Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 519.2

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ОБОБЩЕННОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. Ч. I. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

*Томский политехнический университет
Томский государственный университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается информационный аспект совместной задачи фильтрации и экстраполяции, когда наблюдаемый процесс представляет собой совокупность многомерных процессов с непрерывным и дискретным временем, которые зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений многомерного ненаблюдаемого процесса. Получены соотношения, определяющие количество информации в совместной задаче фильтрации и экстраполяции через локальные количества информации в задачах фильтрации и экстраполяции.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, фильтрация, экстраполяция, количество информации.

Key words:
Signal, stochastic system, filtering, extrapolation, information amount.

1. Введение

Любая статистическая задача имеет информационный аспект [1], суть которого заключается в нахождении соответствующих количеств информации о значениях ненаблюдаемого процесса, которые содержатся в реализациях ненаблюдаемых процессов. Кроме того, знание количества информации позволяет исследовать вопросы, являющиеся специфическими в теории информации, такие как минимизация ошибки воспроизведения сигнала, максимизация пропускной способности каналов передачи, оптимальная передача сигналов, а также вопросы информационного обоснования задач оценивания.

Используемые обозначения: $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{N}\{y;a,B\}$ – гауссовская плотность; $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ – след матрицы;

$$\tilde{\tau}_N=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_N);\ \tilde{s}_L=(s_1,s_2,...,s_L);\ \tilde{x}_\tau^N=[x_{\tau_k}],$$

$$\tilde{x}_{t,\tau}^{N+1}=\begin{bmatrix}x_t\\ \tilde{x}_\tau^N\end{bmatrix},\ \tilde{x}_s^L=[x_{s_l}],\ \tilde{x}_{t,s}^{L+1}=\begin{bmatrix}x_t\\ \tilde{x}_s^L\end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_{t,\tau,s}^{N+L+1}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_{t,\tau}^{N+1}\\ \tilde{x}_s^L\end{bmatrix},\ k=\overline{1;N},\ l=\overline{1;L}.$$

2. Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbf{F},F=(\mathbf{F}_t)_{t\ge0},\mathbf{P})$ ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t (полезный сигнал) и наблюдаемый l-мерный процесс z_t (сигнал на выходе непрерывного канала передачи) определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t=f(t,x_t)dt+\Phi_1(t)dw_t,\quad t\ge0, \tag{2.1}$$

$$dz_t=h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z)dt+\Phi_2(t,z)dv_t, \tag{2.2}$$

а наблюдаемый q-мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем (сигнал на выходе дискретного канала передачи) имеет вид (m=0,1,...)

$$\eta(t_m)=g(t_m,x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,z)+\Phi_3(t_m,z)\xi(t_m), \tag{2.3}$$

где $0<\tau_N<...\tau_1<t_m\le t$, τ_k=const, $k=\overline{1;N}$, т. е. память фиксированная, w_t и v_t – r_1- и r_3-мерные стандартные винеровские процессы, $\eta(t_m)$ – r_3-мерный стандартный белый гауссовский процесс,

$$p_0(x)=\partial\mathbf{P}\{x_0\le x\}/\partial x=\mathbf{N}\{x;\mu_0,\Gamma_0\},$$
$$f(\cdot)=f(t)+F(t)x_t,$$
$$h(\cdot)=h(t,z)+H_{0,N}(t,z)\tilde{x}_{t,\tau}^{N+1},$$
$$g(\cdot)=g(t_m,z)+G_{0,N}(t_m,z)\tilde{x}_{t_m,\tau}^{N+1}, \tag{2.4}$$

$$H_{0,N}(t,z)=[H_0(t,z)\ \vert\ H_1(t,z)\ \vert \dots \vert\ H_N(t,z)]=$$
$$=[H_0(t,z)\ \vert\ H_{1,N}(t,z)],$$
$$G_{0,N}(t_m,z)=$$
$$=[G_0(t_m,z)\ \vert\ G_1(t_m,z)\ \vert \dots \vert\ G_N(t_m,z)]=$$
$$=[G_0(t_m,z)\ \vert\ G_{1,N}(t_m,z)]. \qquad (2.5)$$

Предполагается: 1) x_0, w_t, v_t, $\xi(t_m)$ – некоррелированы; 2) $f(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot)$, $h(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $g(\cdot)$,$\Phi_3(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам; 3) $Q(.)=\Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)>0$, $V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\ \Phi_3^T(\cdot)>0$; 4) выполняются условия применимости формул Ито и Ито–Вентцеля; 5) для стохастических интегралов $J_t=\int\limits_0^t \Psi(\tau,\omega)d\chi_\tau$ по винеровским процессам χ_τ выполняется условие $\mathbf{M}\{\int\limits_0^t \Psi^2(\tau,\omega)d\tau\}<\infty$, обеспечивающее свойство $\mathbf{M}\{\int\limits_0^t \Psi(\tau,\omega)d\chi_\tau\}=0.$

Ставится задача: для последовательности моментов $t<s_1<\dots<s_L$ найти соотношения, определяющие эволюцию во времени совместного количества информации $I^t_{t,s}[x_t,\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m]$ о текущих x_t и будущих $\tilde{x}_s^L=\{x_{s_1},x_{s_2},\dots,x_{s_L}\}$ значениях ненаблюдаемого процесса, которое содержится в совокупности реализаций $z_0^t=\{z_\sigma;0\le\sigma\le t\}$ и $\eta_0^m=\{\eta(t_0),\eta(t_1),\dots,\eta(t_m);t_m\le t\}$ наблюдаемых процессов в виде представлений $I^t_{t,s}[\cdot]$ через информационные количества $I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]$ и $I_s^t[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m]$ о текущих и будущих значениях ненаблюдаемого процесса, соответственно.

3. Основные результаты

Утверждение 1. Для апостериорной и априорной плотностей

$$p_s^t(x;\tilde{x}_N;\tilde{x}^L)=$$
$$=\frac{\partial^{N+L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N;\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\ \vert z_0^t,\eta_0^m\}}{\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^L},$$
$$p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)=$$
$$=\frac{\partial^{N+L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N;\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\}}{\partial x\partial\tilde{x}_N\partial\tilde{x}^L} \qquad (3.1)$$

имеют место свойства

$$p_s^t(x;\tilde{x}_N;\tilde{x}^L)=$$
$$=\mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1};\tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L),\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)\}=$$
$$=\mathbf{N}\left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}_N\\ \tilde{x}^L\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\mu(t)\\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)\\ \tilde{x}^L(t,\tilde{s}_L)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t) & \tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(t,\tilde{s}_L)\\ \tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t) & \tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)\\ (\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\cdot))^{\mathrm{T}} & (\tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\cdot))^{\mathrm{T}} & \tilde{\Gamma}^L(t,\tilde{s}_L)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}, \qquad (3.2)$$

$$p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)=$$
$$\mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1};\tilde{a}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L),\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t,\tilde{s}_L)\}, \qquad (3.3)$$

где блочные составляющие параметров распределения (3.2) определяются дифференциально-рекуррентными уравнениями Теорем 1, 2 в [2], Теоремы 3 и Следствия 2 в [3]. Структура $\tilde{a}_{N+L+1}(.)$ и $\tilde{D}_{N+L+1}(.)$ аналогична структуре $\tilde{\mu}_{N+L+1}(.)$ и $\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(.)$ с заменой буквы μ на a и Γ на D, а параметры (3.3) определяются очевидным образом [4].

Пусть

$$p_t(x)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\vert z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x,$$
$$p_s^t(\tilde{x}^L)=\partial^L\mathbf{P}\{\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\ \vert z_0^t,\eta_0^m\}/\partial\tilde{x}^L,$$
$$p_s^t(x;\tilde{x}^L)=\partial^{L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\ \vert z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}^L,$$
$$p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N\ \vert z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$p(t,x)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\}/\partial x,$$
$$p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)=\partial^L\mathbf{P}\{\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\}/\partial\tilde{x}^L,$$
$$p(t,x;\tilde{s}_L,\tilde{x}^L)=\partial^{L+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\}/\partial x\partial\tilde{x}^L,$$
$$p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N\}/\partial x\partial\tilde{x}_N,$$
$$p_{s\vert t}^t(\tilde{x}^L\vert x)=\partial^L\mathbf{P}\{\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\ \vert x_t=x,z_0^t,\eta_0^m\}/\partial\tilde{x}^L,$$
$$p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\vert t,x)=\partial^L\mathbf{P}\{\tilde{x}_s^L\le\tilde{x}^L\ \vert x_t=x\}/\partial\tilde{x}^L. \qquad (3.4)$$

Количества информации по Шеннону $I^t_{t,s}[x_t,\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m]$, $I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]$ и условное количество информации $I^t_{t,s}[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m\vert x_t]$ согласно (3.4) [1] имеют вид

$$I^t_{t,s}[x_t,\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m]=\mathbf{M}\left\{\ln\frac{p_s^t(x_t;\tilde{x}_s^L)}{p(t,x_t;\tilde{s}_L,\tilde{x}_s^L)}\right\}, \qquad (3.5)$$

$$I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]=\mathbf{M}\left\{\ln\frac{p_t(x_t)}{p(t,x_t)}\right\}, \qquad (3.6)$$

$$I^t_{s\vert t}[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m\ \vert x_t]=\mathbf{M}\left\{\ln\frac{p^t_{s\vert t}(\tilde{x}_s^L\vert x_t)}{p(\tilde{s}_L,\tilde{x}_s^L\vert t,x_t)}\right\}. \qquad (3.7)$$

Теорема 1. Количество информации (3.5) может быть представлено в виде

$$I^t_{t,s}[x_t,\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m]=$$
$$=I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]+I^t_{s\vert t}[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m\ \vert x_t], \qquad (3.8)$$

где $I_t[\cdot]$, $I^t_{s\vert t}[\cdot]$ на интервалах времени $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]/dt=$$
$$=(1/2)\mathbf{tr}[\mathbf{M}\{R^{-1}(t,z)\tilde{H}_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde{H}_0^T(t,z)\}]-$$
$$-(1/2)\mathbf{tr}[Q(t)[\mathbf{M}\{\Gamma^{-1}(t)\}-D^{-1}(t)]], \qquad (3.9)$$

$$dI^t_{s\vert t}[\tilde{x}_s^L;z_0^t,\eta_0^m\ \vert x_t]/dt=$$
$$=(1/2)\mathbf{tr}\left[\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}R^{-1}(t,z)\times\\ \times\begin{bmatrix}\tilde{H}_{L+1}(t,z)\times\\ \times(\tilde{\Gamma}^{L+1}(t,\tilde{s}_L))^{-1}\tilde{H}^T_{L+1}(t,z)-\\ -\tilde{H}_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde{H}_0^T(t,z)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\right]-$$
$$-(1/2)\mathbf{tr}\left[Q(t)\begin{bmatrix}\mathbf{M}\{\Gamma^{-1}(t\vert\tilde{s}_L)-\Gamma^{-1}(t)\}-\\ -[D^{-1}(t\vert\tilde{s}_L)-D^{-1}(t)]\end{bmatrix}\right] \qquad (3.10)$$

с начальными условиями

$$I_{t_m}[x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m] = I_{t_m-0}[x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}] + \Delta I_{t_m}, \quad (3.11)$$

$$I_{s|t_m}^{t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta_0^m \,|\, x_{t_m}] = I_{s|t_m-0}^{t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta_0^m \,|\, x_{t_m}] + \Delta I_{s|t_m}^{t_m}, \quad (3.12)$$

где (см. (2.5), (3.2), (3.2))

$$\tilde{\Gamma}^{L+1}(t, \tilde{s}_L) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L) \\ (\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L))^T & \tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\Gamma(t|\tilde{s}_L) = \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L)(\tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L))^{-1}(\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L))^T,$$

$$D(t|\tilde{s}_L) = D(t) - \tilde{D}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L)(\tilde{D}^L(t, \tilde{s}_L))^{-1}(\tilde{D}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L))^T, \quad (3.14)$$

$$\tilde{H}_{L+1}(t,z) = [\tilde{H}_0(t,z) \mid \tilde{H}_L(t,z)] = [\tilde{H}_0(t,z) \mid \tilde{H}_{N+1}(t,z) \mid \ldots \mid \tilde{H}_{N+L}(t,z)],$$

$$\tilde{H}_0(t,z) = H_0(t,z)\Gamma(t) + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t),$$

$$\tilde{H}_{N+l}(t,z) = H_0(t,z)\Gamma_{0,N+1}^l(t, s_l) + H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}_{N,N+1}^l(\tilde{\tau}_N, t, s_l), \quad l = \overline{1;L}, \quad (3.15)$$

$\Gamma^l_{0,N+1(\cdot)}$ является l-м матричным элементом матрицы $\tilde{\Gamma}^L_{0,N+1}(\cdot)$, $\tilde{\Gamma}^l_{N,N+1}(\cdot)$ – l-м матричным столбцом матрицы $\tilde{\Gamma}^L_{N,N+1}(\cdot)$,

$$\Delta I_{t_m} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\{\ln[|\Gamma(t_m-0)|/|\Gamma(t_m)|]\}, \quad (3.16)$$

$$\Delta I_{s|t_m}^{t_m} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\{\ln[|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L \,|\, t_m - 0)|/|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L \,|\, t_m)|]\}, \quad (3.17)$$

$$\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L|t) = \tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L) - (\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L))^T \Gamma^{-1}(t)\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L). \quad (3.18)$$

Доказательство. Из следствия 1 в [3] следует, что $p_s^t(x;\tilde{x}^L)$ на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p_s^t(x;\tilde{x}^L) = \mathbf{L}_{t,s}[p_s^t(x;\tilde{x}^L); p_t(x)]dt + p_s^t(x;\tilde{x}^L)[\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x, \tilde{x}^L)} - \overline{h(t,z)}]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t, \quad (3.19)$$

с начальным условием

$$p_s^{t_m}(x;\tilde{x}^L) = \left[\frac{C(\eta(t_m), z|x, \tilde{x}^L)}{C(\eta(t_m), z)}\right] p_s^{t_m-0}(x;\tilde{x}^L), \quad (3.20)$$

где

$$d\tilde{z}_t = dz_t - \overline{h(t,z)}dt, \quad (3.21)$$

$$\overline{h(t,z)} = \mathbf{M}\{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z \,|\, z_0^t, \eta_0^m)\}, \quad (3.22)$$

$$\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x, \tilde{x}^L)} = \mathbf{M}\{h(\cdot)\,|\, x_t = x, \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m\}, \quad (3.23)$$

$$C(\eta(t_m), z) = \mathbf{M}\{C(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \,|\, z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\}, \quad (3.24)$$

$$C(\eta(t_m), z|x, \tilde{x}_s^L) = \mathbf{M}\left\{\begin{matrix} C(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \,|\, x_{t_m} = \\ = x, \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \end{matrix}\right\}, \quad (3.25)$$

$$C(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) = \exp\left\{\begin{matrix} -(1/2)[\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)]^{\mathrm{T}} \times \\ \times V^{-1}(t_m, z)[\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)] \end{matrix}\right\}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{L}_{\tau,y}[\varphi_1(\tau, y, \cdot); \varphi_2(\tau, y, \cdot)] = \frac{\varphi_1(\cdot)}{\varphi_2(\cdot)} L_{\tau,y}[\varphi_2(\cdot)] - \varphi_2(\cdot) L_{\tau,y}^*\left[\frac{\varphi_1(\cdot)}{\varphi_2(\cdot)}\right], \quad (3.27)$$

а $L_{\tau,y}[\cdot]$ и $L^*_{\tau,y}[\cdot]$ – прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу x_t. Из (3.19)–(3.27) при $s_l \downarrow t$, $l = \overline{1;L}$, следует, что $p_t(x)$ на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p_t(x) = L_{t,x}[p_t(x)]dt + p_t(x)[\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x)} - \overline{h(t,z)}]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t \quad (3.28)$$

с начальным условием

$$p_{t_m}(x) = [C(\eta(t_m), z|x)/C(\eta(t_m), z)]p_{t_m-0}(x), \quad (3.29)$$

$$\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x)} = \mathbf{M}\{h(t, x_t, x_\tau^N, z) \,|\, x_t = x; z_0^t, \eta_0^m\}, \quad (3.30)$$

$$C(\eta(t_m), z|x) = \mathbf{M}\{C(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \,|\, x_{t_m} = x; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\}. \quad (3.31)$$

Согласно (3.4)

$$p_{s|t}^t(\tilde{x}^L|x) = p_s^t(x;\tilde{x}^L)/p_t(x). \quad (3.32)$$

Обновляющий процесс $\tilde{z}_t$ дифференциал которого имеет вид (3.21) является таким, что $\tilde{Z}_t = (\tilde{z}_t, \mathbf{F}_t^z)$ есть винеровский процесс с $\mathbf{M}\{\tilde{z}_t\tilde{z}_t^{\mathrm{T}} \,|\, \mathbf{F}_t^z\} = \int_0^\tau R(\tau,z)d\tau$ [4]. Тогда, дифференцируя (3.32) по формуле Ито с использованием (3.19), (3.27), (3.28) для $t_m \le t < t_{m+1}$, получим

$$d_t p_{s|t}^t(\tilde{x}^L|x) = \left\{\begin{matrix} -L_{t,x}^*[p_{s|t}^t(\tilde{x}^L|x)] + \\ + p_{s|t}^t(\tilde{x}^L|x)\begin{bmatrix} \overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x, \tilde{x}^L)} - \\ -\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} R^{-1}(t,z) \times \\ \times[\overline{h(t,z)} - \overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x)}] \end{matrix}\right\} \times$$

$$\times dt + p_{s|t}^t(\tilde{x}^L|x)\begin{bmatrix} \overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x, \tilde{x}^L)} - \\ -\overline{h(\tilde{\tau}_N, z|x)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t \quad (3.33)$$

с начальным условием

$$p_{s|t_m}^{t_m}(\tilde{x}^L|x) = [C(\eta(t_m), z|x, \tilde{x}^L)/C(\eta(t_m), z|x)]p_{s|t_m}^{t_m-0}(\tilde{x}^L|x), \quad (3.34)$$

которое следует из (3.20), (3.29). Априорные плотности $p\,(t,x)$, $p\,(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L|t,x)$ определяются уравнениями

$$d_t p_t(x) = L_{t,x}[p(t,x)]dt,$$

$$d_t p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\,|t,x) = -L^*_{t,x}[p^t_{s|t}(\tilde{x}^L\,|x)]dt, \qquad (3.35)$$

которые следуют из (3.28), (3.33). Дифференцируя по формуле Ито с использованием (3.28), (3.33), (3.35), получим

$$d_t \ln\left[\frac{p_t(x)}{p(t,x)}\right] = \left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{p_t(x)}L_{t,x}[p_t(x)]- \\ -\dfrac{1}{p(t,x)}L_{t,x}[p(t,x)]\end{matrix}\right\}dt -$$

$$-\frac{1}{2}[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}-\overline{h(t,z)}]^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times R^{-1}(t,z)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}-\overline{h(t,z)}]dt+$$

$$+[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}-\overline{h(t,z)}]^{\mathrm{T}}R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t, \qquad (3.36)$$

$$d_t \ln\left[\frac{p^t_{s|t}(\tilde{x}^L\,|x)}{p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\,|t,x)}\right] =$$

$$=\left\{\begin{matrix}\left(\begin{matrix}\dfrac{L^*_{t,x}[p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\,|t,x)]}{p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L\,|t,x)}- \\ -\dfrac{L^*_{t,x}[p^t_{s|t}(\tilde{x}^L\,|x)]}{p^t_{s|t}(\tilde{x}^L\,|x)}\end{matrix}\right)+ \\ +\left[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x,\tilde{x}^L)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}\right]^{\mathrm{T}}\times \\ \times R^{-1}(t,z)\left[\begin{matrix}(\overline{h(t,z)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)})- \\ -\dfrac{1}{2}\left(\begin{matrix}\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x,\tilde{x}^L)}- \\ -\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]\end{matrix}\right\}dt+$$

$$+[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x,\tilde{x}^L)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}]^{\mathrm{T}}R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t. \qquad (3.37)$$

Применяя формулу Ито–Вентцеля [5] к (3.36), (3.37) с учетом предположения 5), получим аналогично [6], что количества информации (3.6), (3.7) на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]/dt = (1/2)\times$$

$$\times\mathbf{tr}\left[\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}R^{-1}(t,z)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}-\overline{h(t,z)}]\times \\ \times\left[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}-\overline{h(t,z)}\right]^T\end{matrix}\right\}\right]-$$

$$-(1/2)\times$$

$$\times\mathbf{tr}\left[Q(t)\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\dfrac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\right)^T- \\ -\dfrac{\partial\ln p(t,x_t)}{\partial x_t}\left(\dfrac{\partial\ln p(t,x_t)}{\partial x_t}\right)^T\end{matrix}\right\}\right], \qquad (3.38)$$

$$\frac{dI^t_{s|t}[\tilde{x}^L_s;z^t_0,\eta^m_0\,|x_t]}{dt} = \frac{1}{2}\times$$

$$\times\mathbf{tr}\left[\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}R^{-1}(t,z)\times \\ \times\left[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t,\tilde{x}^L_s)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}\right]\times \\ \times\left[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t,\tilde{x}^L_s)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}\right]^T\end{matrix}\right\}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{tr}\left[\begin{matrix}Q(t)\times \\ \times\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial\ln p^t_{s|t}(\tilde{x}^L_s\,|\,x_t)}{\partial x_t}\times \\ \times\left(\dfrac{\partial\ln p^t_{s|t}(\tilde{x}^L_s\,|\,x_t)}{\partial x_t}\right)^T- \\ -\dfrac{\partial\ln p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s\,|\,t,x_t)}{\partial x_t}\times \\ \times\left(\dfrac{\partial\ln p(\tilde{s}_L,\tilde{x}^L_s\,|\,t,x_t)}{\partial x_t}\right)^T\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right] \qquad (3.39)$$

с начальными условиями (3.11), (3.12), где

$$\Delta I_{t_m} = \mathbf{M}\{\ln[C(\eta(t_m),z|x_{t_m})/C(\eta(t_m),z)]\}, \qquad (3.40)$$

$$\Delta I^{t_m}_{s|t_m} =$$

$$=\mathbf{M}\{\ln[C(\eta(t_m),z|x_{t_m},\tilde{x}^L_s)/C(\eta(t_m),z|x_{t_m})]\}, \qquad (3.41)$$

которые следуют из (3.6), (3.7), (3.29), (3.34). Так как

$$p^t_\tau(x;\tilde{x}_N) =$$

$$=\mathbf{N}\left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}_N\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\mu(t)\\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\\ \tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}_{0N}(\tilde{\tau}_N,t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N,t)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}, \qquad (3.42)$$

то [4]

$$p^t_{\tau|t}(\tilde{x}_N\,|x) =$$

$$=\partial^N\mathbf{P}\{\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\,|x_t=x,z^t_0,\eta^m_0\}/\partial\tilde{x}_N =$$

$$=\mathbf{N}\{\tilde{x}_N;\tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N\,|t),\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N\,|t)\}, \qquad (3.43)$$

$$\tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N\,|t) =$$

$$\tilde{\mu}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\Gamma^{-1}(t)[x-\mu(t)]. \qquad (3.44)$$

Из (2.5), (3.22), (3.30), (3.42), (3.44) следует, что

$$\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x)}-\overline{h(t,z)} =$$

$$=[H_0(t,z)+H_{1,N}(t,z)\tilde{\Gamma}^T_{0N}(\tilde{\tau}_N,t)\Gamma^{-1}(t)][x-\mu(t)].$$

Тогда с учетом (3.15)

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}-\overline{h(t,z)}]\times \\ \times[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z|x_t)}-\overline{h(t,z)}]^T\end{matrix}\,\middle|\, z^t_0,\eta^m_0\right\} =$$

$$=\tilde{H}_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde{H}^T_0(t,z). \qquad (3.45)$$

Поскольку

$$p_t(x) = \mathbf{N}\{x; \mu(t), \Gamma(t)\},$$

$$p(t,x) = \mathbf{N}\{x; a(t), D(t)\}, \qquad (3.46)$$

то

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\partial \ln p_t(x_t)/\partial x_t]\times \\ \times[\partial \ln p_t(x_t)/\partial x_t]^T\end{matrix}\middle| z_0^t, \eta_0^m\right\} = \Gamma^{-1}(t),$$

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\partial \ln p(t,x_t)/\partial x_t]\times \\ \times[\partial \ln p(t,x_t)/\partial x_t]^T\end{matrix}\right\} = D^{-1}(t). \qquad (3.47)$$

Так как

$$\mathbf{M}\{\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot\left|z_0^t, \eta_0^m\right.\}\},$$

то подстановка (3.45), (3.47) в (3.38) приводит к (3.9). Для

$$p_{\tau|t,s}^t(\tilde{x}_N\left|x, \tilde{x}^L\right.) =$$

$$= \partial^N P\{\tilde{x}_\tau^N \le \tilde{x}_N \left| x_t = x, \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m\right.\}/\partial \tilde{x}_N$$

аналогично (3.43), (3.44) с учетом (3.2) следует, что

$$p_{\tau|t,s}^t(\tilde{x}_N\left|x, \tilde{x}^L\right.) =$$

$$= \mathbf{N}\{\tilde{x}_N; \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.), \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.)\},$$

$$\tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.) = \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{\Gamma}_N^{L+1}(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.)\times$$

$$\times(\tilde{\Gamma}^{L+1}(t, \tilde{s}_L))^{-1}[\tilde{x}^{L+1} - \tilde{\mu}^{L+1}(t, \tilde{s}_L)],$$

$$\tilde{\mu}^{L+1}(t, \tilde{s}_L) = \begin{bmatrix}\mu(t) \\ \tilde{\mu}^L(t, \tilde{s}_L)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_N^{L+1}(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.) = [\tilde{\Gamma}_{0,N}^T(\tilde{\tau}_N, t) \mid \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\tilde{\tau}_N\left|t, \tilde{s}_L\right.)], \qquad (3.48)$$

а $\tilde{\Gamma}^{L+1}(\cdot)$ определено в (3.13). Тогда из (2.5), (3.23), (3.30), (3.48) с учетом (3.15) аналогично (3.45) следует, что

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\overline{h(\tilde{\tau}_N, z\left|x_t, \tilde{x}_s^L\right.)} - \overline{h(\tilde{\tau}_N, z\left|x_t\right.)}]\times \\ \times[\overline{h(\tilde{\tau}_N, z\left|x_t, \tilde{x}_s^L\right.)} - \overline{h(\tilde{\tau}_N, z\left|x_t\right.)}]^T\end{matrix}\middle| z_0^t, \eta_0^m\right\} =$$

$$= \tilde{H}_{L+1}(t,z)(\tilde{\Gamma}^{L+1}(t, \tilde{s}_L))^{-1}\tilde{H}_{L+1}^T(t,z) -$$

$$-\tilde{H}_0(t,z)\Gamma^{-1}(t)\tilde{H}_0^T(t,z). \qquad (3.49)$$

Из (3.4)

$$p_s^t(x; \tilde{x}^L) = p_{t|s}^t(x\left|\tilde{x}^L\right.)p_s^t(\tilde{x}^L), \qquad (3.50)$$

где

$$p_{t|s}^t(x\left|\tilde{x}^L\right.) = \partial \mathbf{P}\{x_t \le x\left|\tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m\right.\}/\partial x. \qquad (3.51)$$

Тогда из (3.32) и (3.50) следует

$$\frac{\partial \ln p_{s|t}^t(x\left|\tilde{x}^L\right.)}{\partial x} = \frac{\partial \ln p_{t|s}^t(\tilde{x}^L\left|x\right.)}{\partial x} - \frac{\partial \ln p_t(x)}{\partial x}. \qquad (3.52)$$

Так как

$$p_s^t(x; \tilde{x}^L) =$$

$$= \mathbf{N}\left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}x \\ \tilde{x}^L\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}\mu(t) \\ \tilde{\mu}^L(t, \tilde{s}_L)\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L) \\ (\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L))^T & \tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}, \qquad (3.53)$$

тогда аналогично (3.43), (3.44)

$$p_{t|s}^t(x\left|\tilde{x}^L\right.) = \mathbf{N}\{\tilde{x}; \tilde{\mu}(t\left|\tilde{s}_L\right.), \tilde{\Gamma}(t\left|\tilde{s}_L\right.)\}, \qquad (3.54)$$

$$\tilde{\mu}(t\left|\tilde{s}_L\right.) =$$

$$= \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(t, \tilde{s}_L)(\tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L))^{-1}[\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(t, \tilde{s}_L)], \qquad (3.55)$$

где $\Gamma(t|\tilde{s}_L)$ определено в (3.14). Из (3.46), (3.52), (3.54), (3.55) следует

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\partial \ln p_{s|t}^t(\tilde{x}_s^L\left|x_t\right.)/\partial x_t]\times \\ \times[\partial \ln p_{s|t}^t(\tilde{x}_s^L\left|x_t\right.)/\partial x_t]^T\left|z_0^t, \eta_0^m\right.\end{matrix}\right\} =$$

$$= \Gamma^{-1}(t\left|\tilde{s}_L\right.) - \Gamma^{-1}(t). \qquad (3.56)$$

Аналогично

$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}[\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\left|t, x_t\right.)/\partial x_t]\times \\ \times[\partial \ln p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\left|t, x_t\right.)/\partial x_t]^T\end{matrix}\right\} =$$

$$= D^{-1}(t\left|\tilde{s}_L\right.) - D^{-1}(t). \qquad (3.57)$$

Так как

$$\mathbf{M}\{\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot\left|z_0^t, \eta_0^m\right.\}\},$$

то подстановка (3.49), (3.56), (3.57) в (3.39) дает (3.10). Аналогично (3.54)

$$p_{s|t}^t(\tilde{x}^L\left|x\right.) = \mathbf{N}\{\tilde{x}^L; \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L\left|t\right.), \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L\left|t\right.)\}, \qquad (3.58)$$

где $\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L|t)$ определено в (3.18). Тогда (3.16) следует из (3.29), (3.40), (3.46), а (3.17) следует из (3.34), (3.41), (3.58). Представление (3.8) следует из (3.5)–(3.7), (3.32). Теорема доказана.

Аналогично (3.6), (3.7) с учетом (3.4), (3.51)

$$I_s^t[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m] = \mathbf{M}\left\{\ln\frac{p_s^t(\tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}\right\}, \qquad (3.59)$$

$$I_{t|s}^t[x_t; z_0^t, \eta_0^m\left|\tilde{x}_s^L\right.] = \mathbf{M}\left\{\ln\frac{p_{t|s}^t(x_t\left|\tilde{x}_s^L\right.)}{p(t, x_t\left|\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\right.)}\right\}, \qquad (3.60)$$

где $p(t, x_t\left|\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L\right.) = \partial P\{x_t \le x\left|\tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L\right.\}/\partial x.$

Теорема 2. Количество информации (3.5) может быть представлено в виде

$$I_{t,s}^t[x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m] =$$

$$= I_s^t[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m] + I_{t|s}^t[x_t; z_0^t, \eta_0^m\left|\tilde{x}_s^L\right.], \qquad (3.61)$$

где $I_s^t[\cdot]$, $I_{t|s}^t[\cdot]$ на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$dI_s^t[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m]/dt =$$

$$= (1/2)\mathbf{tr}\left[\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}R^{-1}(t,z)\tilde{H}_L(t,z)\times \\ \times(\tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L))^{-1}\tilde{H}_L^T(t,z)\end{matrix}\right\}\right], \qquad (3.62)$$

$$dI_{t|s}^t[x_t; z_0^t, \eta_0^m\left|\tilde{x}_s^L\right.]/dt =$$

$$= (1/2)\mathbf{tr}\left[\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}R^{-1}(t,z)\times \\ \times\begin{bmatrix}\tilde{H}_{L+1}(t,z)(\tilde{\Gamma}^{L+1}(t, \tilde{s}_L))^{-1}\times \\ \times\tilde{H}_{L+1}^T(t,z) - \tilde{H}_L(t,z)\times \\ \times(\tilde{\Gamma}^L(t, \tilde{s}_L))^{-1}\tilde{H}_L^T(t,z)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\right] -$$

$$-(1/2)\mathbf{tr}[Q(t)[\mathbf{M}\{\Gamma^{-1}(t\left|\tilde{s}_L\right.)\} - D^{-1}(t\left|\tilde{s}_L\right.)]] \qquad (3.63)$$

с начальными условиями

$$I_s^{t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta_0^m] = I_s^{t_m-0}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}] + \Delta I_s^{t_m}, \quad (3.64)$$

$$I_{t_m|s}^{t_m}[x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m \left| \tilde{x}_s^L \right.] =$$
$$= I_{t_m|s}^{t_m-0}[x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \left| \tilde{x}_s^L \right.] + \Delta I_{t_m|s}^{t_m}, \quad (3.65)$$

$$\Delta I_s^{t_m} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\{\ln[\left|\tilde{\Gamma}^L(t_m - 0, \tilde{s}_L)\right| / \left|\tilde{\Gamma}^L(t_m, \tilde{s}_L)\right|]\}, \quad (3.66)$$

$$\Delta I_{t_m|s}^{t_m} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\{\ln[\left|\tilde{\Gamma}^L(t_m - 0 \left| \tilde{s}_L \right.)\right| / \left|\tilde{\Gamma}^L(t_m \left| \tilde{s}_L \right.)\right|]\}, \quad (3.67)$$

Доказательство. Из следствия 1 в [3] следует, что $p_s^t(\tilde{x}^L)$ на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p_s^t(\tilde{x}^L) =$$
$$= p_s^t(\tilde{x}^L)[\overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \left| \tilde{x}^L \right.)} - \overline{h(t,z)}]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t,z) d\tilde{z}_t, \quad (3.68)$$

с начальным условием

$$p_s^{t_m}(\tilde{x}^L) = \left[\frac{C(\eta(t_m), z \left| \tilde{x}^L \right.)}{C(\eta(t_m), z)}\right] p_s^{t_m-0}(\tilde{x}^L), \quad (3.69)$$

где

$$\overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \left| \tilde{x}^L \right.)} = \mathbf{M}\{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) \left| \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m \right.\},$$

$$C(\eta(t_m), z \left| \tilde{x}_s^L \right.) =$$
$$= \mathbf{M}\{C(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \left| \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \right.\}.$$

Дифференцируя $p_{t|s}^t(x|\tilde{x}^L) = p_s^t(x;\tilde{x}^L)/p_s^t(\tilde{x}^L)$ по формуле Ито с использованием (3.19), (3.68) для $t_m \le t < t_{m+1}$, получаем

$$d_t p_{t|s}^t(x \left| \tilde{x}^L \right.) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_{t,x}[p_{t|s}^t(x \left| \tilde{x}^L \right.); p_t(x)] + \\ + p_{t|s}^t(x \left| \tilde{x}^L \right.) \left[\begin{array}{c} \overline{h(\tilde{\tau}_N, z \left| x, \tilde{x}^L \right.)} - \\ -\overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \left| \tilde{x}^L \right.)} \end{array} \right]^T \times \\ \times R^{-1}(t,z)[\overline{h(t,z)} - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \left| \tilde{x}^L \right.)}] \end{array} \right\} dt +$$

$$+ p_{t|s}^t(x \left| \tilde{x}^L \right.)[\overline{h(\tilde{\tau}_N, z \left| x, \tilde{x}^L \right.)} - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \left| \tilde{x}^L \right.)}]^T \times$$
$$\times R^{-1}(t,z) d\tilde{z}_t \quad (3.70)$$

с начальным условием

$$p_{t_m|s}^{t_m}(x \mid \tilde{x}^L) =$$
$$= [C(\eta(t_m), z \left| x, \tilde{x}^L \right.) / C(\eta(t_m), z \left| \tilde{x}^L \right.)] p_{t_m|s}^{t_m-0}(x \mid \tilde{x}^L),$$

которое следует из (3.20), (3.69). Априорные плотности $p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L)$, $p(t, x|\tilde{s}_L, \tilde{x}^L)$ определяются уравнениями

$$d_t p(\tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = 0,$$

$$d_t p(t, x \left| \tilde{s}_L, \tilde{x}^L \right.) = \mathbf{L}_{t,x}[p(t, x \left| \tilde{s}_L, \tilde{x}^L \right.); p(t,x)]dt,$$

которые следуют из (3.68), (3.70). Дальнейшие преобразования проводятся аналогично преобразованиям при доказательстве Теоремы 1, начиная с формулы (3.36), с использованием формул Ито и Ито–Вентцеля, а также (2.5), (3.2), (3.3), (3.59), (3.60) и поэтому не приводятся. Теорема доказана.

Выводы

Получены два представления для количества информации в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации и обобщенной экстраполяции через количество информации в задаче фильтрации (Теорема 1) и в задаче экстраполяции (Теорема 2). Доказательства основных результатов основаны на формулах Ито и Ито–Вентцеля, которые являются базовыми результатами стохастического анализа. Результаты работы могут быть использованы при исследовании таких базовых задач теории информации и теории передачи сообщений, как информационная эффективность каналов передачи и оптимальная передача (оптимальное кодирование и декодирование), когда в качестве математических моделей сообщений используются стохастических процессы диффузионного типа.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 02.740.11.5190.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратонович Р. Теория информации. – М.: Советское радио, 1975. – 423 с.
2. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II. Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 36–49.
3. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
5. Розовский Б.Л. О формуле Ито–Вентцеля // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1973. – № 1. – С. 20–32.
6. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 87–96.

Поступила 12.07.2010 г.