},$$
$$\mathbf{G}_l^1=\{g(\cdot):\quad g(t_m,x_\tau,z)=g(t_m,z)+G_1(t_m,z)x_\tau\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(t,x_\tau,z_\tau^0)$, $g^0(t_m,x_\tau,z_\tau^0)$ и оптимальное сообщение $\{z_t^0,\eta^0(t_m)\}$ имеют вид

$$h^0(t,z^0)=-H_0^0(t,z^0)\mu^0(t),$$
$$H_1^0(t,z^0)=[\tilde h(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2},$$
$$g^0(t_m,z^0)=-G_1^0(t_m,z^0)\mu^0(\tau,t_m-0),$$
$$G_1^0(t_m,z^0)=[\tilde g(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2},$$
$$dz_t^0=[\tilde h(t)/\Delta_{11}^0(t)]^{1/2}[x_\tau-\mu^0(\tau,t)]dt+\Phi_2(t)dv_t,$$
$$\eta^0(t_m)=[\tilde g(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[x_\tau-\mu^0(\tau,t_m-0)]+\Phi_3(t_m)\xi(t_m);$$

2) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t)=F(t)\mu^0(t)dt+$$
$$+R^{-1}(t)[\tilde h(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}\Delta_{01}^0(\tau,t)dz_t^0,$$
$$d\Delta^0(t)/dt=$$
$$=(2F(t)-R^{-1}(t)\tilde h(t)\,[(\Delta_{01}^0(\tau,t))^2/\Delta^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)])\times$$
$$\times\Delta^0(t)+Q(t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m)=\mu^0(t_m-0)+\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0)\times$$
$$\times[\tilde g(t_m)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}[V(t_m)+\tilde g(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$
$$\Delta^0(t_m)=\Delta^0(t_m-0)\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+\tilde g(t_m)]}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\tilde g(t_m)}{V(t_m)}\left(1-\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\right)\right],$$

где $Q(t)=\Phi_1^2(t)$, $R(t)=\Phi_2^2(t)$, $V(t_m)=\Phi_3^2(t_m)$;

3) $\mu^0(\tau,t)$, $\Delta_{11}^0(\tau,t)$ и $\Delta_{01}^0(\tau,t)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(\tau,t)=R^{-1}(t)[\tilde h(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}dz_t^0,$$
$$d\Delta_{11}^0(\tau,t)/dt=-R^{-1}(t)\tilde h(t)\Delta_{11}^0(\tau,t),$$
$$d\Delta_{01}^0(\tau,t)/dt=[F(t)-R^{-1}(t)\tilde h(t)]\Delta_{01}^0(\tau,t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(\tau,t_m)=\mu^0(\tau,t_m-0)+$$
$$+[\tilde g(t_m)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}[V(t_m)+\tilde g(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$
$$\Delta_{11}^0(\tau,t_m)=V(t_m)[V(t_m)+\tilde g(t_m)]^{-1}\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0),$$
$$\Delta_{01}^0(\tau,t_m)=V(t_m)[V(t_m)+\tilde g(t_m)]^{-1}\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0);$$

4) Пусть $I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]$ есть количество информации, достигаемое на кодирующих функционалах (47), (48). Тогда имеет место свойство

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=\sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m],$$

где sup берется по всем $\{h(\cdot),g(\cdot)\}\in\mathrm{K}_l^1$ и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=$$
$$=\frac12\sum_{\tau\le t_i\le t}\ln\left(\left[1+\frac{\tilde g(t_i)}{V(t_i)}\right]\times\left[1+\frac{\tilde g(t_i)}{V(t_i)}\left(1-\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_i-0))^2}{\Delta^0(t_i-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_i-0)}\right)\right]^{-1}\right)+$$
$$+\frac12\int_\tau^t\left(\frac{\tilde h(\sigma)}{R(\sigma)}\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,\sigma))^2}{\Delta^0(\sigma)\Delta_{11}^0(\tau,\sigma)}-Q(\sigma)\left[\frac{1}{\Delta^0(\sigma)}-\frac{1}{D(\sigma)}\right]\right)d\sigma.$$

Доказательство проводится на основе результатов Утверждения и Теоремы 1 с использованием неравенств Коши-Буняковского, Иенсена, Фишера, Ихары [5] аналогично доказательству соответствующих результатов в [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 3. – С. 13–17.
2. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 36–49.
3. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
4. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
5. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
6. Медич Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.
8. Dyomin N.S., Safronova I.E., Rozhkova S.V. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica (Lithuania). – 2003. – V. 14. – № 3. – P. 295–322.
9. Демин Н.С., Сафронова И.Е., Рожкова С.В. Оптимальная передача стохастического процесса по каналам с памятью при наличии запаздывания в дискретных наблюдениях // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 6. – С. 259–264 (англ.).

УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ-РИМАНА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В четырехмерном евклидовом пространстве E_4 рассматривается двумерное многообразие $V^1_{2,2}$ плоскостей L^1_2, в каждой из которых задано по одной точке A (центр плоскости). С этим многообразием ассоциируется двумерное многообразие $V^2_{2,2}$ плоскостей L^2_2, ортогональных соответствующим плоскостям L^1_2 в точках A и являющихся оснащающими плоскостями многообразия $V^1_{2,2}$. Возникают отображения между соответствующими плоскостями $L^1_2 \in V^1_{2,2}$ и $L^2_2 \in V^2_{2,2}$, каждое из которых определяется системой двух неоднородных квадратичных функций с двумя неизвестными или соответствующей комплексной функцией. Выясняется геометрический смысл этих отображений и рассматриваются частные случаи, когда указанные функции являются дифференцируемыми в смысле Коши-Римана или Даламбера-Эйлера или гармоническими в некоторых или во всех точках соответствующих плоскостей L^1_2 или L^2_2. Доказывается существование всех указанных частных случаев. Все рассмотрения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1–8].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство E_4, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_j\}$ $(j,k,l=1,2,3,4)$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{A} = \omega^j \overline{e}_j,\ d\overline{e}_j = \omega_j^k \overline{e}_k,$$
$$D\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j,\ D\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j. \quad (1.1)$$

Здесь 1-формы ω_k^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0, \quad (1.2)$$

которые с учетом (1.1) вытекают из условия ортонормальности репера R:

$$\{\overline{e}_k, \overline{e}_j\} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

где символом $\{\overline{a},\overline{b}\}$ обозначается скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пространства E_4.

В пространстве E_4 рассматривается многообразие $V^1_{2,2}$ – двумерное многообразие центрированных двумерных плоскостей L^1_2, в каждой из которых задано по одной точке M, называемой центром. К многообразию $V^1_{2,2}$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$M = A,\ L^1_2 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2). \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_p=(\overline{A},\overline{e}^*_1,\ldots,\overline{e}^*_p)$ обозначается p-плоскость (p-мерное линейное подпространство), проходящее через точку A параллельно линейно независимым векторам $\overline{e}^*_1,\overline{e}^*_2,\ldots,\overline{e}^*_p$. Из (1.3) в силу (1.1) следует, что дифференциальные уравнения многообразия $V^1_{2,2}$ запишутся в виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_\alpha^{\hat{\alpha}} \omega^\alpha,\ \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega^\beta, \quad (1.4)$$

$(\alpha,\beta,\gamma=1,2;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=3,4)$. Здесь 1-формы ω^a приняты за базисные, а величины $A_\alpha^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$(dA_\alpha^{\hat{\alpha}} - A_\beta^{\hat{\alpha}} \omega_\alpha^\beta + A_\alpha^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}) \wedge \omega^\alpha = 0,$$
$$(dA_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} - A_{\gamma\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_\alpha^\gamma - A_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_\beta^\gamma + A_{\alpha\beta}^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}) \wedge \omega^\alpha = 0. \quad (1.5)$$